Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Болотников, Частично разложимые и
вполне неразложимые неотрицательные матрицы,
Матем. заметки, 1996, том 59, выпуск 5, 643–662

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1759>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 10:12:07

ЧАСТИЧНО РАЗЛОЖИМЫЕ И ВПОЛНЕ НЕРАЗЛОЖИМЫЕ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ МАТРИЦЫ

Ю. В. Болотников, В. Е. Тараканов

Мы рассматриваем неотрицательные матрицы размера $m \times n$, $m \leq n$, элементы которых принадлежат фиксированному множеству R_q^+ из q неотрицательных чисел, включающему нуль. Если в такой матрице A имеются нулевые подматрицы размера $r \times s$ и $r + s = t$, то максимальное из таких чисел t называется *нульностью* матрицы A (см. [1]).

В § 1 мы находим асимптотическое при $n \rightarrow \infty$ разложение для числа матриц нульности t при $t > n$, а также для числа полу-вполне неразложимых матриц ($m < n$, $t < n$), играющих существенную роль при изучении матриц с нулевым перманентом (см. [2]). Для числа $f(m, n)$ матриц с нулевым перманентом получено асимптотическое разложение без использования принципа включения-исключения и неравенств Бонферрони (как было в [2]).

В § 2 получена асимптотика для числа вполне неразложимых матриц порядка n .

Отметим, что наши рассуждения включают (при $q = 2$) случай $(0, 1)$ -матриц, и нами тем самым установлена асимптотика числа частично разложимых и вполне неразложимых $(0, 1)$ -матриц размера $m \times n$, $m \leq n$, при $n \rightarrow \infty$.

§ 1. Частично разложимые матрицы

Пусть R_q^+ — фиксированное множество из q неотрицательных чисел, включающее нуль. Мы рассматриваем множество $M(m, n)$ всевозможных матриц размера $m \times n$, $m \leq n$, с элементами из R_q^+ . Неотрицательная матрица $A \in M(m, n)$ называется *частично разложимой*, если ее нульность больше или равна n . Матрица, не являющаяся частично разложимой, называется *полу-вполне неразложимой* (см. [1]), а в

Работа второго автора выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 93–011–1443.

случае $m = n$ – вполне неразложимой. Мы применяем эти определения и к матрице A размера $m \times n$ с $m > n$, если им удовлетворяет транспонированная матрица A^T .

Пусть $f(m, n)$, $g(m, n)$, $h(m, n)$ обозначают соответственно числа матриц из $M(m, n)$ с нулевым перманентом, с перманентом, отличным от нуля, и полу-вполне неразложимых матриц. Полагаем также $g(0, n) = h(0, n) \equiv 1$ для любого натурального n . Обозначим $M_t(m, n)$ множество всех матриц нульности t , а $c_t(m, n)$ – их число. Для матриц из $M_t(m, n)$ введем еще понятие типа: матрица $A \in M_t(m, n)$ имеет тип s , если она содержит нулевую подматрицу O_{rs} размера $r \times s$, $r + s = t$, и для любой ее нулевой подматрицы O_{uv} с $u + v = t$ выполнено $v \geq s$. Множество матриц нульности t и типа s обозначим $M_t^{(s)}(m, n)$, а их число – $c_t^{(s)}(m, n)$. Особо выделим числа $c_n(m, n)$ и $c_n^{(s)}(m, n)$ и обозначим их $p(m, n)$ и $p^{(s)}(m, n)$. В матрице A из $M_t^{(s)}(m, n)$ любая нулевая подматрица размера $r \times s$, $r + s = t$, называется *максимальной*.

В работе [2] доказано, что при $t > n$ и при $t = n$, $m < n$ максимальная подматрица единственна, а также получено равенство

$$c_t^{(s)}(m, n) = \binom{m}{r} \binom{n}{s} q^{(m-r)(n-s)} g(n-s, r) h(m-r, s), \quad (1)$$

справедливое при $t > n$ и $t = n$, $m < n$. Мы будем пользоваться соотношением (1) и вытекающими из него оценками, в частности, следующей:

$$c_t^{(s)}(m, n) \leq \binom{t}{s}^2 q^{mn-s(t-s)}. \quad (2)$$

Частично разложимая матрица размера $m \times n$ – это матрица нульности не меньше n , поэтому число таких матриц равно

$$\sum_{t=n}^{m+n} c_t(m, n) = p(m, n) + f(m, n). \quad (3)$$

В свою очередь, тип s матрицы $A \in M_t(m, n)$ изменяется от $\max\{t-m, 1\}$ до $\min\{t-1, n\}$, поэтому

$$c_t(m, n) = \sum_{s=\max\{t-m, 1\}}^{\min\{t-1, n\}} c_t^{(s)}(m, n). \quad (4)$$

При оценках нам понадобятся асимптотические соотношения для биномиальных коэффициентов, вытекающие при $n \rightarrow \infty$ из формулы Стирлинга:

$$\binom{n}{n/2} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2^n}{\sqrt{n}}, \quad (5)$$

$$\binom{n}{\sqrt{n}} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi e\sqrt{n}}} (e\sqrt{n})^{\sqrt{n}}. \quad (6)$$

Мы будем оценивать число матриц нульности t при $t \geq n$. Оценим сначала при достаточно большом n и некоторой константе u общее число матриц нульности не меньше $t + u$. Предварительно докажем одно вспомогательное утверждение.

ЛЕММА 1. Пусть $m = m(n)$ и $t = t(n)$, где $m \leq n \leq t \leq m + n$, $n = 1, 2, \dots$, — две последовательности натуральных чисел, а u, v — два натуральных числа таких, что $v + 4 \leq u \leq m + n - t$. Пусть $t_1 = t + u$, а $p = n - v$. Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$\left(\sum_{s=t_1-m}^n \binom{t_1}{s}^2 q^{mn-s(t_1-s)} \right) / q^{mn-n(t-p-1)} = O(q^{-n}). \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим S сумму в левой части (7). Ясно, что $mn - s(t_1 - s)$ достигает максимума при $s = n$. Поэтому, ввиду (5), для достаточно больших n

$$S \leq (m + n - t_1 + 1) \frac{2}{\pi} \frac{2^{2t_1}}{t_1} q^{mn-n(t_1-n)}.$$

Следовательно,

$$\frac{S}{q^{mn-n(t-p-1)}} \leq q^{n(t-p-1)-n(t_1-n)+2t_1},$$

так как $m + n - t_1 + 1 \leq t_1$. Теперь замечаем, что при наших предположениях показатель степени в правой части неравенства не превышает $-n$. Тем самым получаем утверждение леммы.

