Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Федорчук, О брауэровской размерности бикомпактов,
Матем. заметки, 2003, том 73, выпуск 2, 295–304

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm176>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 18:33:34

УДК 515.12

О БРАУЭРОВСКОЙ РАЗМЕРНОСТИ БИКОМПАКТОВ

В. В. Федорчук

Замкнутое множество называется разрезом между двумя непересекающимися множествами, если всякий континуум, пересекающий оба эти множества, пересекает и разрез. Основным результатом статьи является доказательство того, что для любого бикompакта размерность, определенная индуктивно на основе понятия разреза, не превосходит размерности, определяемой с помощью покрытий.

Библиография: 9 названий.

Введение. В 1913 году Брауэр [1] дал первое топологическое определение размерностного инварианта для класса *польских* (т.е. полных сепарабельных метрических) пространств без изолированных точек или, как говорили тогда, нормальных множеств в смысле Фреше. Он назвал его “Dimensiongrad”. Мы будем использовать более краткое обозначение Dg (все определения см. в п. 1). Брауэр пытался доказать равенство $Dg I^n = n$. Но в его доказательстве неявно предполагалось, что каждый разрез является перегородкой. После того, как Урысон указал ему на ошибочность этого утверждения, Брауэр [2] заменил в своем определении разрез на перегородку, тем самым исправив свое доказательство n -мерности куба I^n .

Но в классе локально связных польских пространств понятия разреза и перегородки совпадают. Поэтому долгое время считалось, что определение Брауэра эквивалентно урысоновскому определению размерности Ind для класса всех польских локально связных пространств. Об этом было объявлено во введении к книге Гуревича и Волмэна [3]. Затем это утверждение было повторено многими авторами (см. [4]). Недавно выяснилось, что это не верно. А именно, в [4] было доказано, что для всякого $n \geq 2$ существует локально связное польское пространство X_n размерности $Dg X_n = 1 < n = \dim X_n$.

Тем не менее, чуть ранее было показано [5], что брауэровская размерность Dg все-таки совпадает с лебеговой $\dim$ и урысоновской Ind в классе всех метризуемых компактов независимо от их локальной связности (теорема 1.3). Доказательство этого утверждения, состоящее из нескольких строк, является компиляцией четырех фундаментальных фактов теории размерности (сепарабельных) метрических пространств: теоремы счетной суммы замкнутых слагаемых, теоремы о G_δ -оболочке той же размерности, аддиционной теоремы и равенства $\dim = Ind$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 00-01-00289.

В данной заметке доказывается неравенство $\dim X \leq \text{Dg } X$ для произвольного бикompакта X (теорема 3.1). Показывается также (замечание 3.6), что доказать равенство $\dim X = \text{Dg } X$ нельзя даже для бикompакта X с первой аксиомой счетности.

Все пространства предполагаются тихоновскими, все отображения – непрерывными. *Континуумом* называется непустой связный бикompакт.

1. Предварительные сведения. Пусть даны бикompакт X и два его непересекающиеся замкнутые подмножества D и E . Замкнутое множество $C \subset X \setminus D \cup E$ называется

- 1) *перегородкой* в X между D и E , если существуют непересекающиеся окрестности OD и OE такие, что $X \setminus C = OD \cup OE$;
- 2) *разрезом* в X между D и E , если всякий континуум K , пересекающийся с D и E , пересекается также и с C .

Очевидно, что всякая перегородка является разрезом. В то же время простейшие не локально связные плоские континуумы показывают, что не всякий разрез является перегородкой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Размерность $\text{Dg } X$ бикompакта X определяется по индукции следующим образом:

- $\text{Dg } X = -1$ тогда и только тогда, когда $X = \emptyset$;
- $\text{Dg } X \leq n$ тогда и только тогда, когда для любых двух замкнутых непересекающихся множеств $D, E \subset X$ существует разрез C между ними размерности $\text{Dg } C \leq n - 1$;
- $\text{Dg } X = n$ тогда и только тогда, когда n – наименьшее целое число, для которого $\text{Dg } X \leq n$; если не существует целого числа n такого, что $\text{Dg } X \leq n$, то $\text{Dg } X = \infty$.

Из того, что всякая перегородка является разрезом, вытекает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. Для всякого бикompакта X выполнено неравенство

$$\text{Dg } X \leq \text{Ind } X.$$

ТЕОРЕМА 1.3 [5]. Для всякого метризуемого компакта X выполнено равенство

$$\text{Dg } X = \dim X.$$

Для топологического пространства X через $\text{cov}(X)$ обозначается множество всех его конечных открытых покрытий. Это множество частично упорядочено отношением вписанности. А именно, если $u, v \in \text{cov}(X)$, то $u \leq v$ тогда и только тогда, когда v вписано в u . Множество $\mathcal{U} \subset \text{cov}(X)$ называется *базой* множества $\text{cov}(X)$, если $\mathcal{U}$ конфинально в $\text{cov}(X)$. Обратные спектры топологических пространств иногда будем называть просто *спектрами*. Следующее утверждение хорошо известно. Его доказательство можно найти, например, в [6].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.4. Пусть бикompакт X является пределом спектра $S = \{X_a, p_a^a, A\}$, состоящего из бикompактов и эпиморфизмов. Тогда для всякого $u \in \text{cov}(X)$ существуют $a \in A$ и $v \in \text{cov}(X_a)$ такие, что покрытие $p_a^{-1}(v)$ вписано в u .

