Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. Н. Хабибуллин, О нулевых множествах для классов целых функций и представлении мероморфных функций, *Матем. заметки*, 1996, том 59, выпуск 4, 611–617

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1754>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 16:54:36

О НУЛЕВЫХ МНОЖЕСТВАХ ДЛЯ КЛАССОВ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ И ПРЕДСТАВЛЕНИИ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

Б. Н. Хабибуллин

В работах автора [1]–[3] был разработан новый метод описания множеств неединственности для весовых пространств E целых функций в $\mathbb{C}^n$, $n \geq 1$. В ходе его обсуждения на Второй международной летней математической школе “Теория потенциала” (Крым, 1993 г.) возник вопрос: возможно ли перенесение основы этого метода на исследование нулевых множеств функций из E ? Подход, использованный в работах [1]–[3], не позволял с уверенностью ответить на этот вопрос утвердительно. Сейчас, используя путь, опирающийся на элементы теории упорядоченных векторных пространств, удалось выяснить, что это возможно. Оказалось также, что в рассматриваемую тематику вписывается задача представления мероморфной в $\mathbb{C}^n$ функции в виде отношения двух целых функций, имеющих заданные ограничения на рост вблизи бесконечности, но с сильно отличающимися нулевыми множествами.

1. Основная теорема. Через $RH(\mathbb{C}^n)$ обозначаем пространство всех плюригармонических в $\mathbb{C}^n$ функций, $n \geq 1$.

Пусть M – действительная локально интегрируемая функция в $\mathbb{C}^n$, σ – сужение меры Лебега на единичный шар B_1 в $\mathbb{C}^n$, нормированное условием $\sigma(B_1) = 1$. Через M_σ обозначаем функцию, полученную как

$$M_\sigma(z) = \int M(z + \zeta) d\sigma(\zeta) = (M * \sigma)(z), \quad z \in \mathbb{C}^n.$$

Через $L(M)$ обозначаем класс всех локально интегрируемых функций v со значениями в $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, удовлетворяющих оценке

$$v(z) \leq M(z), \quad z \in \mathbb{C}^n. \quad (1)$$

Положительную меру Радона μ с компактным носителем в $\mathbb{C}^n$ называем *представляющей мерой*, если для любой $h \in RH(\mathbb{C}^n)$ выполнено

равенство

$$h(0) = \int h d\mu. \quad (2)$$

Класс всех представляющих мер обозначаем $\mathcal{M}_\delta$.

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА. Пусть M – непрерывная действительная, а u – субгармоническая в $\mathbb{C}^n$ функции, $u \not\equiv -\infty$. Если существует функция $h \in PH(\mathbb{C}^n)$ такая, что $u + h \in L(M)$, то найдется постоянная C такая, что

$$\int u d\mu \leq \int M d\mu + C, \quad \mu \in \mathcal{M}_\delta. \quad (3)$$

Обратно, если выполнено (3), где постоянная C не зависит от $\mu \in \mathcal{M}_\delta$, то найдется функция $h \in PH(\mathbb{C}^n)$ такая, что $u + h \in L(M_\sigma)$.

Если в основной теореме $u = \log |\varphi|$, где φ – целая функция в $\mathbb{C}^n$, то прямым следствием ее является

ТЕОРЕМА 1. Пусть M – непрерывная действительная, а φ – целая функции в $\mathbb{C}^n$, $\varphi \not\equiv 0$. Если существует не обращающаяся в нуль целая функция g такая, что $\log |\varphi g| \in L(M)$, то найдется постоянная C такая, что для функции $u = \log |\varphi|$ выполнено (3). Обратно, если выполнено (3), то найдется не обращающаяся в нуль целая функция g такая, что $\log |\varphi g| \in L(M_\sigma)$.

Для перехода от основной теоремы к теореме 1 достаточно заметить, что функция $h \in PH(\mathbb{C}^n)$ тогда и только тогда, когда существует целая функция g в $\mathbb{C}^n$, не обращающаяся в нуль и такая, что $\log |g| = h$.

Таким образом, если Λ – положительный дивизор в $\mathbb{C}^n$ и φ_Λ – целая функция с дивизором нулей, совпадающим с Λ , то теорема 1 в терминах φ_Λ дает, с одной стороны, необходимые условия, при которых Λ – дивизор нулей некоторой функции из класса

$$E(M) = \{f - \text{целая функция в } \mathbb{C}^n : \log |f| \in L(M)\},$$

а, с другой – достаточные условия для близкого $E(M)$ класса $E(M_\sigma)$. Переход от интегралов от $\log |\varphi_\Lambda|$ по мерам $\mu \in \mathcal{M}_\delta$ непосредственно к характеристикам дивизора Λ приводится в этой статье в п. 3 лишь для одномерного случая.