ЛЕММА 2. Пусть u, v — натуральные числа, $u \geq v + 4$. При $t \geq n$, $u \leq m + n - t$ справедлива при $n \rightarrow \infty$ асимптотическая оценка

$$\left(\sum_{t_1=t+u}^{m+n} c_{t_1}(m, n) \right) / q^{mn-n(t-n+v-1)} = O\left(\frac{m}{q^n}\right). \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим для каждого $c_{t_1}(m, n)$, где $t + u \leq t_1 \leq m + n$, представление (4). Утверждение получается, если воспользоваться неравенством (2) и применить затем оценку (7) к каждому из слагаемых в получившейся сумме. Таким образом,

$$\frac{c_{t_1}(m, n)}{q^{mn-n(t-n+v-1)}} = O(q^{-n})$$

для каждого из чисел $t + u, t + u + 1, \dots, m + n$, и мы приходим к (8). Лемма доказана.

Перейдем к оценкам чисел $c_t(m, n)$ при значениях t , достаточно близких к n . Пусть $m = m(n)$ и $t = t(n)$, $n = 1, 2, \dots$, — две последовательности натуральных чисел. Будем говорить, что m, n и t удовлетворяют условию (*), если выполнены следующие условия:

$$m(n) \leq n \leq t(n) \quad (9)$$

и для достаточно больших n

$$n > t - \varepsilon(t)\sqrt{t}, \quad (10)$$

где $\varepsilon(t) \rightarrow \varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1$, при $n \rightarrow \infty$. Из (9) и (10), очевидно, следует, что $n \sim t$. Заметим, что если $m = m(n) \leq n$, $t = t(n) = n + u$, где u — целое неотрицательное число, то m, n, t удовлетворяют условию (*).

В дальнейшем мы используем иногда обозначения вида $\sum_{s=a}^b$, где a и b могут быть не целыми числами, понимая под этим суммирование по всем целым числам в пределах от a_0 до b_0 , где a_0, b_0 — ближайшие к a и b целые числа.

При оценках $c_t(m, n)$ мы будем сумму в правой части формулы (4) при $\sqrt{t} < m \leq t - \sqrt{t}$ разбивать на две части — от $t - m$ до $t - \sqrt{t} - 1$ и от $t - \sqrt{t}$ до $\min\{n, t - 1\}$; а при $m > t - \sqrt{t}$ на три части — от $\max\{t - m, 1\}$ до $\sqrt{t} - 1$, от $\sqrt{t}$ до $t - \sqrt{t} - 1$ и от $t - \sqrt{t}$ до $\min\{n, t - 1\}$. Для оценки этих сумм докажем еще несколько вспомогательных утверждений.

ЛЕММА 3. Пусть m, n, t удовлетворяют условию (*), v — натуральное число и $n - v = p_1$. Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$\sum_{s=\beta}^{p_1} \binom{t}{s}^2 q^{mn-s(t-s)} = o(q^{mn-n(t-p_1-1)}), \quad (11)$$

где $p_1 \geq \beta \geq t - \sqrt{t}$.

Далее, пусть $m > t - \sqrt{t}$ и p — целое число со свойствами $t - \sqrt{t} < p \leq m$, $p \leq p_1$. Тогда при $n \rightarrow \infty$ справедливо также

$$\sum_{s=t-p}^{\sqrt{t}} \binom{t}{s}^2 q^{mn-s(t-s)} = o(q^{mn-n(t-p_1-1)}). \quad (12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\varphi(s) = s(t - s)$, $s = 1, 2, \dots, t$. Обозначим S_1 левую часть (11). Тогда

$$S_1 \leq (\sqrt{t} + n - t) \binom{t}{s}^2 q^{mn-\varphi(p_1)}.$$

Ввиду (6) для достаточно больших n получаем

$$S_1 \leq (\sqrt{t} + n - t) \frac{1}{2\pi e \sqrt{t}} (e\sqrt{t})^{2\sqrt{t}} q^{mn - \varphi(p_1)}.$$

Так как $\sqrt{t} + n - t \leq \sqrt{t}$, то

$$\frac{S_1}{q^{mn - n(t - p_1 - 1)}} < (e\sqrt{t})^{2\sqrt{t}} q^{n(t - p_1 - 1) - \varphi(p_1)}. \quad (13)$$

Далее, по условиям леммы

$$n(t - p_1 - 1) - p_1(t - p_1) < -n + v\sqrt{t} + v^2.$$

Учитывая, что в наших условиях $t \sim n$, видим, что логарифм правой части в (13) при $n \rightarrow \infty$ стремится к $-\infty$. Поэтому из (13) следует (11).

Пусть теперь p — целое число со свойствами $t - \sqrt{t} < p \leq m$, $p \leq p_1$. Обозначим S_2 левую часть в (12). Аналогично предыдущему получаем

$$\frac{S_2}{q^{mn - n(t - p_1 - 1)}} \leq (e\sqrt{t})^{2\sqrt{t}} q^{n(t - p_1 - 1) - \varphi(p)}. \quad (14)$$

Нетрудно заметить, что $\varphi(p_1) \leq \varphi(p)$, так как $t/2 < t - \sqrt{t} < p \leq p_1$. Поэтому правая часть в (14) не превосходит правой части в (13), которая, как мы показали выше, стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Таким образом, из (14) следует (12). Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если m , n , t удовлетворяют условию (*), то при $n \rightarrow \infty$

$$\sum_{s=\max\{t-m, t-\sqrt{t}\}}^{n-v} \binom{t}{s}^2 q^{mn-s(t-s)} = o(q^{mn-n(t-n)-(v-1)n}), \quad (15)$$

где v — натуральное число такое, что $t \leq m + n - v$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $m \leq n - v$, где v — фиксированное натуральное число, и m , n , t удовлетворяют условию (*). Тогда при $m > t - \sqrt{t}$ имеем

$$\sum_{s=t-m}^{\sqrt{t}} \binom{t}{s}^2 q^{mn-s(t-s)} = o(q^{mn-n(t-n)-(v-1)n}), \quad (16)$$

если $n \rightarrow \infty$.

