Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. Ю. Федоровский, О равномерных приближениях функций n -аналитическими полиномами на спрямляемых контурах в $\mathbb{C}$, *Матем. заметки*, 1996, том 59, выпуск 4, 604–610

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1753>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 16:03:58

О РАВНОМЕРНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ ФУНКЦИЙ n -АНАЛИТИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ НА СПРЯМЛЯЕМЫХ КОНТУРАХ В $\mathbb{C}$

К. Ю. Федоровский

0. Введение. Задача о возможности равномерного приближения функций комплексными (т.е. n -аналитическими) полиномами на компактах в $\mathbb{C}$ полностью решена в работе С.Н. Мергеляна [1] в топологических терминах (для классов функций). В случае приближения n -аналитическими полиномами при $n > 1$ получить решение в чисто топологических или метрических терминах, как это будет показано ниже, не представляется возможным. Отметим, что n в каждом конкретном случае фиксируется, например, рассматривается задача об аппроксимации бианалитическими (т.е. 2-аналитическими) полиномами (подробнее см. в п. 1). В работе [2] получено достаточное условие приближаемости n -аналитическими ($n \geq 2$) полиномами, аналогичное условию теоремы С.Н. Мергеляна, а именно: *если дополнение компакта – связное множество, то всякую функцию, непрерывную на данном компакте и n -аналитическую в его внутренних точках, можно равномерно на этом компакте приблизить последовательностью соответствующих n -аналитических полиномов.*

Вопрос о существовании множеств, разделяющих плоскость, но на которых всякую непрерывную функцию можно равномерно приблизить n -аналитическими полиномами, насколько это известно автору, оставался открытым.

В настоящей работе рассматриваются условия (как необходимые, так и достаточные) возможности равномерных приближений n -аналитическими полиномами на компактах специального вида – спрямляемых жордановых контурах в $\mathbb{C}$. Дается, в частности, утвердительный ответ на поставленный выше вопрос.

1. Определения и основные результаты. Напомним, что функция f называется n -аналитической в области $D \subset \mathbb{C}$ ($n \geq 1$), если

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 93-01-00225.

$\partial^n f / \partial \bar{z}^n = 0$ всюду в D в классическом смысле. Здесь $\partial / \partial \bar{z}$ – оператор Коши–Римана.

Пусть X – компактное множество в $\mathbb{C}$, $C(X)$ – пространство комплекснозначных непрерывных функций на X с равномерной нормой. Каковы необходимые и достаточные условия на функцию $f \in C(X)$ для того, чтобы f можно было с любой точностью равномерно на X приблизить n -аналитическими полиномами, т.е. n -аналитическими функциями, полиномиальными по z и $\bar{z}$. Нетрудно показать, что естественным необходимым условием возможности таких приближений является принадлежность функции f к классу $A_n(X) = \{f \in C(X) \mid \partial^n f / \partial \bar{z}^n = 0 \text{ на } X^\circ\}$, где X° обозначает множество внутренних точек компакта X . Через $P_n(X)$ мы обозначим замыкание в равномерной норме на X подпространства $\{p|_X : p - n\text{-аналитический полином}\}$.

Одна из основных задач в теории равномерных приближений состоит в описании тех компактов X , для которых пространства $P_n(X)$ и $A_n(X)$ совпадают, т.е. естественное необходимое условие приближаемости является также и достаточным. Таким образом, от задачи об аппроксимации конкретной функции f мы перешли к задаче для классов функций, в которой ищутся условия на компакт X , обеспечивающие совпадение соответствующих пространств.

Приведем формулировки упомянутых выше результатов в терминах введенных функциональных пространств.

По теореме С. Н. Мергеляна [1]

$$A_1(X) = P_1(X) \iff \mathbb{C} \setminus X \text{ — связное множество.}$$

По теореме Карманы [2] из условия связности дополнения $\mathbb{C} \setminus X$ компакта X следует равенство $A_n(X) = P_n(X)$ для любого натурального $n \geq 2$. Для компактов X со связным дополнением задача о приближении n -аналитическими полиномами с помощью аналога теоремы Рунге сводится к задаче об аппроксимации функциями, n -аналитическими в окрестности компакта. Упомянем в связи с этим один результат Вердеры [3]: *на произвольном компакте X в $\mathbb{C}$ любую Дини-непрерывную функцию f из пространства $A_2(X)$ можно равномерно приблизить последовательностью функций, бианалитических в окрестности X* . Неизвестно, остается ли этот результат справедливым для произвольной функции f класса $A_2(X)$.