В последнем п. 4 основная теорема применяется к двойственной постановке задачи о представлении мероморфных в $\mathbb{C}^n$ функций f в виде отношения $f = g/h$ двух целых функций g и h , имеющих заданные ограничения на рост вблизи бесконечности и взаимно простых в каждой точке $z \in \mathbb{C}^n$.

2. Доказательство основной теоремы. Первая часть теоремы тривиальна. Действительно, пусть $u + h \in L(M)$. Из определения (1) класса $L(M)$ имеем $u + h \leq M$ на $\mathbb{C}^n$. Интегрируя обе части по мере $\mu \in \mathcal{M}_\delta$ и учитывая (2), получаем (3) с $C = -h(0)$.

Обратно, пусть выполнено (3). Тогда для функции $f = M - u$ выполнено

$$-C \leq \int f d\mu, \quad \mu \in \mathcal{M}_\delta. \quad (4)$$

Для любой меры $\mu \in \mathcal{M}_\delta$ свертка $\mu * \sigma$ – также представляющая мера. Действительно, из свойств среднего по шару для функций $h \in PH(\mathbb{C}^n)$ легко следует

$$\int h d(\mu * \sigma) = \int (h * \sigma) d\mu = \int h d\mu = h(0).$$

Следовательно, ослабляя (4), имеем

$$-C \leq \int f d(\mu * \sigma) = \int (f * \sigma) d\mu = \int f_\sigma d\mu, \quad \mu \in \mathcal{M}_\delta, \quad (5)$$

где f_σ – непрерывная функция ввиду локальной интегрируемости f по мере Лебега.

Пусть B_t – замкнутый шар в $\mathbb{C}^n$ радиуса t с центром в нуле, $C(B_t)$ – пространство непрерывных действительных функций на B_t . Обозначим через PH_t подпространство (и, тем более, выпуклый конус с вершиной в нуле) в $C(B_t)$, полученный сужениями функций из $PH(\mathbb{C}^n)$ на B_t .

Положительный росток меры Дирака δ (единичной массы, сосредоточенной в нуле) на конусе PH_t для пространства $C(B_t)$ определяется [4, III.1.3] как множество

$$\text{Spr}_t = \{\mu \in C^+(B_t) : \delta(h) \leq \mu(h), h \in PH_t\},$$

где $C^+(B_t)$ – конус положительных мер Радона на $C(B_t)$. На $C(B_t)$ определим суперлинейный функционал q_t [4, с. 299]:

$$q_t : x \rightarrow \sup\{\delta(h) : h \leq x, h \in PH_t\}. \quad (6)$$

Конус PH_t коинициален в $C(B_t)$ [4], т.е. для любого $x \in C(B_t)$ существует $h \in PH_t$ (например, достаточно малая постоянная) такая, что $h \leq x$ на B_t . В этом случае имеет место представление [4, III.1.3 (VII)]:

$$q_t(x) = \inf\{\mu(x) : \mu \in \text{Spr}_t\}, \quad x \in C(B_t). \quad (7)$$

Так как PH_t – подпространство, то неравенства $\delta(h) \leq \mu(h)$, $h \in PH_t$, влекут равенства $\delta(h) = \mu(h)$ для всех $h \in PH_t$. При этом по определению

$\delta(h) = h(0)$. Иначе говоря, для мер μ из Spr_t выполнено (2) с тем лишь ограничением, что носители этих мер μ лежат в B_t . Таким образом, (7) можно переписать для $x = f_\sigma$ в виде

$$q_t(f_\sigma) = \inf \left\{ \int f_\sigma d\mu : \mu \in \mathcal{M}_\delta, \text{supp } \mu \subset B_t \right\}.$$

Но согласно (5) правая часть здесь ограничена снизу постоянной $-C$, т.е. $q_t(f_\sigma) \geq -C$ для всех t .

Выберем $t = k = 1, 2, \dots$. Тогда по определению (6) функционала q_t для некоторой постоянной $c < -C$ при любом $k = 1, 2, \dots$ найдется плюригармоническая в $\mathbb{C}^n$ функция h_k такая, что

$$h_k(z) \leq f_\sigma(z), \quad z \in B_t; \quad h_k(0) \geq c. \quad (8)$$

В силу гармоничности функций h_k и известной теоремы сходимости [5, с. 195], из последовательности $\{h_k\}$ можно извлечь подпоследовательность $\{h_k^{(1)}\}$, равномерно сходящуюся внутри B_1 . Из $\{h_k^{(1)}\}$ можно извлечь подпоследовательность $\{h_k^{(2)}\}$, равномерно сходящуюся внутри B_2 , и т.д. Диагональный процесс дает последовательность $\{h_k^{(k)}\} \subset \{h_k\}$, равномерно сходящуюся на компактах из $\mathbb{C}^n$ к функции $h \in PH(\mathbb{C}^n)$, причем согласно (8) выполнено неравенство $h \leq f_\sigma$ всюду на $\mathbb{C}^n$. Последнее неравенство, вспоминая построение f_σ , можно записать в виде $u * \sigma + h \leq M_\sigma$ на $\mathbb{C}^n$. Из субгармоничности u следует $u \leq u * \sigma$ на $\mathbb{C}^n$; из двух последних, неравенство $u + h \in L(M_\sigma)$. Теорема доказана.