Действительно, при $m > t - \sqrt{t}$ оценка (16) вытекает из утверждения леммы, если положить $p = m$, $p_1 = n - v$.

ЛЕММА 4. Пусть m, n, t удовлетворяют условию (*), α – целое число в интервале $[\sqrt{t}, t - \sqrt{t} - 1]$, $l(n, t)$ – произвольная линейная функция от n, t с постоянными коэффициентами. Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$\sum_{s=\alpha}^{t-\sqrt{t}-1} \binom{t}{s}^2 q^{mn-s(t-s)} = o(q^{mn-n(t-n)+l(n,t)}). \quad (17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через S левую часть в (17). Тогда

$$S \leq (t - \sqrt{t}) \binom{t}{t/2}^2 q^{mn - \sqrt{t}(t - \sqrt{t})},$$

следовательно, ввиду (5)

$$\frac{S}{q^{mn-n(t-n)+l(n,t)}} \leq q^{\Phi(t)},$$

где $\Phi(t) = n(t - n) - t\sqrt{t} + t + l_1(n, t)$, а $l_1(n, t) = -l(n, t) + 2t$. Запишем

$$\Phi(t) = -t\sqrt{t} \left(1 - \frac{n}{t}, \frac{t-n}{\sqrt{t}} - \frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{l_1(n, t)}{t\sqrt{t}} \right).$$

Очевидно, в наших условиях для всех достаточно больших n выражение в скобках не меньше величины, сколь угодно близкой к положительному числу $1 - \varepsilon$. Отсюда следует утверждение леммы.

Мы можем теперь вывести асимптотические оценки сверху для чисел $c_t(m, n)$, $t \geq n$. Для удобства формулировок расширим область определения чисел $c_t^{(s)}(m, n)$: положим $c_t^{(s)}(m, n) = 0$ при $s < \max\{t - m, 1\}$.

ЛЕММА 5. Пусть m, n, t удовлетворяют условию (*) и $t > n$. Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$c_t(m, n) \leq \alpha(m, n, t) q^{mn-n(t-n)} + \beta(m, n, t) q^{mn-n(t-n)-n} (1 + o(1)), \quad (18)$$

где

$$\alpha(m, n, t) = \begin{cases} \binom{m}{t-n}, & m < n, \\ 2 \binom{n}{t-n}, & m = n, \end{cases} \quad (19)$$

$$\beta(m, n, t) = \begin{cases} \binom{m}{t-n+1} n (q^{t-n+1} - 1), & m \leq n-2, \\ \binom{n-1}{t-n+1} n (q^{t-n+1} - 1) + \binom{n}{t-n+1} q^{t-n+1}, & m = n-1, \\ \binom{n}{t-n+1} n [2q^{t-n+1} - (q-1)(t-n+1) - 2], & m = n. \end{cases} \quad (20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся формулой (4). Введем обозначения:

$$\begin{aligned}\Sigma_1 &= \sum_{s=t-\sqrt{t}}^{n-2} c_t^{(s)}(m, n), & \Sigma_2 &= \sum_{s=\sqrt{t}}^{t-\sqrt{t}-1} c_t^{(s)}(m, n), \\ \Sigma_3 &= \sum_{s=t-n+2}^{\sqrt{t}-1} c_t^{(s)}(m, n).\end{aligned}$$

Так как $t > n$, мы можем записать

$$\begin{aligned}c_t(m, n) &= c_t^{(n)}(m, n) + c_t^{(n-1)}(m, n) + \Sigma_1 + \Sigma_2 \\ &\quad + \Sigma_3 + c_t^{(t-n+1)}(m, n) + c_t^{(t-n)}(m, n).\end{aligned}\quad (21)$$

Оценим слагаемые в (21). При этом для оценки $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ применяем леммы 3 и 4. Остальные члены в (21) оцениваем точнее, используя (1), а также следующие очевидные соотношения:

$$\begin{aligned}g(1, 1) &= h(1, 1) = q - 1, & g(1, x) &= q^x - 1, \\ h(1, x) &= q^x - (q - 1)x - 1, & x &> 1.\end{aligned}\quad (22)$$

(последнее получается из формулы $h(1, x) = g(1, x) - p(1, x)$, если заметить, что $p(1, x) = (q - 1)x$ при $x > 1$).

По формуле (1) имеем

$$c_t^{(n)}(m, n) = \binom{m}{t-n} h(m+n-t, n).\quad (23)$$

Далее, из (1) следует, что

$$c_t^{(s)}(m, n) \leq \binom{m}{r} \binom{n}{s} g(n-s, r) q^{(m-r)n},$$

$r = t - s$. Отсюда при $s = n - 1$, учитывая (22), получаем:

$$c_t^{(n-1)}(m, n) \leq \binom{m}{t-n+1} n (q^{t-n+1} - 1) q^{mn-n(t-n)-n}.\quad (24)$$

Точно таким же способом, используя (1) и (22), приходим к соотношениям

$$\begin{aligned}c_t^{(t-n+1)}(m, n) &\leq \begin{cases} \binom{n}{t-n+1} q^{t-n+1} q^{mn-n(t-n)-n}, & m = n - 1, \\ \binom{n}{t-n+1} n [q^{t-n+1} - (q-1)(t-n+1) - 1] \\ \quad \times q^{n^2-n(t-n)-n}, & m = n, \\ c_t^{(t-n+1)}(m, n) = 0 & \text{при } m < n - 1 \end{cases}\end{aligned}\quad (25)$$