В отличие от аналитического ($n = 1$) случая, при $n \geq 2$ вопрос о возможности совпадения $P_n(X)$ и $A_n(X)$ для компактов X , не имеющих связного дополнения, оставался открытым. Всюду в дальнейшем мы ограничимся рассмотрением случая, когда X – замкнутая спрямляемая жорданова кривая (*спрямляемый контур*). Очевидно, что в этом случае $A_n(X) = C(X)$ для любого n . Нам потребуется следующее хорошо известное свойство аналитических дуг.

ЛЕММА 1. Пусть γ – аналитическая дуга, т.е. $\gamma = \{\psi(t) \mid t \in [0, 1], \psi \text{ голоморфна и однолистка в некоторой окрестности отрезка } [0, 1] \text{ в } \mathbb{C}\}$. Тогда существует функция φ , голоморфная в односвязной окрестности U дуги γ такая, что $\bar{\zeta} = \varphi(\zeta)$ на γ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть V – симметричная относительно вещественной оси односвязная окрестность отрезка $[0, 1]$, на которой ψ однолистка. Положим $\chi(w) = \psi(\bar{w})$ при $w \in V$. Искомая функция φ , определенная на области $U = \psi(V)$, имеет вид $\varphi(z) = \chi(\psi^{-1}(z))$. Лемма доказана.

В дальнейшем $D(\Gamma)$ обозначает область, ограниченную замкнутой жордановой кривой (контуром) Γ . Если не возникает сомнений о какой области идет речь, то мы будем писать D вместо $D(\Gamma)$.

Переходим к определениям.

Пусть γ_1 и γ_2 – две аналитические дуги. По лемме 1 построим аналитические элементы (φ_1, U_1) и (φ_2, U_2) такие, что функции φ_j голоморфны в окрестностях U_j дуг γ_j при $j = 1, 2$, и на дугах γ_1 и γ_2 выполняются равенства $\bar{\zeta} = \varphi_1(\zeta)$ и $\bar{\zeta} = \varphi_2(\zeta)$ соответственно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Скажем, что две аналитические дуги γ_1 и γ_2 *аналитически зависимы*, если аналитические элементы (φ_1, U_1) и (φ_2, U_2) могут быть аналитически продолжены друг в друга, и аналитически независимы в противном случае.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Назовем контур Γ *аналитическим*, если существует функция φ , аналитическая в окрестности Γ , такая, что $\bar{\zeta} = \varphi(\zeta)$ на Γ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Спрямо́ляемый контур Γ назовем *неванлинновским*, если $\bar{\zeta} = G(\zeta)/F(\zeta)$ на Γ , где G и F ($F \neq 0$) – ограниченные аналитические в $D(\Gamma)$ функции, а равенство понимается в смысле (угловых) граничных значений почти всюду относительно длины на Γ .

Заметим, что в силу граничной теоремы единственности [5, гл. X, § 2, теорема 3] указанные в определениях 2 и 3 представления функции $\bar{\zeta}$ на Γ определяются однозначно, т.е. определения аналитического и неванлинновского контуров корректны. Отметим также, что в определении 2 контур Γ обязательно получится спрямо́ляемым.

Основной целью настоящей работы является доказательство следующих утверждений, указывающих на существенные различия между аналитическими и n -аналитическими (при $n \geq 2$) полиномиальными приближениями на компактах в $\mathbb{C}$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть Γ – спрямо́ляемый контур, $n \geq 2$ – натуральное число. Следующие условия эквивалентны:

- (a) $P_n(\Gamma) \neq C(\Gamma)$,
- (b) Γ – неванлинновский контур.

Из этой теоремы непосредственно вытекает, что условия приближаемости n -аналитическими полиномами в равномерной норме на спрямо́ляемых контурах в $\mathbb{C}$ (для классов функций) одинаковы для всех $n \geq 2$.