3. Одна переменная. Через $H(\mathbb{C})$ обозначаем класс всех целых функций в $\mathbb{C}$. Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$ – последовательность комплексных чисел. Λ – нулевое множество функции $\varphi \in H(\mathbb{C})$, если кратность нуля функции φ в любой точке $\lambda \in \mathbb{C}$ совпадает с числом повторений этой точки в последовательности Λ .

Субгармоническую в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ функцию V называем *представляющей*, если вне некоторого круга $\{z \in \mathbb{C} : |z| < t\}$ функция V – тождественный нуль и

$$V(\zeta) \leq -\log |\zeta| + O(1) \quad \text{при } \zeta \rightarrow 0.$$

Класс всех представляющих функций обозначаем через $\mathcal{P}$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$ – последовательность в $\mathbb{C}$, не имеющая конечных предельных точек, $0 \notin \Lambda$, M – непрерывная субгармоническая в $\mathbb{C}$ функция с распределением масс ν_M . Если Λ – нулевое множество для функции из класса $E(M)$, то найдется постоянная D такая, что

$$\sum_n V(\lambda_n) \leq \int V d\nu_M + D, \quad V \in \mathcal{P}. \quad (9)$$

Обратно, если выполнено (9), где постоянная D не зависит от $V \in \mathcal{P}$, то Λ – нулевое множество для некоторой функции из $E(M_\sigma)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Потенциалом представляющей меры t будем называть функцию

$$V_m(\zeta) = \int \log |z - \zeta| dm(z) - \log |\zeta|, \quad \zeta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Из [1, предложение 1.4] для субгармонической функции M имеем

$$\int M dm = \int V_m d\nu_M + M(0), \quad t \in \mathcal{M}_\delta.$$

Оттуда же для целой функции φ_Λ с нулевым множеством Λ получаем

$$\int \log |\varphi_\Lambda| dm = \sum_n V_m(\lambda_n) + \log |\varphi_\Lambda(0)|, \quad t \in \mathcal{M}_\delta.$$

Из двух последних соотношений следует, что (3) эквивалентно (после замены μ на t и u на $\log |\varphi_\Lambda|$) системе неравенств

$$\sum_n V_m(\lambda_n) \leq \int V_m d\nu_M + M(0) + C - \log |\varphi_\Lambda(0)|, \quad t \in \mathcal{M}_\delta.$$

В [1, доказательства предложений 1.3, 1.5, 4.1] показано, что класс потенциалов всех представляющих мер t совпадает с $\mathcal{P}$. Следовательно, последняя система неравенств – в точности (9) при $D = M(0) + C - \log |\varphi_\Lambda(0)|$. Таким образом, (9) эквивалентно (3) и доказываемая теорема следует из основной.

4. Представление мероморфных функций. Пусть f – мероморфная в $\mathbb{C}^n$ функция. В этом пункте рассматривается вопрос о возможности представления функции f в виде отношения $f = g/h$ двух целых функций, взаимно простых в каждой точке $z \in \mathbb{C}^n$ (точнее [6], в кольце ростков в каждой точке $z \in \mathbb{C}^n$) так, что g и h из класса $E(M)$. Эта задача исследовалась для различных мажорант M , например, в работах [7] (при $n = 1$) и [8] ($n > 1$).

Известно [6], [8], что всякая мероморфная в $\mathbb{C}^n$ функция f может быть задана как отношение $f = g_0/h_0$ двух целых функций, взаимно простых в каждой точке из $\mathbb{C}^n$. Далее, считаем, что такое представление уже дано изначально. При этом фиксированном представлении сопоставим функции f плюрисубгармоническую функцию

$$u_f = \log(|g_0|^2 + |h_0|^2)^{1/2}. \quad (10)$$

Введение в рассмотрение такой функции обусловлено, в частности, тем, что через u_f определяется характеристика Неванлинны (в форме Симицзу–Альфorsa) [8].