и

$$c_t^{(t-n)}(m, n) = \binom{n}{t-n} g(2n-t, n) \quad (26)$$

$$(c_t^{(t-n)}(m, n) = 0 \quad \text{при } m < n).$$

Слагаемые в суммах $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ оцениваем с помощью (4). Тогда

$$\Sigma_1 \leq \sum_{s=t-\sqrt{t}}^{n-2} \binom{t}{s}^2 q^{mn-s(t-s)}.$$

Отсюда по следствию леммы 3, полагая в (15) $v = 2$, находим, что

$$\Sigma_1 = o(q^{mn-n(t-n)-n}). \quad (27)$$

Далее, также по (4)

$$\Sigma_2 \leq \sum_{s=\sqrt{t}}^{t-\sqrt{t}-1} \binom{t}{s}^2 q^{mn-s(t-s)}.$$

Отсюда по лемме 4, полагая в (17) $l(n, t) = -n$, получаем, что

$$\Sigma_2 = o(q^{mn-n(t-n)-n}). \quad (28)$$

Наконец,

$$\Sigma_3 \leq \sum_{s=a}^{\sqrt{t}-1} \binom{t}{s}^2 q^{mn-s(t-s)},$$

где $a = \max\{t-m, t-n+2\}$. К правой части этого неравенства при $m = n-1$, n применяем лемму 3, а при $m \leq n-2$ следствие 2 леммы 3, полагая в первом случае в (12) $p_1 = p = n-2$, а во втором – беря в (16) $v = 2$. В результате получаем, что

$$\Sigma_3 = o(q^{mn-n(t-n)-n}). \quad (29)$$

Складывая неравенства (23)–(26) и равенства (27)–(29), приходим к соотношениям

$$c_t(m, n) \leq \binom{m}{t-n} h(m+n-t, n) + \beta(m, n, t) q^{mn-n(t-n)-n} (1 + o(1)), \quad m < n, \quad (30)$$

$$c_t(n, n) \leq \binom{n}{t-n} (h(2n-t, n) + g(2n-t, n)) + \beta(n, n, t) q^{n^2-n(t-n)-n} (1 + o(1)). \quad (31)$$

Учитывая, что $g(m+n-t, n), h(m+n-t, n) \leq q^{mn-n(t-n)}$, отсюда получаем неравенство (18).

ЛЕММА 6. *Справедливы следующие асимптотические при $n \rightarrow \infty$ соотношения:*

а) *если $m < n - 1$, то*

$$p(m, n) \leq (q - 1)mnq^{mn-n}(1 + o(1)); \quad (32)$$

б) *если $m = n$, то*

$$p(n, n) \leq ((q - 1)n^2 + n)q^{n^2-2n}(1 + o(1)). \quad (33)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что $p(m, n) = c_n(m, n)$, $p^{(s)}(m, n) = c_n^{(s)}(m, n)$, и потому

$$p(m, n) = \sum_{s=\max\{n-m, 1\}}^{n-1} p^{(s)}(m, n) = \sum_{s=1}^{n-1} c_n^{(s)}(m, n).$$

Аналогично доказательству леммы 5, запишем

$$p(m, n) = c_n^{(n-1)}(m, n) + \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 + c_n^{(1)}(m, n),$$

где

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \sum_{s=n-\sqrt{n}}^{n-2} c_n^{(s)}(m, n), & \Sigma_2 &= \sum_{s=\sqrt{n}}^{n-\sqrt{n}-1} c_n^{(s)}(m, n), \\ \Sigma_3 &= \sum_{s=2}^{\sqrt{n}-1} c_n^{(s)}(m, n) \end{aligned}$$

$(c_n^{(1)}(m, n) \neq 0$ лишь при $m = n - 1$). Применяем формулу (1) и получаем, что

$$c_n^{(n-1)}(m, n) \leq (q - 1)mnq^{mn-n}, \quad (34)$$

а также при $m = n - 1$

$$c_n^{(1)}(m, n) \leq qnq^{n^2-2n}. \quad (35)$$

Далее, применяя к Σ_1, Σ_3 лемму 3 и ее следствия при $v = 2$, а к Σ_2 лемму 4 при $l(n, t) = -n$, находим, что каждая из сумм $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ есть $o(q^{mn-n})$. Отсюда и из (34), (35) следует утверждение леммы.

Из полученных результатов без труда получаются асимптотические соотношения для чисел $f(m, n)$ и $h(m, n)$.

Следующее утверждение было установлено в [2] с применением принципа включения-исключения.

ЛЕММА 7. При $n \rightarrow \infty$ справедливы следующие асимптотические соотношения:

$$f(m, n) \leq \begin{cases} mq^{mn-n}(1+o(1)), & \text{если } m < n, \\ 2nq^{n^2-n}(1+o(1)), & \text{если } m = n. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пользуемся представлением

$$f(m, n) = c_{n+1}(m, n) + \dots + c_{n+4}(m, n) + \sum_{t_1=n+5}^{m+n} c_{t_1}(m, n), \quad (36)$$

числа $m, n, t = n + k$ при любом фиксированном целом $k \geq 0$ удовлетворяют условию (*). По лемме 5

$$c_{n+k}(m, n) \leq \begin{cases} \binom{m}{k} q^{mn-kn}(1+o(1)) & \text{при } m < n, \\ 2 \binom{n}{k} q^{n^2-kn}(1+o(1)) & \text{при } m = n. \end{cases}$$

Таким образом, $c_{n+k}(m, n) = o(q^{mn-n})$ при $n \rightarrow \infty$ для $k = 2, 3, 4$.

Сумму остальных членов в (36) оцениваем по лемме 2, полагая в (8) $v = 1, u = 5, t = n + 1$:

$$\sum_{t_1=n+5}^{m+n} c_{t_1}(m, n) = O(mq^{mn-2n}) = o(q^{mn-n}).$$

Приходим, таким образом, к утверждению леммы.

Из леммы 7 следует известное (см. [3] при $q = 2$) соотношение для числа матриц с ненулевым перманентом:

$$g(m, n) = q^{mn}(1+o(1)), \quad m \leq n, \quad (37)$$

при $n \rightarrow \infty$.

