Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Рыжиков, Типичность изоморфизма сохраняющих меру преобразований при изоморфизме их декартовых степеней, *Матем. заметки*, 1996, том 59, выпуск 4, 630–632

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1757>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 10:24:28

ТИПИЧНОСТЬ ИЗОМОРФИЗМА СОХРАНЯЮЩИХ МЕРУ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПРИ ИЗОМОРФИЗМЕ ИХ ДЕКАРТОВЫХ СТЕПЕНЕЙ

В. В. Рыжиков

А. М. Стёпин (со ссылкой на Ж.-П. Туveno) обратил внимание автора на следующую задачу из эргодической теории. Пусть S и T – сохраняющие меру обратимые преобразования вероятностного пространства Лебега (X, μ) и известно, что их декартовы квадраты $S \times S$ и $T \times T$ метрически изоморфны. Последнее означает, что для некоторого Φ , сохраняющего меру $\mu \times \mu$ обратимого преобразования $X \times X$, выполнено

$$\Phi(S \times S)\Phi^{-1} = T \times T.$$

Будут ли изоморфны S и T ?

Можно поставить также аналогичную задачу при условии изоморфизма декартовых степеней порядка $d > 2$. В связи с этим возникает следующее понятие.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Говорим, что преобразование T является d -стабильным, $d > 1$, если для любого S изоморфизм $S \times \dots \times S$ и $T \times \dots \times T$ (d сомножителей) влечет изоморфизм S и T .

В заметке доказывается следующая

ТЕОРЕМА. В группе $\text{Aut}(\mu)$ всех сохраняющих меру преобразований (X, μ) свойство d -стабильности есть типичное свойство.

Напомним, что свойство преобразования называется *типичным*, если множество преобразований, удовлетворяющих этому свойству, есть множество второй категории относительно (метризуемой) топологии слабой сходимости в $\text{Aut}(\mu)$. Следующие примеры типичных свойств установлены Рохлиным и Халмошем. Будем обозначать одним и тем же символом T преобразование и унитарный оператор в $L_2(X, \mu)$, соответствующий этому преобразованию: $(Tf)(x) = f(Tx)$. (Такой оператор задает автоморфизм унитарного кольца.) Свойства

$$\exists r(i) \rightarrow \infty \quad T^{r(i)} \rightarrow E$$

и

$$\exists m(i) \rightarrow \infty \quad T^{m(i)} \rightarrow \Theta,$$

где E – тождественный оператор, а Θ – оператор ортопроекции на пространство констант $L_2(X, \mu)$, являются типичными.

В настоящей заметке существенно используется понятие κ -перемешивания – об этом инварианте динамических систем см. [1], [2]. Результат, которым мы будем пользоваться, доказан в [2] и формулируется следующим образом:

для любого $\kappa \in (0, 1)$ свойство κ -перемешивания

$$\exists n(i) \rightarrow \infty \quad T^{n(i)} \rightarrow (1 - \kappa)E + \kappa\Theta$$

является типичным свойством.

ЗАМЕЧАНИЕ. В работе [2] были предъявлены примеры κ -перемешивающих потоков для всех $\kappa \in (1/2, 1)$. Используя технику построения потоков с циклической аппроксимацией (потоков ранга 1), автор настоящей заметки построил примеры таких потоков для всех $\kappa \in (0, 1)$.

ЛЕММА. Пусть T — κ -перемешивающий автоморфизм, $0 < \kappa < 1$, и для автоморфизма S выполнено

$$\Phi(S \otimes \dots \otimes S)\Phi^{-1} = T \otimes \dots \otimes T,$$

где Φ — оператор, отвечающий преобразованию пространства $X \times \dots \times X$, сохраняющего меру $\mu \otimes \dots \otimes \mu$. Тогда S и T изоморфны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим подробно случай $d = 2$. При $d > 2$ рассуждения аналогичны. Пусть для оператора Φ , отвечающего автоморфизму $(X \times X, \mu \otimes \mu)$, выполнено равенство

$$\Phi(S \otimes S)\Phi^{-1} = T \otimes T.$$

Преобразование $T \times T$ обладает двумя координатными факторами, которые под действием Φ переходят в некоторые факторы преобразования $S \times S$. (Напомним, что фактором называется ограничение преобразования на инвариантную σ -подалгебру алгебры всех измеримых множеств.) Координатные алгебры образованы множествами вида $X \times A$ и множествами вида $A \times X$: им соответствуют пространства $\mathbf{1} \otimes L_2(X, \mu)$ и $L_2(X, \mu) \otimes \mathbf{1}$.

Наша цель — доказать, что Φ переводит координатную алгебру в координатную. Тем самым, очевидно, будет осуществлен изоморфизм между S и T . Для этого в нашем случае достаточно установить, что образ пространства $\mathbf{1} \otimes L_2(X, \mu)$ под действием Φ совпадает с пространством $\mathbf{1} \otimes L_2(X, \mu)$ или $L_2(X, \mu) \otimes \mathbf{1}$.