Следующие утверждения, вытекающие из теоремы 1, позволяют выяснить вопрос о совпадении пространств $P_n(\Gamma)$ и $A_n(\Gamma)$ в ряде конкретных случаев (см. п. 3).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть Γ – аналитический контур и $n \geq 2$ – натуральное число. Тогда $P_n(\Gamma) \neq C(\Gamma)$ в том и только том случае, когда функция φ (голоморфная в окрестности Γ и удовлетворяющая на Γ уравнению $\bar{\zeta} = \varphi(\zeta)$) продолжается до функции, мероморфной в области $D(\Gamma)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть Γ – спрямляемый контур, содержащий две аналитически независимые аналитические дуги. Тогда $P_n(\Gamma) = C(\Gamma)$ при $n \geq 2$.

2. Доказательства.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. (a) $\implies$ (b). Фиксируем произвольное натуральное число $n \geq 2$. Пусть $P_n(\Gamma) \neq C(\Gamma)$. Так как $P_2(\Gamma) \subset P_n(\Gamma)$, то $P_2(\Gamma) \neq C(\Gamma)$.

Хорошо известно, что в этом случае существует ненулевая конечная борелевская мера μ на Γ такая, что для всех $m \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ выполняются равенства:

$$\int_{\Gamma} \zeta^m d\mu(\zeta) = 0, \quad (1)$$

$$\int_{\Gamma} \bar{\zeta} \zeta^m d\mu(\zeta) = 0. \quad (2)$$

Определим меру ν на Γ следующим образом:

$$d\nu(\zeta) = \bar{\zeta} d\mu(\zeta). \quad (3)$$

Из (2) и (3) вытекает, что для всех $m \in \mathbb{Z}_+$ имеет место равенство

$$\int_{\Gamma} \zeta^m d\nu(\zeta) = 0, \quad (4)$$

т.е. меры μ и ν ортогональны ко всем комплексным полиномам на Γ .

По теореме Ф. и М. Риссов [4, с. 67] (предварительно осуществляется конформное отображение области D на единичный круг и используются [5, гл. X, § 1, теорема 1] и теорема Мергеляна [1]) из условий (2) и (4) вытекает, что меры μ и ν абсолютно непрерывны относительно длины $|d\zeta|$ на Γ ($d\zeta$ – комплексный дифференциал на Γ), т.е. существуют такие суммируемые по $|d\zeta|$ на Γ функции f и g , что

$$d\mu(\zeta) = f(\zeta) d\zeta, \quad d\nu(\zeta) = g(\zeta) d\zeta. \quad (5)$$

Согласно теореме Голубева–Привалова [5, гл. X, § 4, теорема 2] функции f и g являются ($|d\zeta|$ -почти всюду) граничными (угловыми) значениями некоторых функций F_1 и G_1 соответственно, принадлежащих классу

E_1 (относительно области D) (см. также [5, гл. X, § 5, теорема 2]). Из условий (3) и (5) получаем, что

$$g(\zeta) d\zeta = d\nu(\zeta) = \bar{\zeta} d\mu(\zeta) = \bar{\zeta} f(\zeta) d\zeta,$$

или что $|d\zeta|$ -почти всюду на Γ имеет место равенство $g(\zeta) = \bar{\zeta} f(\zeta)$.

Таким образом, $|d\zeta|$ -почти всюду на Γ справедливо $\bar{\zeta} = G_1(\zeta)/F_1(\zeta)$, причем равенство понимается в смысле граничных значений. Таким образом, для доказательства того, что контур Γ – неванлиновский, нам достаточно показать, что каждая из функций F_1 и G_1 представима в виде отношения двух ограниченных аналитических в области D функций.