ТЕОРЕМА 1. а) Для числа $p(m, n)$ частично разложимых неотрицательных матриц размера $m \times n$ с ненулевым перманентом справедливы при $n \rightarrow \infty$ следующие асимптотические формулы:

$$p(m, n) = (q-1)mnq^{mn-n}(1+o(1)), \quad m < n-1, \quad (38)$$

$$p(m, n) = n((q-1)n+1)q^{mn-n}(1+o(1)), \quad m = n-1. \quad (39)$$

б) Для числа $h(m, n)$ полу-вполне неразложимых неотрицательных матриц размера $m \times n$ справедливы при $n \rightarrow \infty$ следующие асимптотические формулы:

$$h(m, n) = q^{mn} - m((q-1)n+1)q^{mn-n}(1+o(1)), \quad m < n-1, \quad (40)$$

$$h(m, n) = q^{n^2-n} - ((q-1)n^2 + 2n - 1)q^{n^2-2n}(1+o(1)), \quad m = n-1. \quad (41)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Каждая полу-вполне неразложимая матрица имеет нулевость не больше $n - 1$. Поэтому ввиду (3),

$$h(m, n) = g(m, n) - p(m, n).$$

Следовательно, по лемме 6 и соотношению (37)

$$h(m, n) = q^{mn} (1 + o(1)). \quad (42)$$

Далее, имеем $c_n(m, n) \geq c_n^{(n-1)}(m, n)$. Пусть $m < n - 1$. Тогда (см. (1))

$$c_n^{(n-1)}(m, n) = (q - 1)mnq^{m-1}h(m - 1, n - 1),$$

так как $g(1, 1) = q - 1$. Следовательно, ввиду (42), $c_n(m, n) \geq (q - 1)mn \times q^{mn-n} (1 + o(1))$. Сравнение этого неравенства с противоположным по знаку неравенством (32) в лемме 6 дает формулу (38).

Пусть теперь $m = n - 1$. Тогда

$$c_n^{(1)}(n - 1, n) = nh(0, 1)g(n - 1, n - 1) = ng(n - 1, n - 1).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} c_n(n - 1, n) &\geq c_n^{(n-1)}(n - 1, n) + c_n^{(1)}(n - 1, n) \\ &= (q - 1)(n - 1)nq^{n-2}h(n - 2, n - 1) + ng(n - 1, n - 1). \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая (37) и (42), а также соотношение (33) в лемме 6, приходим к формуле (39).

Перейдем к оценке $h(m, n)$. Ясно, что $f(m, n) \geq c_{n+1}^{(n)}(m, n) = mh(m - 1, n)$. Учитывая (42), получаем $f(m, n) \geq mq^{mn-n} (1 + o(1))$, что вместе с леммой 7 приводит к

$$f(m, n) \sim mq^{mn-n}, \quad (43)$$

если $n \rightarrow \infty$. Поэтому при $m \leq n - 1$

$$\begin{aligned} g(m, n) &= q^{mn} - mq^{mn-n} (1 + o(1)), \\ h(m, n) &= g(m, n) - p(m, n) = q^{mn} - p(m, n) - mq^{mn-n} (1 + o(1)). \end{aligned}$$

Из полученной выше асимптотики для $p(m, n)$ теперь следуют формулы (40) и (41). Теорема доказана.

В следующей теореме мы установим асимптотическое поведение чисел $c_t(m, n)$ при $t > n$. Введем обозначение: если $m \leq n < t$, то пусть

$$\gamma(m, n, t) = \begin{cases} \binom{m}{t-n} (m+n-t)((q-1)n+1), & m < n, \\ \binom{n}{t-n} (2n-t)((q-1)n+2), & m = n, \quad t > n+1, \\ (q-1)n^3 + 3n^2 - 2n, & m = n, \quad t = n+1. \end{cases} \quad (44)$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть m, n, t удовлетворяют условию $(*)$ и $t > n$. Для числа $c_t(m, n)$ неотрицательных матриц размера $m \times n$ и нульности t справедливо при $n \rightarrow \infty$ следующее асимптотическое равенство:

$$c_t(m, n) = \alpha q^{mn-n(t-n)} + (\beta - \gamma) q^{mn-n(t-n)-n} (1 + o(1)), \quad (45)$$

где

$$\alpha = \alpha(m, n, t) = \begin{cases} \binom{m}{t-n}, & m < n, \\ 2 \binom{n}{t-n}, & m = n, \end{cases}$$

$\alpha \beta = \beta(m, n, t)$ и $\gamma = \gamma(m, n, t)$ находятся по формулам (20) и (44) соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливо неравенство

$$c_t(m, n) \geq c_t^{(n)}(m, n) + c_t^{(n-1)}(m, n) + c_t^{(t-n+1)}(m, n) + c_t^{(t-n)}(m, n); \quad (46)$$

при этом, если $m < n$, то последнее слагаемое, а если $m < n - 1$, то два последних слагаемых равны нулю. Согласно (1) при $r = t - n, s = n$ имеем

$$c_t^{(n)}(m, n) = \binom{m}{t-n} h(m+n-t, n). \quad (47)$$

Далее, полагая в (1) $r = t - n + 1, s = n - 1$ и в (22) $x = t - n + 1$, получаем

$$c_t^{(n-1)}(m, n) = \binom{m}{t-n+1} n q^{m+n-t-1} (q^{t-n+1} - 1) h(m+n-t-1, n-1).$$

Так как $m+n-t-1 \leq n-1$, откуда по теореме 1 находим, что если $n \rightarrow \infty$, то

$$c_t^{(n-1)}(m, n) = \left[\binom{m}{t-n+1} n (q^{t-n+1} - 1) \right] q^{mn-n(t-n)-n} (1 + o(1)). \quad (48)$$

Рассмотрим отдельно два случая.

а) $m < n$. Если $m = n - 1$, то, полагая в (1) $s = t - n + 1, r = n - 1$, получаем, что

$$c_t^{(t-n+1)}(n-1, n) = \binom{n}{t-n+1} g(2n-t-1, n-1),$$

откуда, ввиду (37), следует, что

$$c_t^{(t-n+1)}(m, n) = \left[\binom{n}{t-n+1} q^{t-n+1} \right] q^{n^2-n(t-n)-n} (1 + o(1)). \quad (49)$$

Складывая правые части в (47) и (48), а при $m = n - 1$ в (47)–(49), получаем из (46), что

$$c_t(m, n) \geq \binom{m}{t-n} h(m+n-t, n) + \beta q^{mn-n(t-n)-n} (1 + o(1)).$$

Однако, выше мы доказали неравенство, противоположное по знаку (см. (30)). Следовательно,

$$c_t(m, n) = \binom{m}{t-n} h(m+n-t, n) + \beta q^{mn-n(t-n)-n} (1 + o(1))$$

при $n \rightarrow \infty$. Применяем теперь теорему 1, учитывая, что $m+n-t < n-1$ при $m < n < t$. Поэтому $h(m+n-t, n)$ выражается по формуле (40), и мы приходим к утверждению теоремы.

