Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Чельцов, Особенности трехмерных многообразий, обладающих обильным эффективным дивизором – гладкой поверхностью кодаировой разности нуль, *Матем. заметки*, 1996, том 59, выпуск 4, 618–626

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1755>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 03:14:38

ОСОБЕННОСТИ ТРЕХМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЙ, ОБЛАДАЮЩИХ ОБИЛЬНЫМ ЭФФЕКТИВНЫМ ДИВИЗОРОМ – ГЛАДКОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ КОДАИРОВОЙ РАЗМЕРНОСТИ НУЛЬ

И. А. Чельцов

Введение. В работах [1]–[4] Фано изучал трехмерные многообразия в проективных пространствах с гиперплоскими сечениями – минимальной поверхностью типа К3 и поверхностью Энриквеса. Эти исследования были продолжены в [5]–[11].

Заметим, что если Y – гладкая минимальная алгебраическая поверхность, то следующие условия эквивалентны:

- (1) $\kappa(Y) = 0$;
- (2) $K_Y \equiv 0$;
- (3) $12K_Y \sim 0$;
- (4) Y принадлежит одному из следующих типов:
 - а) абелево многообразие, $h^1(\mathcal{O}_Y) = 2$, $h^2(\mathcal{O}_Y) = 1$, $K_Y \sim 0$;
 - б) поверхность типа К3, $h^1(\mathcal{O}_Y) = 0$, $h^2(\mathcal{O}_Y) = 1$, $K_Y \sim 0$;
 - в) поверхность Энриквеса, $h^1(\mathcal{O}_Y) = 0$, $h^2(\mathcal{O}_Y) = 0$, $2K_Y \sim 0$;
 - г) биэллиптическая поверхность, $h^1(\mathcal{O}_Y) = 1$, $h^2(\mathcal{O}_Y) = 0$, $12K_Y \sim 0$.

См., например, [12].

Поэтому естественно рассматривать более общую задачу изучения свойств трехмерных многообразий, обладающих обильным дивизором – минимальной гладкой поверхностью кодаировой размерности нуль. Оказывается, что за исключением случая, когда обильный дивизор – поверхность типа К3, все такие многообразия имеют особенности.

Если допускать особенности, то все конуса над соответствующими поверхностями являются простейшими примерами таких многообразий.

Работа выполнена при частичной поддержке Международного научного фонда, грант М90 000.

Более того, назовем многообразие X , содержащее обильный эффективный неприводимый приведенный дивизор Картье H , *обобщенным конусом над H* , если X является стягиванием исключительного сечения $\mathbb{P}(\mathcal{O}_H \oplus \mathcal{O}_H(H|_H))$. По определению обобщенный конус над любым многообразием содержит это многообразие в качестве обильного эффективного неприводимого приведенного дивизора Картье.

Основным результатом этой работы является теорема 5.1 (см. § 5).

Принимая во внимание результаты, доказанные в [13] и [14], классификация многообразий с обильным эффективным дивизором Картье, являющимся поверхностью типа КЗ или поверхностью Энрикеса, практически эквивалентна проблеме классификации многообразий Фано с каноническими изолированными особенностями целого индекса Фано.

Все многообразия считаются определенными над $\mathbb{C}$. Основные определения, обозначения и понятия содержатся в [15].

Автор очень признателен В. А. Исковских и Ю. Г. Прохорову за ценные советы, обсуждения и плодотворные беседы.

1. Изолированность особенностей.

1.1. ЛЕММА. Пусть H – обильный эффективный дивизор Картье на нормальном многообразии X . Если H – гладкий, то $\text{Sing}(X) \cap H = \emptyset$ и особенности X изолированы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть в $\text{Sing}(X)$ содержится кривая. Так как H обилён, имеем $\text{Sing}(X) \cap H \neq \emptyset$. Но H – дивизор Картье. Следовательно, $\text{Sing}(H) \neq \emptyset$.