Пусть $z = \Omega(w)$ – конформное отображение единичного круга на область D . Рассмотрим в единичном круге функцию $\Phi_1(w) = F_1(\Omega(w))$. Ясно, что $\Phi_1 \in H_1$. Известно [5, гл. IX, § 1], что $H_1 \subset N$ (класс Неванлинны). Согласно [6, теорема 6.11] любая функция класса N представима в требуемом виде, т.е. $\Phi_1(w) = \Phi_{11}(w)/\Phi_{12}(w)$, где Φ_{11} и Φ_{12} – ограниченные аналитические в единичном круге функции. Аналогично, по функции G_1 определяем ограниченные аналитические в единичном круге функции Ψ_{11} и Ψ_{12} такие, что

$$\Psi_1(w) = G_1(\Omega(w)) = \frac{\Psi_{11}(w)}{\Psi_{12}(w)}.$$

Теперь мы можем определить функции F и G , фигурирующие в определении 3, следующим образом:

$$F(z) = \Psi_{12}(\Omega^{-1}(z))\Phi_{11}(\Omega^{-1}(z)), \quad G(z) = \Psi_{11}(\Omega^{-1}(z))\Phi_{12}(\Omega^{-1}(z)).$$

Итак, мы показали, что контур Γ является неванлиновским.

(b) $\implies$ (a). Пусть Γ – неванлиновский контур, т.е. (см. определение 3) $|d\zeta|$ -почти всюду на Γ имеет место равенство (понимаемое, естественно, в смысле граничных значений) $\bar{\zeta} = G(\zeta)/F(\zeta)$, где F и G – ограниченные аналитические в области D функции. Чтобы показать неполноту системы n -аналитических полиномов на Γ рассмотрим определенную следующим образом меру μ на Γ :

$$d\mu(\zeta) = F^{n-1}(\zeta) d\zeta.$$

Покажем, что мера μ обладает следующим свойством ортогональности:

$$\int_{\Gamma} \bar{\zeta}^k \zeta^m d\mu(\zeta) = 0$$

для любых $m \in \mathbb{Z}_+$ и натурального $k < n$.

В самом деле,

$$\int_{\Gamma} \bar{\zeta}^k \zeta^m d\mu(\zeta) = \int_{\Gamma} \bar{\zeta}^k \zeta^m F^{n-1}(\zeta) d\zeta = \int_{\Gamma} G^k(\zeta) F^{n-k-1}(\zeta) \zeta^m d\zeta = 0$$

по теореме Коши.

Итак, мера μ ($\mu \neq 0$, так как $F \not\equiv 0$) ортогональна пространству $P_n(\Gamma)$, откуда вытекает, что $P_n(\Gamma) \neq C(\Gamma)$.

Таким образом, теорема 1 полностью доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 1. Пусть $P_n(\Gamma) \neq C(\Gamma)$. Тогда по теореме 1 Γ – неванлинновский контур, т.е. $\varphi(\zeta) = \bar{\zeta} = G(\zeta)/F(\zeta)$, где F и G ограничены и голоморфны в D , а последнее равенство понимается в смысле граничных значений $|d\zeta|$ -почти всюду на Γ . По граничной теореме единственности [5, гл. X, § 2, теорема 3] мы получаем, что $\varphi(z) = G(z)/F(z)$ в приграничном слое области D . Следовательно, мы можем положить $\varphi(z) = G(z)/F(z)$ всюду в D .

Обратно. Пусть φ продолжается до функции, мероморфной в области D , и $a_1, \dots, a_m$ – ее полюса в D порядков $s_1, \dots, s_m$ соответственно. Положим

$$F(z) = \prod_{k=1}^m (z - a_k)^{s_k},$$

а $G(z) = \varphi(z)F(z)$. Нетрудно заметить, что F и G – ограниченные аналитические в области D функции, причем на Γ имеет место равенство $\bar{\zeta} = G(\zeta)/F(\zeta)$, т.е. Γ – неванлинновский контур. Следовательно, по теореме 1 $P_n(\Gamma) \neq C(\Gamma)$ для любого натурального $n \geq 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 2. Покажем, что если система n -аналитических полиномов неполна на Γ (т.е. $P_n(\Gamma) \neq C(\Gamma)$), то любые две аналитические дуги γ_1 и γ_2 , содержащиеся в Γ , аналитически зависимы.