Пусть при $\kappa \in (0, 1)$ выполнено $T^{n(i)} \rightarrow (1 - \kappa)E + \kappa\Theta$. Докажем, что при выполнении условий леммы имеет место

$$S^{n(i)} \rightarrow (1 - \kappa)E + \kappa\Theta.$$

Имеем

$$\Phi(S \otimes S)^{n(i)}\Phi^{-1} \rightarrow ((1 - \kappa)E + \kappa\Theta) \otimes ((1 - \kappa)E + \kappa\Theta).$$

С другой стороны, для некоторой подпоследовательности $k(i')$ получим

$$(S \otimes S)^{k(i')} \rightarrow Q \otimes Q.$$

Учитывая, что $E \otimes E$ и $\Theta \otimes \Theta$ коммутируют с Φ , находим

$$Q \otimes Q = (1 - \kappa)^2(E \otimes E) + \kappa^2(\Theta \otimes \Theta) + \kappa(1 - \kappa)\Phi^{-1}((E \otimes \Theta) + (\Theta \otimes E))\Phi.$$

Таким образом, для любой неотрицательной функции $f \in L_2(X, \mu)$ выполнены неравенства

$$Qf \otimes Qf \geq (1 - \kappa)^2 f \otimes f, \quad Qf \otimes Qf \geq \kappa^2 \Theta f \otimes \Theta f.$$

Из неравенств вытекает, что

$$Qf \geq (1 - \kappa)f, \quad Qf \geq \kappa\Theta f,$$

следовательно, в силу произвольности положительной функции f получаем

$$Q = (1 - \kappa)E + \kappa\Theta.$$

Пусть $H \subset L_2(X, \mu)$ обозначает пространство функций с нулевым средним. Тогда имеет место разложение

$$L_2(X \times X, \mu \otimes \mu) = \{\text{Const}\} \oplus (H \otimes \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1} \otimes H) \oplus (H \otimes H),$$

где $\{\text{Const}\}$ обозначает пространство постоянных функций. Заметим, что

$$\Phi(H \otimes \mathbf{1}) \subseteq (H \otimes \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1} \otimes H). \quad (1)$$

Действительно, последовательность $(T \otimes T)^{n(i)}$ сходится на $(H \otimes 1)$ к оператору $(1 - \varkappa)(E \otimes E)$, следовательно, последовательность $(T \otimes T)^{n(i)} = \Phi(S \otimes S)^{n(i)} \Phi^{-1}$ сходится на $\Phi(H \otimes 1)$ также к оператору $(1 - \varkappa)(E \otimes E)$. Это возможно лишь в случае, когда выполнено (1), так как на $(H \otimes H)$ эти последовательности операторов сходятся к $(1 - \varkappa)^2(E \otimes E)$, но $(1 - \varkappa)^2 < (1 - \varkappa)$. Нам осталось лишь показать, что в действительности имеет место

$$\Phi(H \otimes 1) \subseteq (H \otimes 1) \quad \text{или} \quad \Phi(H \otimes 1) \subseteq (1 \otimes H). \quad (2)$$

Для любой ограниченной функции $f \in H$ существуют функции f_1 и f_2 такие, что

$$\Phi(f \otimes 1) = a(f_1 \otimes 1) + b(1 \otimes f_2). \quad (3)$$

Из того, что пространство $\Phi(L_2(X, \mu)) \otimes 1$ соответствует фактору и замкнуто относительно произведения ограниченных функций, вытекает

$$(\Phi(f \otimes 1))^2 \in (H \otimes 1) \oplus (1 \otimes H) \oplus \{\text{Const}\}. \quad (4)$$

Из (3) и (4) следует

$$ab(f_1 \otimes f_2) \in (H \otimes 1) \oplus (1 \otimes H) \oplus \{\text{Const}\},$$

поэтому $ab = 0$, или f_1 есть константа, или f_2 есть константа. Таким образом, мы показали, что

$$\Phi(H \otimes 1) \subset (H \otimes 1) \cup (1 \otimes H).$$

Так как $H \otimes 1$ и $1 \otimes H$ имеют нулевое пересечение а $\Phi(H \otimes 1)$ есть линейное пространство, получим (2). Пусть, например, имеет место $\Phi(H \otimes 1) \subseteq (H \otimes 1)$. Повторим рассуждения, поменяв местами S и T . Тогда получим $\Phi^{-1}(H \otimes 1) \subseteq (H \otimes 1)$. Эти включения вместе дают равенство $\Phi(H \otimes 1) = (H \otimes 1)$ и требуемый изоморфизм координатных факторов.

В общем случае аналогичные рассуждения приводят к

$$\Phi(f \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1) \in (H \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1) \oplus \dots \oplus (1 \otimes \dots \otimes 1 \otimes H)$$

и

$$(\Phi(f \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1))^2 \in (H \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1) \oplus \dots \oplus (1 \otimes \dots \otimes 1 \otimes H) \oplus \{\text{Const}\},$$

и, окончательно, к изоморфизму координатных факторов.

Теорема вытекает из леммы и типичности свойства $\varkappa$ -перемешивания.

В эргодической теории является открытым вопрос о типичности включения автоморфизма в поток. В связи с этим сформулируем следующую задачу. Оператор P на $L_2(X, \mu)$ называется *бистохастическим*, если $P1 = P^*1 = 1$ и операторы P, P^* являются *положительными* в том смысле, что они неотрицательные функции переводят в неотрицательные. (Операторы T, E и Θ являются бистохастическими.) На полугруппе положительных операторов задается порядок: $P > J$, если для любой положительной функции f выполнено $Pf > Jf$. Определим следующее свойство автоморфизма T : для любого бистохастического оператора P , коммутирующего с оператором T , для некоторого $a > 0$ выполнено

$$P^*P > aE \quad \text{или} \quad P^*P > a\Theta.$$

Является ли это свойство типичным? Автор предполагает, что ответ утвердительный. Из утвердительного ответа вытекает нетипичность включения автоморфизма в поток.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: vryz@math.math.msu.su

Поступило
20.01.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Оселедец В. И. // Матем. заметки 1969. Т. 5. № 3. С. 323–326.
2. Стёпин А. М. // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1986. Т. 50. № 4. С. 801–834.