1.2. СЛЕДСТВИЕ. Пусть H – обильный эффективный дивизор Картье на нормальном трехмерном многообразии X , H – гладкая минимальная поверхность с $\kappa(H) = 0$. Если $\text{Sing}(X) = \emptyset$, то X – многообразие Фано и H – поверхность типа КЗ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\text{Sing}(X) = \emptyset$, то по формуле присоединения имеем $12(K_X + H)|_H \sim 0$, и по теореме Лефшеца о гиперплоских сечениях получаем $(K_X + H) \equiv 0$. По критерию обильности Клеймана $-K_X$ обилён, т.е. X – многообразие Фано, и, следовательно, $\text{Pic}^0(X) = 0$ и $\text{Pic}(X)$ не содержит кручений (см., например, [7]). Поэтому $K_X + H \sim 0$ и H – поверхность типа КЗ (см., например, [7]).

2. $\mathbb{Q}$ -горенштейновость.

2.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $D = \sum n_E E$ – дивизор Вейля на нормальном многообразии X . Пучок $\mathcal{O}_X(D)$ определяется следующим образом:

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_X(D)) = \{f \in \text{Rat}(X); v_E(f) + n_E \geq 0 \forall E \in U, \text{codim } E = 1\}.$$

Под $v_E(f)$ подразумевается порядок f в E .

2.2. ЛЕММА. Пусть D – дивизор Вейля на нормальном многообразии X . Тогда $\mathcal{O}_X(D)$ – рефлексивный пучок ранга один.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [16, proposition 1.6].

2.3. ЛЕММА. Пусть $\mathcal{G}$ – рефлексивный пучок на многообразии X . Тогда существует точная последовательность

$$0 \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0,$$

где $\mathcal{E}$ локально свободен, а $\mathcal{F}$ – подпучок локально свободного пучка.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произвольную локально свободную резольвенту для $\mathcal{G}^*$:

$$\mathcal{J} \rightarrow \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{G}^* \rightarrow 0.$$

Двойственной к ней будет

$$0 \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{I}^* \rightarrow \mathcal{F}^*.$$

Она будет точна в первых двух членах. Фактор $\mathcal{I}^*$ по $\mathcal{G}$ вкладывается в $\mathcal{F}^*$.

2.4. ЛЕММА. Пусть X – нормальное многообразие, H – обильный дивизор на X , $\mathcal{G}$ – рефлексивный пучок на X . Тогда $H^1(\mathcal{G} \otimes \mathcal{O}_X(-nH)) = 0$ для $n \gg 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим часть точной последовательности когомологий, ассоциированной с точной последовательностью из леммы 2.3:

$$H^0(\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_X(-nH)) \rightarrow H^1(\mathcal{G} \otimes \mathcal{O}_X(-nH)) \rightarrow H^1(\mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_X(-nH)).$$

Нужное равенство следует из того, что $H^0(\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_X(-nH)) = 0$ для $n \gg 0$, так как $\mathcal{F}$ – подпучок локально свободного пучка, и $H^1(\mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_X(-nH)) = 0$ для $n \gg 0$, поскольку X – нормально.

2.5. ЛЕММА. Пусть X – нормальное многообразие с изолированными особенностями, D – дивизор Вейля на X , H – обильный дивизор Картье на X . Если $D|_Y \sim 0$ для гладкого $Y \in |nH|$ и $n \gg 0$, то $D \sim 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим последовательность:

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X(D) \otimes \mathcal{O}_X(-nH) \rightarrow \mathcal{O}_X(D) \rightarrow \mathcal{O}_Y \rightarrow 0.$$

Она точна, так как в окрестности Y все эти пучки локально свободны, а вне Y последовательность тривиальна.

