Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Белов, С. В. Конягин, Оценка свободного члена неотрицательного тригонометрического полинома с целыми коэффициентами, *Матем. заметки*, 1996, том 59, выпуск 4, 627–629

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1756>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 16:47:37

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ОЦЕНКА СВОБОДНОГО ЧЛЕНА НЕОТРИЦАТЕЛЬНОГО ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОГО ПОЛИНОМА С ЦЕЛЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

А. С. Белов, С. В. Конягин

Последовательность положительных действительных чисел $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется *приемлемой*, если она удовлетворяет условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} < \infty$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{x}{\lambda_n}\right) \geq 0$$

при всех $x \geq 0$. Если же, кроме того, выполнено условие

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{x}{\lambda_n}\right) > 0$$

при всех $x > 0$, то последовательность Λ будем называть *строго приемлемой*.

Это определение введено одним из авторов в работе [1]. Цель этой статьи состоит в изучении приемлемых последовательностей и их применении к оценке свободного члена неотрицательного тригонометрического полинома с целыми коэффициентами.

ТЕОРЕМА 1. *Справедливы следующие утверждения.*

- 1) При всех $q \in (1, 2]$ последовательность $\{n^q\}_{n=1}^{\infty}$ является строго приемлемой. Более того, для любого $x \geq 1/2$ верна оценка

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi x}{n^q}\right) > \frac{x^{1/q}}{20(1-1/q)}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Международного научного фонда, грант МС5300. Кроме того, работа второго автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 93-01-00240.

2) При $\beta \geq 2^{14}$ последовательность

$$\{1\} \cup \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{p \leq \beta j^2} \left\{ \frac{2^j p}{2i+1} \right\}_{i=0}^{p(1+\lfloor \ln j \rfloor)-1},$$

где p пробегает нечетные простые числа, а квадратные скобки обозначают целую часть, является строго приемлемой.

3) Последовательность положительных чисел $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$, для которой $\inf\{\lambda_{n+1}/\lambda_n : n \geq 1\} > 1$, не является приемлемой.

Для каждого действительного числа t через $\varphi_{\Lambda}(t)$ будем обозначать число членов последовательности Λ , не превосходящих t . Определим функцию

$$\Phi(v) = \inf \left\{ v \int_v^{\infty} \frac{\varphi_{\Lambda}(t)}{t^2} dt : \Lambda - \text{приемлемая}, \min \Lambda = 1 \right\}, \quad v > 0.$$

Функция Φ положительна, строго возрастает и вогнута на $(0, \infty)$.

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $M_Z^{\downarrow}(n) = \min a_0$, где минимум берется по всем натуральным числам $a_1, \dots, a_n$ таким, что $a_1 \geq \dots \geq a_n$ и

$$\sum_{k=0}^n a_k \cos(kx) \geq 0$$

при всех x . Обозначим $K_Z^{\downarrow}(n) = \inf \alpha_0$, где нижняя грань берется по всем целым неотрицательным числам $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ таким, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = n, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \cos(kx) \geq 0$$

при всех x и $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots$. Если последнее условие опустить, то получим определение величины $K_Z(n)$. Ясно, что $K_Z(n) \leq K_Z^{\downarrow}(n)$.

Одлыжко [2] при $n \geq 2$ получил оценку $K_Z(n) = O(n^{1/3}(\ln n)^{1/3})$. Колунтаз-кис [3] несколько улучшил ее, показав, что логарифмический множитель в ней можно отбросить. Один из авторов [4] при всех $n \geq 3$ доказал оценки

$$K_Z^{\downarrow}(n) \leq 88 \exp(\sqrt{2 \ln n \ln \ln n}), \quad M_Z^{\downarrow}(n) \leq 8 \exp(\sqrt{2 \ln n \ln \ln n}).$$

Связь между величинами $M_Z^{\downarrow}(n)$, $K_Z(n)$ и $\Phi(n)$ дает следующий результат.

ТЕОРЕМА 2. При всех натуральных n верны оценки:

$$\frac{1}{120} \Phi(n) \leq M_Z^{\downarrow}(n) \leq \frac{11}{5} \Phi(n),$$

$$\frac{1}{120} \Phi\left(\frac{n}{7\Phi(n)}\right) \leq K_Z^{\downarrow}(n) \leq \frac{16}{5} \Phi(n).$$

Из теоремы 2 и утверждения 2) теоремы 1 при $n \geq 2$ вытекают неравенства

$$K_Z^{\downarrow}(n) \ll M_Z^{\downarrow}(n) \ll \Phi(n) \ll (\ln n)^5.$$

Использование случайных приемлемых последовательностей позволяет улучшить последнюю оценку.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность независимых равномерно распределенных на $(0, 1)$ случайных величин. Тогда

- 1) есть такая постоянная $c > 0$, что если $q > 1$, $\lambda > cq^3$, то последовательность $\{(n + \lambda - 1)^q / \xi_n\}$ является строго приемлемой с вероятностью большей, чем $1/2$;
- 2) есть такая постоянная $\nu_0 > 1$, что для всех $\nu \in (1, \nu_0]$ последовательность $\{\nu^{(n-1)^{1/3}} / \xi_n\}$ является строго приемлемой с вероятностью большей, чем $1/2$.

Основной в данной заметке является

ТЕОРЕМА 4. Для всех $x \geq 3$ справедливы оценки

$$\ln^2 x / \ln \ln x \ll \Phi(x) \ll \ln^3 x.$$

Верхнюю оценку в теореме 4 дает любое из утверждений 1), 2) теоремы 3. Нижняя оценка основана на развитии идей, изложенных в [5].

СЛЕДСТВИЕ 1. Для всех $n \geq 3$ справедливы оценки

$$\ln^2 n / \ln \ln n \ll K_Z^\downarrow(n) \ll M_Z^\downarrow(n) \ll \ln^3 n.$$

Известно, что величина $K_Z(n)$ связана со следующей задачей Эрдеша и Секе-реша [6]: оценить величину

$$f(n) = \inf \left\{ \max_t \left| \prod_{j=1}^n (1 - e^{itk_j}) \right| : k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N} \right\},$$

где внутренний максимум берется по всем действительным t , а n – любое натуральное число; при этом числа $k_1, \dots, k_n$ не предполагаются различными. Эта связь заключается в оценке (см. [2]) $\ln f(n) < K_Z(n)(1 + \ln n)$. Отсюда и из следствия 1 немедленно вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2. При $n \geq 2$ справедлива оценка $\ln f(n) \ll \ln^4 n$.

Ивановский государственный университет
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: kon@nw.math.msu.su

Поступило
11.09.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белов А. С. // Конструктивная теория функций и ее приложения. Тезисы докл. и сообщ. Махачкала, 1994. С. 17–19. 2. Odlyzko A. M. // J. London Math. Soc. 1982. V. 26. № 3. P. 412–420. 3. Kolountzakis M. N. // Proc. Amer. Math. Soc. 1984. V. 120. № 1. P. 157–163. 4. Белов А. С. // Международная конф. “Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ”, посвященная 90-летию акад. С. М. Никольского. Тезисы докл. М., 1995. С. 40–41. 5. Белов А. С. // Матем. заметки. 1981. Т. 30. № 4. С. 501–515. 6. Erdős P., Szekeres G. // Acad. Serbe Sci. Publ. Inst. Math. 1959. V. 13. P. 29–34.