б) $m = n$. Полагая в (1) $m = n, s = t - n, r = n$, получаем

$$c_t^{(t-n)}(n, n) = \binom{n}{t-n} g(2n-t, n). \quad (50)$$

Полагая в (1) $m = n, s = t - n + 1, r = n - 1$ и в (22) $x = t - n + 1$, находим также, что

$$\begin{aligned} c_t^{(t-n+1)}(n, n) &= n \binom{n}{t-n+1} q^{2n-t-1} \\ &\times (q^{t-n+1} - (q-1)(t-n+1) - 1) g(2n-t-1, n-1), \end{aligned}$$

откуда ввиду (37) следует, что

$$\begin{aligned} c_t^{(t-n+1)}(n, n) &= n \binom{n}{t-n+1} (q^{t-n+1} - (q-1)(t-n+1) - 1) \\ &\times q^{n^2-n(t-n)-n} (1 + o(1)). \end{aligned} \quad (51)$$

Складывая (47), (48), (50) и (51), получаем из (46), что

$$\begin{aligned} c_t(n, n) &\geq \binom{n}{t-n} (h(2n-t, n) + g(2n-t, n)) \\ &+ \beta q^{n^2-n(t-n)-n} (1 + o(1)). \end{aligned}$$

Однако, выше мы доказали неравенство, противоположное по знаку (см. (31)). Следовательно,

$$\begin{aligned} c_t(n, n) &= \binom{n}{t-n} (h(2n-t, n) + g(2n-t, n)) \\ &+ \beta q^{n^2-n(t-n)-n} (1 + o(1)). \end{aligned} \quad (52)$$

Так как $2n - t < n$, из доказанного выше соотношения (43) вытекает, что

$$g(2n - t, n) = q^{n^2 - n(t-n)} - (2n - t)q^{n^2 - n(t-n) - n}(1 + o(1)). \quad (53)$$

Если $t > n + 1$, то $2n - t < n - 1$ и $h(2n - t, n)$ выражается по формуле (40):

$$\begin{aligned} h(2n - t, n) &= q^{n^2 - n(t-n)} \\ &\quad - (2n - t)((q - 1)n + 1)q^{n^2 - n(t-n) - n}(1 + o(1)). \end{aligned} \quad (54)$$

При $t = n + 1$ $h(2n - t, n)$ выражаем по формуле (41):

$$h(n - 1, n) = q^{n^2 - n} - ((q - 1)n^2 + 2n - 1)q^{n^2 - 2n}(1 + o(1)). \quad (55)$$

Учитывая (53)–(55), в каждом из случаев приходим к утверждению теоремы.

СЛЕДСТВИЕ. Для числа $f(n, n)$ матриц порядка n с нулевым перманентом справедливо при $n \rightarrow \infty$ следующее асимптотическое разложение:

$$\begin{aligned} f(n, n) &= 2nq^{n^2 - n} \\ &\quad + [(q - 1)^2 n^3 - (q^2 - q + 2)n^2 + n]q^{n^2 - 2n}(1 + o(1)). \end{aligned} \quad (56)$$

Действительно,

$$f(n, n) = c_{n+1}(n, n) + c_{n+2}(n, n) + \dots + c_{n+5}(n, n) + \sum_{t_1=n+6}^{2n} c_{t_1}(n, n).$$

Согласно доказанной теореме и лемме 2 (беря в (8) $t = n + 1$, $v = 2$)

$$\begin{aligned} f(n, n) &= c_{n+1}(n, n) + c_{n+2}(n, n) + o(q^{n^2 - 2n}), \\ c_{n+1}(n, n) &= 2nq^{n^2 - n} \\ &\quad + [(q - 1)^2 n^3 - (q^2 - q + 3)n^2 + 2n]q^{n^2 - 2n}(1 + o(1)), \\ c_{n+2}(n, n) &= (n^2 - n)q^{n^2 - 2n}(1 + o(1)). \end{aligned}$$

Таким образом, приходим к требуемому результату.

Следствие демонстрирует другой способ получения асимптотического разложения для $f(n, n)$, чем в [2] (формула (56) дает два старших члена разложения для $f(n, n)$).

§ 2. Вполне неразложимые матрицы

В теореме 1 § 1 указываются старшие члены асимптотического разложения при $n \rightarrow \infty$ для числа $h(t, n)$ полу-вполне неразложимых неотрицательных матриц размера $t \times n$ при $t \leq n - 1$. На случай $t = n$, т.е. при рассмотрении вполне неразложимых матриц, рассуждения в § 1 непосредственно не переносятся, так как при $t = n$ тогда не имеет места формула (1). В этом параграфе мы покажем, как можно обойти это затруднение, и получим асимптотическое разложение для числа $h(n, n)$ вполне неразложимых матриц при $n \rightarrow \infty$.

ЛЕММА 8. Пусть s – натуральное число, $1 \leq s \leq n - 1$. Любая матрица $A \in M_n^{(s)}(n, n)$ при $s > n/2$ содержит единственную максимальную подматрицу. При $s \leq n/2$ A содержит либо одну, либо две максимальные подматрицы; в последнем случае общее число строк, в которых расположены элементы как одной, так и другой максимальной подматрицы, равно $n - 2s$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как показано в [2] (следствие леммы 1), любые две максимальные подматрицы в неотрицательной матрице либо совпадают, либо не пересекаются. Если $s > n/2$, то предположение о том, что в A имеются две максимальные подматрицы, ведет к противоречию с тем, что A принадлежит $M_n^{(s)}(n, n)$.

Пусть теперь $s \leq n/2$ и матрица A имеет две максимальные подматрицы M и M_1 . Обозначим $r = n - s$. Если число строк, в которых расположены нули как M , так и M_1 , равно x , то A содержит нулевую подматрицу размера $x \times 2s$. Так как $2r - x \leq n$, то $x \geq 2r - n = n - 2s$. Если $x > n - 2s$, то $x + 2s > n$, что противоречит тому, что нулевость A равна n . Итак, $x = n - 2s$. Ясно поэтому, что еще одной максимальной подматрицы в A , отличной от M и M_1 , быть не может. Лемма доказана.