Имеем $H^0(\mathcal{O}_X(D) \otimes \mathcal{O}_X(-nH)) = 0$ для $n \gg 0$, так как $\mathcal{O}_X(D)$ – подпучок локально свободного пучка. $H^1(\mathcal{O}_X(D) \otimes \mathcal{O}_X(-nH)) = 0$ по лемме 2.4. $H^0(\mathcal{O}_Y) = \mathbb{C}$, поскольку Y связно. Следовательно, $H^0(\mathcal{O}_X(D)) = \mathbb{C}$, т.е. линейная система дивизоров Вейля $|D|$ содержит эффективный дивизор, значит $D \sim 0$.

2.6. ЛЕММА. Пусть D – дивизор Вейля и H – обильный гладкий эффективный дивизор Картэ на нормальном многообразии X . Если $D|_H \sim 0$, тогда $D|_Y \sim 0$ для общего $Y \in |nH|$ и $n \gg 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем следующие обозначения: $C = Y \cap H = nH|_H = H|_Y$ – неприводимая гладкая кривая; $f: X_{\text{гл}} \rightarrow X$ – разрешение особенностей X такое, что f – изоморфизм вне $\text{Sing}(X)$; $\hat{H} = f^{-1}(H) = f^*(H)$; $\hat{Y} = f^{-1}(Y) = f^*(Y)$. Тогда $D|_Y H|_Y = D|_H nH|_H = DC = 0$, а так как дивизор H обилен на Y , то по теореме Ходжа об индексе $D|_Y D|_Y < 0$ либо $D|_Y \equiv 0$. Заметим, что вообще $\text{Sing}(X) \cap Y = \emptyset$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} D|_Y D|_Y &= f^{-1}(D)|_{\hat{Y}} f^{-1}(D)|_{\hat{Y}} = n f^{-1}(D)|_{\hat{H}} f^{-1}(D)|_{\hat{H}} \\ &= n D|_H D|_H = 0. \end{aligned}$$

Суммируя, получим $D|_Y \equiv 0$, $D|_C \sim 0$.

Рассмотрим точную последовательность пучков и первые члены ассоциированной с ней последовательности когомологий:

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow \mathcal{O}_Y(D|_Y - H|_Y) \rightarrow \mathcal{O}_Y(D|_Y) \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow 0, \\ 0 &\rightarrow H^0(\mathcal{O}_Y(D|_Y)) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_C) \rightarrow H^1(\mathcal{O}_Y(D|_Y - H|_Y)). \end{aligned}$$

По критерию обильности Клеймана дивизор $(H - D)|_Y$ обилен на Y , и, следовательно, $h^1(\mathcal{O}_Y((D - H)|_Y)) = 0$ по теореме об обращении в нуль (см., например, [15, теорема 1-2-5]). Кривая C связна и из $h^0(\mathcal{O}_C) = 1$ следует $h^0(\mathcal{O}_Y(D|_Y)) = 1$, что влечет $D|_Y \sim 0$.

2.7. ТЕОРЕМА. Пусть H – обильный эффективный дивизор Картэ на нормальном трехмерном многообразии X , H – гладкая минимальная поверхность с $\chi(H) = 0$. Тогда X – $\mathbb{Q}$ -горенштейново и $-K_X \sim_{\mathbb{Q}} H$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как X нормально, то K_X определен как дивизор Вейля. Поскольку $\text{Sing}(X) \cap H = \emptyset$, то для дивизора H верна формула присоединения:

$$12(K_X + H)|_H \sim 0.$$

По лемме 2.6 и лемме 2.5 получаем $12(K_X + H) \sim 0$.

2.8. ЗАМЕЧАНИЕ. В условиях теоремы 2.7 возможны следующие варианты:

- (1) H – абелево многообразие, X – горенштейново;
- (2) H – поверхность типа КЗ, X – горенштейново;
- (3) H – поверхность Энрикеса, X – 2-горенштейново;
- (4) H – биэллиптическая поверхность, X – 12-горенштейново.

3. Терминальная модификация.