ТЕОРЕМА 3. Пусть f – мероморфная, а M – непрерывная действительная в $\mathbb{C}^n$, $n \geq 1$, функции. Если функция f представляется в виде $f = g/h$, где g и h – целые функции из класса $E(M)$, взаимно простые в каждой точке из $\mathbb{C}^n$, то найдется постоянная C такая, что

$$\int u_f d\mu \leq \int M d\mu + C, \quad \mu \in \mathcal{M}_\delta. \quad (11)$$

Обратно, если выполнено (11), где постоянная C не зависит от $\mu \in \mathcal{M}_\delta$, то существуют целые функции g и h из класса $E(M_\sigma)$, взаимно простые в каждой точке из $\mathbb{C}^n$ такие, что $f = g/h$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполнена посылка первого утверждения теоремы. Тогда $f = g/h = g_0/h_0$, т.е. $gh_0 = g_0h$. Из этого равенства в силу взаимной простоты пары g, h и пары g_0, h_0 в каждой точке и в силу факториальности кольца ростков в каждой точке [6] из известных алгебраических фактов следует, что g и h делятся соответственно на g_0 и h_0 и наоборот (в кольце всех целых функций). Таким образом, $g/g_0 = h/h_0 = \psi$ – целая функция, как и $1/\psi = g_0/g = h_0/h$. Следовательно, ψ – целая функция, не обращающаяся в нуль ни в одной точке из $\mathbb{C}^n$. При этом

$$g = g_0\psi \in E(M), \quad h = h_0\psi \in E(M).$$

Отсюда ввиду (10) имеем оценку

$$\begin{aligned} u_f + \log |\psi| &= \log(|g_0\psi|^2 + |h_0\psi|^2)^{1/2} \\ &\leq \frac{1}{2} \log 2 + \max\{\log |g|, \log |h|\} \leq \frac{1}{2} \log 2 + M \end{aligned}$$

всюду на $\mathbb{C}^n$. Учитывая плюрисубгармоничность функции u_f и то, что $\log |\psi| \in PH(\mathbb{C}^n)$, из первого утверждения основной теоремы получаем для некоторой постоянной C_1

$$\begin{aligned} \int u_f d\mu &\leq \int \left(M + \frac{1}{2} \log 2 \right) d\mu + C_1 \\ &= \int M d\mu + \left(\frac{1}{2} \log 2 + C_1 \right), \quad \mu \in \mathcal{M}_\delta, \end{aligned}$$

где при последнем переходе использовано равенство $\mu(\mathbb{C}^n) = 1$ для $\mu \in \mathcal{M}_\delta$. Таким образом, при $C = (\log 2)/2 + C_1$ получено (11).

Обратно, если выполнено (11), то по второму утверждению основной теоремы найдется функция $h_1 \in PH(\mathbb{C}^n)$, а значит и целая функция ψ , не обращающаяся в нуль в $\mathbb{C}^n$, такие, что

$$u_f + h_1 = u_f + \log |\psi| = \log(|g_0\psi|^2 + |h_0\psi|^2)^{1/2} \leq M_\sigma$$

на $\mathbb{C}^n$. Остается положить $g = g_0\psi$, $h = h_0\psi$, и теорема доказана.

Заключительное замечание. Полученные в статье результаты предполагается применить для исследования взаимосвязи между множествами неединственности и нулевыми множествами различных более конкретных классов целых функций и к вопросам представления мероморфных функций в виде отношения целых функций из классов $E(M)$ со специальными мажорантами M . Обобщение изложенных здесь схем на классы голоморфных функций в области $G \subset \mathbb{C}^n$, выделяемые ограничениями на рост вблизи границы G , требует более глубокой проработки и будет изложено в ином месте.

Башкирский государственный университет

Поступило

22.12.94

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Хабибуллин Б. Н. Множества единственности в пространствах целых функций одной переменной // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1991. Т. 55. № 5. С. 1101–1123.
- [2] Хабибуллин Б. Н. Наименьшая плюрисупергармоническая мажоранта и мультипликаторы целых функций // Сиб. матем. ж. 1992. Т. 33. № 1. С. 173–178.
- [3] Хабибуллин Б. Н. Теорема о наименьшей мажоранте и ее применения. 1. Целые и мероморфные функции // Изв. РАН. Сер. матем. 1993. Т. 57. № 1. С. 129–146.
- [4] Акилов Г. П., Кутателадзе С. С. Упорядоченные векторные пространства. Новосибирск: Наука, 1978.
- [5] Брело М. Основы классической теории потенциала. М.: Мир, 1964.
- [6] Хермандер Л. Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных. М.: Мир, 1968.
- [7] Гольдберг А. А. О представлении мероморфной функции в виде частного целых функций // Изв. вузов. Матем. 1972. № 10. С. 13–17.
- [8] Scoda H. Solution a croissance du second problème de Cousin dans $\mathbb{C}^n$ // Ann. Inst. Fourier. 1971. V. 21. № 1. P. 11–23.