В самом деле, из того, что $P_n(\Gamma) \neq C(\Gamma)$ вытекает (см. теорему 1), что контур Γ неванлинновский, т.е. $|d\zeta|$ -почти всюду на Γ имеет место равенство $\bar{\zeta} = G(\zeta)/F(\zeta)$. Из определения аналитической дуги и леммы 1 получаем, что $\bar{\zeta} = \varphi_j(\zeta)$ на γ_j , где функции φ_j аналитичны в окрестностях U_j дуг γ_j ($j = 1, 2$). Не ограничивая общности, можно считать, что $U_1 \cap D$ и $U_2 \cap D$ односвязны, а также, что $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. По граничной теореме единственности [5, гл. X, § 2, теорема 3] в $U_j \cap D$ имеет место равенство $\varphi_j(z) = G(z)/F(z)$ при $j = 1, 2$. Отсюда видно, что аналитические элементы (φ_1, U_1) и (φ_2, U_2) аналитически продолжают друг в друга вдоль любого пути в D , начинающегося в U_1 , оканчивающегося в U_2 и не проходящего через нули функции F , т.е. дуги γ_1 и γ_2 аналитически зависимы. Предложение 2 доказано.

3. Примеры. Проиллюстрируем доказанные выше теоремы следующими примерами.

ПРИМЕР 1. Пусть Γ_0 – граница квадрата с вершинами в точках $0, 1, i$ и $i + 1$. Так как отрезки $\gamma_1 = [1/4, 3/4]$ и $\gamma_2 = [i/4, 3i/4]$ на Γ_0 аналитически независимы ($\varphi_1(z) = z$, $\varphi_2(z) = -z$), то, согласно предложению 2, $P_n(\Gamma_0) = C(\Gamma_0)$ при любом натуральном $n \geq 2$.

ПРИМЕР 2. Пусть $\Gamma_1 = \{|z| = 1\}$ – единичная окружность (здесь $\varphi(z) = 1/z$). Ввиду предложения 1, $P_n(\Gamma) \neq C(\Gamma)$ для всех натуральных n .

ПРИМЕР 3. Рассмотрим эллипс Γ_2 , заданный уравнением $x^2 + 2y^2 = 1$. Элементарные вычисления показывают, что в этом случае $\varphi(z) = 3z - 2\sqrt{2z^2 - 1}$, где берется ветвь корня, равная 1 в точке $z = 1$ и продолженная голоморфно вдоль Γ_2 . Снова применяя предложение 1 (заметив, что у функции φ есть точки ветвления внутри области D), заключаем, что $P_n(\Gamma_2) = C(\Gamma)$ для любого натурального $n \geq 2$.

ПРИМЕР 4. Если в предыдущем примере сделать замену переменных $w = 1/z$, то мы получим контур Γ_3 , заданный уравнением $\bar{w} = w/(3 - 2\sqrt{2 - w^2})$. Легко видеть, что Γ_3 — это неванлиновский контур, отсюда по теореме 1 заключаем, что $P_n(\Gamma_3) \neq C(\Gamma_3)$ для всех n . В отличие от единичной окружности, Γ_3 не является рациональной кривой.

Из доказанных выше утверждений вытекает невозможность (при $n \geq 2$) описания в чисто топологических или метрических терминах тех компактов X , для которых $P_n(X) = A_n(X)$. В то же время интересно отметить, что в отличие от нашего случая, топологические критерии приближаемости гармоническими полиномами на компактах в $\mathbb{R}^2$ (для классов функций) удастся получить для равномерных и гёльдеровских приближений с показателем Гёльдера, меньшим $1/2$ [7].

Автор выражает искреннюю благодарность А. Г. Витушкину и П. В. Парамонову за постановку задачи и внимание к работе.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
13.10.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Мергелян С. Н. Равномерные приближения функций комплексного переменного // УМН. 1952. Т. 7. № 2. С. 31–122.
- [2] Carmona J. J. Mergelyan approximation theorem for rational modules // J. Approx. Th. 1985. V. 44. P. 113–126.
- [3] Verdera J. On the uniform approximation problem for the square of the Cauchy–Riemann operator. Preprint: Universitat Autònoma de Barcelona, № 3, 1991.
- [4] Гамелин Т. Равномерные алгебры. М.: Мир, 1973.
- [5] Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.–Л.: Гостехиздат, 1952.
- [6] Хейман У. Мероморфные функции. М.: Мир, 1966.
- [7] Парамонов П. В. C^m -приближения гармоническими полиномами на компактных множествах в $\mathbb{R}^n$ // Матем. сб. 1993. Т. 184. № 2. С. 105–128.