3.1. ЛЕММА. Пусть X – нормальное трехмерное многообразие. Существует бирациональный морфизм $f: X_{\text{терм}} \rightarrow X$ такой, что $X_{\text{терм}}$ имеет терминальные $\mathbb{Q}$ -факториальные особенности и $K_{X_{\text{терм}}}$ f -численно эффективен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См., например, [17].

3.2. ЛЕММА. В условиях леммы 3.1 если X – $\mathbb{Q}$ -горенштейново, то $K_{X_{\text{терм}}} \sim_{\mathbb{Q}} f^*(K_X) - B$, где B – эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См., например, [18, proposition 2.18].

3.3. ЗАМЕЧАНИЕ. В условиях леммы 3.2 возможны следующие варианты:

- (1) f – изоморфизм, X имеет терминальные $\mathbb{Q}$ -факториальные особенности;
- (2) f – изоморфизм в коразмерности один и $K_{X_{\text{терм}}} \sim_{\mathbb{Q}} f^*(K_X)$, X имеет терминальные особенности;
- (3) $K_{X_{\text{терм}}} \sim_{\mathbb{Q}} f^*(K_X)$, X имеет канонические особенности;
- (4) B – эффективный не нулевой $\mathbb{Q}$ -дивизор.

3.4. СЛЕДСТВИЕ. Если особенности X изолированные, то любой исключительный дивизор морфизма f стягивается им в точку.

4. Экстремальные лучи на $X_{\text{терм}}$. Пусть H – обильный эффективный дивизор Картье на нормальном трехмерном многообразии X , являющемся гладкой минимальной поверхностью с $\kappa(H) = 0$. Рассмотрим терминальную модификацию $f: X_{\text{терм}} \rightarrow X$. По лемме 1.1 $\text{Sing}(X) \cap H = \emptyset$ и можно обозначить $\hat{H} = f^{-1}(H) = f^*(H)$. По теореме 2.7 X – $\mathbb{Q}$ -горенштейново и $-K_X \sim_{\mathbb{Q}} H$. Тогда по лемме 3.2

$$K_{X_{\text{терм}}} \sim_{\mathbb{Q}} -\hat{H} - B.$$

Пусть особенности X не канонические. Тогда, по замечанию 3.3, B – эффективный не нулевой $\mathbb{Q}$ -дивизор, и $\mathbb{Q}$ -дивизор $K_{X_{\text{терм}}} + \hat{H} \sim_{\mathbb{Q}} -B$ не численно эффективен. Следовательно, существует одномерная грань $R \in \text{NE}(X)$ такая, что $-BR < 0$. Но $-BR = K_{X_{\text{терм}}}R + \hat{H}R$, а дивизор $\hat{H}$ численно эффективен. Следовательно, $K_{X_{\text{терм}}}R = \hat{H}R - BR < 0$, т.е. R – экстремальный луч в смысле Мори.

По [15, теорема 3-2-1] существует морфизм $g: X_{\text{терм}} \rightarrow Y$ на нормальное многообразие Y такой, что $-K_{X_{\text{терм}}}$ – g -обилен и для любой кривой $C \in X_{\text{терм}}$ $g(C)$ – точка $\iff C \in R$.

4.1. ЛЕММА. Для любой кривой $C \in R$ $K_{X_{\text{терм}}}C < -1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $\hat{H}C > 0$ для любой кривой $C \in R$, так как иначе из равенства $\hat{H}C = 0$ следует, что $f(C)$ – точка и $K_{X_{\text{терм}}}R \geq 0$, поскольку $K_{X_{\text{терм}}}$ f -численно эффективен, но $K_{X_{\text{терм}}}R < 0$. Вспоминая, что $\hat{H}$ – дивизор Картье, получаем $\hat{H}C \geq 1$ и $K_{X_{\text{терм}}}C = -\hat{H}C - BC < -1$.