ЛЕММА 9. Пусть A – матрица из $M_n^{(s)}(n, n)$, $1 \leq s \leq n - 1$. Тогда A перестановочно эквивалентна матрице следующего вида:

$$\begin{pmatrix} A_1 & O_{rs} \\ A_3 & A_2 \end{pmatrix}, \quad (57)$$

где $r = n - s$, O_{rs} – нулевая матрица размера $r \times s$, A_1 – матрица порядка r с ненулевым перманентом, A_2 – вполне неразложимая матрица порядка s .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО получается дословным переносом на случай $t = n$ доказательства теоремы 4 работы [2].

Пусть $s \leq n/2$ – натуральное число. Множество матриц $P_n^{(s)} = M_n^{(s)}(n, n)$ разобьем на два подмножества $P_{n1}^{(s)}$ и $P_{n2}^{(s)}$: к первому отнесем все матрицы с единственной максимальной подматрицей, ко второму – все матрицы с двумя максимальными подматрицами. Положим $c_{n1}^{(s)} = |P_{n1}^{(s)}|$, $c_{n2}^{(s)} = |P_{n2}^{(s)}|$. Тогда $c_n^{(s)}(n, n) = c_{n1}^{(s)} + c_{n2}^{(s)}$. Далее, пусть

$$\bar{c}_n^{(s)} = q^{s(n-s)} \binom{n}{s}^2 g(n-s, n-s) h(s, s).$$

Ясно, что $c_n^{(s)}(n, n) \leq \bar{c}_n^{(s)}$, так как любая матрица из $P_n^{(s)}$ перестановочно эквивалентна матрице вида (57) из леммы 9.

ЛЕММА 10. Пусть n, s – натуральные числа, $s \leq n/2$, B, C – вполне неразложимые матрицы порядков $r = n - s$ и s соответственно, D – произвольная ненулевая матрица размера $s \times r$. Тогда матрица

$$A = \begin{pmatrix} B & O_{rs} \\ D & C \end{pmatrix} \quad (58)$$

принадлежит подмножеству $P_{n1}^{(s)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M – максимальная подматрица матрицы A и ее размер – $r' \times s'$, $r' + s' \geq n$. Так как D – ненулевая матрица, то M не содержится в D . Обозначим M_1 и M_2 пересечения M соответственно с B и C и пусть их размеры – $r'_1 \times s'_1$ и $r'_2 \times s'_2$. Тогда $r'_1 + s'_1 \leq r - 1$, $r'_2 + s'_2 \leq s - 1$ по условиям леммы. Отсюда следует, во-первых, что матрица M_2 пуста, так как в противном случае M имела бы нульность не больше $r + s - 1 = n - 1$ и не могла бы быть максимальной матрицей. Далее, M не может быть расположена в первых r столбцах, так как всякая такая матрица имеет нульность не больше $r - 1 + s = r - 1 + n - r = n - 1$. Следовательно, M содержится в первых r строках. Но тогда M должна совпадать с матрицей, расположенной в правом верхнем углу. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ.

$$c_{n1}^{(s)} \geq \binom{n}{s}^2 h(s, s) h(n-s, n-s) (q^{s(n-s)} - 1) \quad (59)$$

при $s \leq n/2$.

Действительно, подмножеству $P_{n1}^{(s)}$ принадлежит всякая матрица, перестановочно эквивалентная матрице вида (58).

ЛЕММА 11. Пусть n, s – натуральные числа, $s \leq n/2$ и матрица A принадлежит множеству $P_{n2}^{(s)}$. Тогда A перестановочно эквивалентна матрице вида

$$A' = \begin{pmatrix} B & O_{rs} \\ C & \end{pmatrix}, \quad (60)$$

где $r = n - s$, C – вполне неразложимая матрица порядка s , а B перестановками столбцов и первых r строк может быть переведена в матрицу

$$\begin{pmatrix} B_3 & B_2 \\ B_1 & O_{rs} \end{pmatrix} \quad (61)$$

с матрицей B_1 размера $r \times (r - s)$ и матрицей B_2 порядка s такими, что $\text{per } B_1^T \neq 0$, $\text{per } B_2 \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 9 всякая матрица A из $P_n^{(s)}$ перестановочно эквивалентна матрице вида (60) со вполне неразложимой матрицей C порядка s . Так как $A \in P_{n2}^{(s)}$, в подматрице B должна содержаться вторая максимальная подматрица M' матрицы A , при этом по лемме 8 в точности $n - 2s$ строк матрицы M' находятся среди первых $n - s$ строк A' . Следовательно, дальнейшими перестановками $n - s$ первых столбцов и $n - s$ первых строк в матрице A' можно подматрицу B привести к виду (61). Так как нульность A равна n , то, очевидно, $\text{per } B_2 \neq 0$, $\text{per } B_1^T \neq 0$. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Справедливо неравенство

$$c_{n2}^{(s)} \leq q^{s(n-s)} \binom{n}{s}^2 \binom{n-s}{s} h(s, s) g(s, s) g(n-2s, n-s) \quad (62)$$

при $s \leq n/2$.

Перейдем теперь к оценке величины $p(n, n) = c_n(n, n)$. Из леммы 9 и формулы (1) следуют неравенства

$$\begin{aligned} c_n^{(n-1)}(n, n) &= q^{n-1} n^2 g(1, 1) h(n-1, n-1) \leq (q-1) n^2 q^{n^2-n}, \\ c_n^{(n-2)}(n, n) &= q^{2(n-2)} \binom{n}{2}^2 g(2, 2) h(n-2, n-2) \leq g(2, 2) \binom{n}{2}^2 q^{n^2-2n}, \end{aligned}$$

здесь, как легко заметить, $g(2, 2) = q^4 - 4(q-1)^2 - 4(q-1) - 1$. Далее, аналогично,

$$\begin{aligned} c_n^{(1)}(n, n) &\leq \bar{c}_n^{(1)} \leq (q-1) n^2 q^{n^2-n}, \\ c_n^{(2)}(n, n) &\leq \bar{c}_n^{(2)} \leq h(2, 2) \binom{n}{2}^2 q^{n^2-2n}, \end{aligned}$$

здесь, очевидно, $h(2, 2) = (q - 1)^4$.