4.2. ЗАМЕЧАНИЕ. Имеются следующие возможности:

- (1) морфизм g стягивает кривую в точку (малое стягивание);
- (2) морфизм g стягивает дивизор на кривую;
- (3) морфизм g стягивает дивизор в точку;
- (4) размерность $Y = 2$;
- (5) размерность $Y = 1$.

4.3. ЛЕММА. Пусть $g: X \rightarrow Y$ – бирациональное стягивание экстремального луча на трехмерном многообразии с $\mathbb{Q}$ -факториальными терминальными особенностями. Если для некоторой точки $x \in Y$ $g^{-1}(x)$ есть кривая, то $K_X g^{-1}(x) \geq -1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См., например, [17, (2.3.2)].

4.4. ЛЕММА. Случаи 4.2 (1) и 4.2 (2) невозможны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in Y$ такая, что $\dim(g^{-1}(x)) > 0$. По лемме 4.3 $K_X g^{-1}(x) \geq -1$, а по лемме 4.1 $K_X g^{-1}(x) < -1$.

4.5. ЛЕММА. Случай 4.2 (3) невозможен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть g стягивает дивизор D в точку. Очевидно, D не лежит в слоях морфизма f , и $C = n\hat{H}|_D$ для достаточно большого n – эффективный 1-цикл на $X_{\text{терм}}$, который содержится в R , но $BC = 0$.

4.6. ЛЕММА. Случай 4.2 (5) невозможен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем любой эффективный неприводимый дивизор E , стягиваемый морфизмом f в точку. Пусть l – любая кривая, лежащая в слое морфизма $g|_E$. Имеем $K_{X_{\text{терм}}}l \geq 0$, так как $K_{X_{\text{терм}}}$ f -численно эффективен, но $l \in R$ и $K_{X_{\text{терм}}}l < 0$.

4.7. ЛЕММА. В случае 4.2 (4) морфизм g есть $\mathbb{P}^1$ -расслоение над H .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть C – общий слой морфизма g . Тогда

$$2 = -K_{X_{\text{терм}}}C = \hat{H}C + BC, \quad \hat{H}C \geq 1, \quad BC > 0.$$

Отсюда $\hat{H}C = 1$, $BC = 1$ и, следовательно, у морфизма g нет кратных и приводимых слоев, а морфизм $g|_{\hat{H}}: \hat{H} \rightarrow Y$ бирационален. $\hat{H}$ не содержит слоев, так как $BC = 1$ и $\hat{H}$ не пересекается с B . Учитывая, что Y – нормальное многообразие, получаем, что $g|_{\hat{H}}$ – изоморфизм.

Особенности $X_{\text{терм}}$ – рациональные (см., например, [15, теорема 1-3-6]). Следовательно (см., например, [19, (3.19)]), $X_{\text{терм}}$ является многообразием Коэна–Маколея. Так как все слои g имеют одинаковую размерность и Y – гладкое, то морфизм g – плоский. Общий слой g есть $\mathbb{P}^1$, следовательно, каждый слой есть $\mathbb{P}^1$ и $X_{\text{терм}}$ есть $\mathbb{P}^1$ -расслоение над Y .

5. Основная теорема..

5.1. ТЕОРЕМА. Пусть X – нормальное трехмерное многообразие и H – обильный эффективный дивизор Картье на X , являющийся гладкой минимальной поверхностью с размерностью Кодaira нуль. Тогда либо X – обобщенный конус над H , либо X имеет канонические особенности и H – поверхность типа КЗ или поверхность Энриквеса.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что особенности X не канонические. По леммам 4.4–4.7 получаем, что $X_{\text{терм}}$ есть $\mathbb{P}^1$ -расслоение над H с сечением $\hat{H}$.

Применяя g_* к точной последовательности пучков

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{X_{\text{терм}}} \rightarrow \mathcal{O}_{X_{\text{терм}}}(\hat{H}) \rightarrow \mathcal{O}_{\hat{H}}(\hat{H}|_{\hat{H}}) \rightarrow 0$$

и учитывая, что $R^0 g_*(\mathcal{O}_{X_{\text{терм}}}) = \mathcal{O}_Y$, так как g – стягивание экстремального луча, а также $R^1 g_*(\mathcal{O}_{X_{\text{терм}}}) = 0$ по теореме об обращении в нуль, получаем точную последовательность

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_Y \rightarrow R^0 g_*(\mathcal{O}_{X_{\text{терм}}}(\hat{H})) \rightarrow R^0 g_*(\mathcal{O}_{\hat{H}}(\hat{H}|_{\hat{H}})) \rightarrow 0. (*)$$

Отображение $g|_{\hat{H}}: \hat{H} \rightarrow Y$ есть изоморфизм. Следовательно, $R^0 g_*(\mathcal{O}_{X_{\text{терм}}}(\hat{H}))$ – локально свободный пучок ранга 2.

Из коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 \rightarrow & \mathcal{O}_{X_{\text{терм}}} & \rightarrow & \mathcal{O}_{X_{\text{терм}}}(\hat{H}) & \rightarrow & \mathcal{O}_{\hat{H}}(\hat{H}|_{\hat{H}}) & \rightarrow 0 \\ & \uparrow & & \uparrow \alpha & & \uparrow & \\ & g^* g_* \mathcal{O}_{X_{\text{терм}}} & \rightarrow & g^* g_* \mathcal{O}_{X_{\text{терм}}}(\hat{H}) & \rightarrow & g^* g_* \mathcal{O}_{\hat{H}}(\hat{H}|_{\hat{H}}) & \rightarrow 0 \\ & \uparrow & & & & & \\ & 0 & & & & & \end{array}$$

следует, что отображение $\alpha: g^* g_* \mathcal{O}_{X_{\text{терм}}}(\hat{H}) \rightarrow \mathcal{O}_{X_{\text{терм}}}(\hat{H})$ сюръективно и задает морфизм $\mathcal{A}: X_{\text{терм}} \rightarrow \mathbb{P}(g_* \mathcal{O}_{X_{\text{терм}}}(\hat{H}))$ над Y . Так как $\hat{H}$ g -обилен и является сечением морфизма g , то $\mathcal{A}$ – конечный бирациональный морфизм, который вследствие нормальности $\mathbb{P}(g_* \mathcal{O}_{X_{\text{терм}}}(\hat{H}))$ является изоморфизмом.

Последовательность $(*)$ расщепляется, так как

$$\mathrm{Ext}^1(R^0 g_* (\mathcal{O}_{\hat{H}}(\hat{H}|_{\hat{H}})), \mathcal{O}_Y) = \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_{\hat{H}}(\hat{H}|_{\hat{H}}), \mathcal{O}_{\hat{H}}) = H^1(\mathcal{O}_{\hat{H}}(-\hat{H}|_{\hat{H}})),$$

но $H^1(\mathcal{O}_{\hat{H}}(-\hat{H}|_{\hat{H}})) = 0$, по теореме об обращении в нуль. Следовательно,

$$R^0 g_* \mathcal{O}_{X_{\mathrm{терм}}}(\hat{H}) \cong \mathcal{O}_Y \oplus R^0 g_* (\mathcal{O}_{\hat{H}}(\hat{H})),$$

и, так как $Y \cong \hat{H} \cong H$, получаем

$$X_{\mathrm{терм}} \cong \mathbb{P}(\mathcal{O}_H \oplus \mathcal{O}_H(H|_H)),$$

и X является стягиванием исключительного сечения $\mathbb{P}(\mathcal{O}_H \oplus \mathcal{O}_H(H|_H))$, т.е. обобщенным конусом.