Пусть $S = \sum_{s=3}^{n-3} c_n^{(s)}(n, n)$. Тогда

$$c_n(n, n) \leq c_n^{(n-1)}(n, n) + c_n^{(n-2)}(n, n) + \bar{c}_n^{(1)} + \bar{c}_n^{(2)} + S.$$

Оцениваем S с помощью леммы 3 при $v = 3$ и леммы 4. Получаем тогда, что при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} p(n, n) = c_n(n, n) &\leq 2(q - 1)n^2 q^{n^2 - n} \\ &+ \binom{n}{2}^2 (g(2, 2) + h(2, 2))q^{n^2 - 2n} + o(q^{n^2 - 2n}), \end{aligned}$$

т.е.

$$p(n, n) \leq 2(q - 1)n^2 q^{n^2 - n} (1 + \varphi(n)), \quad (63)$$

где $\varphi(n) = O(n^2 q^{-n})$.

Согласно (56)

$$g(n, n) = q^{n^2} - f(n, n) = q^{n^2} (1 + O(nq^{-n})), \quad (64)$$

поэтому из (63) следует, что

$$h(n, n) = g(n, n) - p(n, n) = q^{n^2} (1 + O(n^2 q^{-n})) \quad (65)$$

при $n \rightarrow \infty$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть s — произвольное натуральное число, $1 \leq s \leq n - 1$. Тогда

$$c_n^{(s)}(n, n) = c_{n1}^{(s)} (1 + O(n^2 q^{-n})), \quad (66)$$

если $n \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $s > n/2$, то согласно лемме 8 $c_{n2}^{(s)} = 0$, $c_n^{(s)}(n, n) = c_{n1}^{(s)}$, т.е. (66) выполняется. Пусть $s \leq n/2$. Имеем

$$c_n^{(s)}(n, n) = c_{n1}^{(s)} + c_{n2}^{(s)} = c_{n1}^{(s)} \left(1 + \frac{c_{n2}^{(s)}}{c_{n1}^{(s)}} \right).$$

По следствиям из лемм 10 и 11 (см. (59) и (63))

$$\frac{c_{n2}^{(s)}}{c_{n1}^{(s)}} \leq \frac{q^{s(n-2s)} \binom{n}{s}^2 \binom{n-s}{s}^2 h(s, s) g(s, s) g(n-2s, n-s)}{(q^{s(n-s)} - 1) \binom{n}{s}^2 h(s, s) h(n-s, n-s)}. \quad (67)$$

Заметим, что $q^{s(n-2s)}g(s, s)/(q^{s(n-s)} - 1) \leq 1$, а также, что ввиду (64) и (65)

$$\begin{aligned} g(n-2s, n-s) &= q^{(n-s)(n-2s)}(1+o(1)), \\ h(n-s, n-s) &= q^{(n-s)^2}(1+o(1)). \end{aligned}$$

Поэтому асимптотическое поведение правой части (67) определяется отношением

$$\frac{\binom{n-s}{s}^2}{q^{sn-s^2}}.$$

Покажем, что оно представляет собой величину $O(n^2q^{-n})$. При $s = 1, 2$ это очевидно. Пусть $s \geq 3$. Тогда ввиду (5)

$$\binom{n-s}{s}^2 = O\left(\frac{2^{2(n-s)}}{n-s}\right)$$

при $n \rightarrow \infty$, и

$$\frac{\binom{n-s}{s}^2}{q^{sn-s^2}} = O\left(\frac{1}{(n-s)q^{(s-2)(n-s)}}\right) = o(q^{-n}).$$

Таким образом, $c_{n2}^{(s)}/c_{n1}^{(s)} = O(n^2q^{-n})$, и теорема доказана.

ТЕОРЕМА 4. При $n \rightarrow \infty$

$$p(n, n) = 2(q-1)n^2q^{n^2-n}(1+O(n^2q^{-n})).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся очевидными неравенствами

$$\begin{aligned} p(n, n) &\geq c_n^{(n-1)}(n, n) + c_n^{(1)}(n, n) \\ &\geq c_n^{(n-1)}(n, n) + c_{n1}^{(1)}. \end{aligned}$$

Далее, по лемме 8 и следствию леммы 10

$$\begin{aligned} c_n^{(n-1)}(n, n) &= q^{n-1}(q-1)n^2h(n-1, n-1), \\ c_{n1}^{(1)} &\geq (q^{n-1}-1)(q-1)n^2h(n-1, n-1). \end{aligned}$$

Так как $h(n-1, n-1) = q^{(n-1)^2}(1+\psi(n))$, где $\psi(n) = O(n^2q^{-n})$ (см. (65)), отсюда следует, что $p(n, n) \geq 2(q-1)n^2q^{n^2-n}(1+\psi_1(n))$, где $\psi_1(n) = O(n^2q^{-n})$. Сопоставляя полученное неравенство с неравенством (63), получаем утверждение теоремы.

ТЕОРЕМА 5. Для числа $h(n, n)$ вполне неразложимых матриц порядка n справедливо следующее асимптотическое соотношение

$$h(n, n) = q^{n^2} - 2((q-1)n^2 + n)q^{n^2-n}(1 + O(n^2q^{-n}))$$

при $n \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$h(n, n) = q^{n^2} - f(n, n) - p(n, n).$$

Утверждение следует теперь из формулы (56) и теоремы 4.

Отметим в заключение, что результаты о строении частично разложимых и вполне неразложимых матриц (леммы 8–11) справедливы для матриц с произвольными неотрицательными элементами.

Математический институт
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило
28.06.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Fennet T. I., Loizou G. Combinatorial aspects of rectangular non-negative matrices // Discrete Math. 1977. V. 20. P. 217–234.
- [2] Болотников Ю. В., Тараканов В. Е. Неотрицательные матрицы с нулевым перманентом // Матем. заметки. 1995. Т. 58. № 4. С. 493–504.
- [3] Сачков В. Н. Вероятностные методы в комбинаторном анализе. М.: Наука, 1978.