Предположим, что особенности X – канонические. Рассмотрим точную последовательность пучков и ассоциированную с ней последовательность когомологий:

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathcal{O}_X(-H) \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_H \rightarrow 0, \\ H^1(\mathcal{O}_X) \rightarrow H^1(\mathcal{O}_H) \rightarrow H^2(\mathcal{O}_X(-H)). \end{aligned}$$

Как следствие теоремы об обращении в нуль, рациональности особенностей X и двойственности Серра получаем:

$$H^1(\mathcal{O}_X) = H^2(\mathcal{O}_X(-H)) = 0.$$

Следовательно, $H^1(\mathcal{O}_H) = 0$ и H – либо поверхность Энриквеса либо поверхность типа К3 (ср. [13, предл. 2.2 и 3.3]).

5.2. СЛЕДСТВИЕ. Пусть X – нормальное трехмерное многообразие и H – обильный гладкий эффективный дивизор Картье, являющийся абелевым многообразием или биэллиптической поверхностью. Тогда X – обобщенный конус над H .

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: ivan@cheltsov.msk.ru

Поступило
14.02.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Fano G. Sopra alcune varietà algebriche a tre dimensioni aventi tutti i generi nulli // Atti Congresso Bologna. 1931. V. 4. P. 115–119.
- [2] Fano G. Sulle varietà algebriche a tre dimensioni a curve-sezioni canoniche // Mem. Acc. It. 1937. V. 8. P. 813–818.
- [3] Fano G. Nuove ricerche sulle varietà algebriche a tre dimensioni a curve-sezioni canoniche // Comm. Dont. Ac. Sci. 1947. V. 11. P. 635–720.
- [4] Fano G. Sulle varietà algebriche a tre dimensionale le cui sezioni iperpiane sono superfici di genere zero e bigenere uno. // Mem. Soc. It. d. Scienze. 1938. V. 24. P. 44–66.
- [5] Исковских В. А. Трехмерные многообразия Фано. I // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1977. Т. 41. С. 516–562.
- [6] Исковских В. А. Трехмерные многообразия Фано. II // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1978. Т. 42. С. 504–549.
- [7] Исковских В. А. Лекции по трехмерным алгебраическим многообразиям. Многообразиям Фано. Препринт. М.: МГУ, 1988.
- [8] Mori S., Mukai S. Classification of Fano 3-folds with $b_2 \geq 2$ // Manuscripta Math. 1981. V. 36. P. 147–162.
- [9] Mori S., Mukai S. On Fano 3-folds with $b_2 \geq 2$ // Adv. Stud. Pure Math. 1983. V. 1. P. 101–129.
- [10] Mori S., Mukai S. Classification of Fano 3-folds with $b_2 \geq 2$. I // Algebraic and Topological Theories. 1985. P. 496–548.
- [11] Conte A., Murre J. P. Algebraic varieties of dimension three whose hyperplane sections are Enriques surfaces // Ann. Scuola Norm. Sup. de Pisa. 1985. V. 12. P. 43–80.
- [12] Beauville A. Surfaces Algebriques Complexes. V. 54: Asterisque.
- [13] Прохоров Ю. Г. Заметки о трехмерных многообразиях с гиперплоскими сечениями – поверхностями Энрикьеса. Препринт. М.: МГУ, 1994.
- [14] Reid M. Projective morphism according to Kawamata. Preprint: University of Warwick, 1983.
- [15] Kawamata Y., Matsuda K., Matsuki K. Introduction to the minimal model problem // Adv. Stud. Pure Math. 1987. V. 10. P. 283–360.
- [16] Hartshorne R. Stable reflexive sheaves // Math. Ann. 1980. V. 254. P. 121–176.
- [17] Mori S. Flip theorem and the existence of minimal models for 3-folds // J. Amer. Math. Soc. 1988. V. 1. P. 117–253.
- [18] Kollár J. et al. Flips and abundance for algebraic threefolds: Asterisque 1992. V. 211.
- [19] Reid M. Young person's guide to canonical singularities // Proc. Sympos. Pure Math. 1985. P. 345–414.