Из предложения 1.4 вытекает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.5. Пусть бикомпакт X является пределом спектра $S = \{X_a, p_a^a, A\}$, состоящего из бикомпактов и эпиморфизмов, и пусть для каждого $a \in A$ зафиксирована база $\mathcal{U}_a$ множества $\text{cov}(X_a)$. Тогда множество $\cup\{p_a^{-1}(\mathcal{U}_a) : a \in A\}$ является базой множества $\text{cov}(X)$.

Будем говорить, что покрытие $u \in \text{cov}(X)$ почти n -мерно, если существует покрытие $v \in \text{cov}(X)$ кратности $\leq n + 1$, вписанное в u . Следующее утверждение очевидно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.6. Бикомпакт X имеет размерность $\dim X \leq n$ тогда и только тогда, когда в множестве $\text{cov}(X)$ имеется база, состоящая из почти n -мерных покрытий.

Напомним одно понятие. Пусть $f: Y \rightarrow Z$ – отображение. Малым образом множества $U \subset Y$ относительно отображения f называется множество

$$f^\#U \equiv \{z \in Z : f^{-1}(z) \subset U\}.$$

Если $f(Y) = Z$, то, как легко видеть, $f^\#U \subset f(U)$. Если отображение f замкнуто, в частности, если f есть непрерывное отображение между бикомпактами, то малый образ открытого множества открыт.

ЛЕММА 1.7. Пусть бикомпакт X является пределом обратного спектра $S = \{X_a, p_a^a, A\}$, состоящего из бикомпактов и эпиморфизмов, и пусть $\dim X \leq n$. Тогда для произвольных $a_0 \in A$ и $u \in \text{cov}(X_{a_0})$ существует $a_1 \in A$, $a_1 \geq a_0$, такое, что покрытие $(p_{a_0}^{a_1})^{-1}(u)$ почти n -мерно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\dim X \leq n$, существует конечное открытое покрытие v бикомпакта X , вписанное в $p_{a_0}^{-1}(u)$ и имеющее кратность $\leq n + 1$. Согласно предложению 1.4 существуют $a_1 \in A$ и $w \in \text{cov}(X_{a_1})$ такие, что покрытие $p_{a_1}^{-1}(w)$ вписано в v . Можно считать, что $a_1 \geq a_0$. Семейство

$$p_{a_1}^\#v = \{p_{a_1}^\#V : V \in v\}$$

состоит из открытых множеств и является покрытием пространства X_{a_1} , поскольку покрытие $p_{a_1}^{-1}(w)$ вписано в v . Далее, из определения малого образа вытекает, что $p_{a_1}^{-1}(p_{a_1}^\#V) \subset V$ для всякого $V \in v$. Значит, кратность покрытия $p_{a_1}^\#v$ не превосходит кратности покрытия v . Ясно также, что покрытие $p_{a_1}^\#v$ вписано в покрытие $(p_{a_0}^{a_1})^{-1}(u)$. Лемма 1.7 доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.8. Пусть A – направленное вверх частично упорядоченное множество. Говорят, что A сигма-полно, если для каждой возрастающей последовательности $a_i, i \in \omega$, его элементов в A существует ее точная верхняя грань. Подмножество B сигма-полного множества A называется замкнутым (в A), если точная верхняя грань произвольной возрастающей последовательности элементов из B принадлежит B .

Стандартным примером сигма-полного множества является множество τ^ω всех счетных подмножеств несчетного кардинального числа τ , упорядоченное отношением включения. Следующее очевидное утверждение вместе с только что упомянутым примером дает нам практически исчерпывающий запас сигма-полных множеств.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.9. *Замкнутое конфинальное подмножество сигма-полного множества сигма-полно.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.10 [7, предложение 1.2]. *Пересечение всякого счетного семейства замкнутых конфинальных подмножеств сигма-полного множества замкнуто и конфинально.*

Напомним, что обратный спектр $S = \{X_a, p_b^a, A\}$ называется *непрерывным*, если для всякого линейно упорядоченного множества $B \subset A$, имеющего точную верхнюю грань $a \in A$, пространство X_a естественно гомеоморфно пределу спектра $S|B = \{X_b, p_b^c, B\}$. Расшифруем, что значит “естественно”. Обозначим предел спектра $S|B$ через X^B . Предельные проекции $X^B \rightarrow X_b$ спектра $S|B$ обозначим через p_b^B . По определению предела обратного спектра существует единственное отображение $p: X_a \rightarrow X^B$, удовлетворяющее условию $p_b^B \circ p = p_b^a$ для всех $b \in B$. Так вот, это “естественное” отображение p и должно быть гомеоморфизмом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.11 [7]. Непрерывный спектр над сигма-полным множеством A , состоящий из метризуемых компактов и эпиморфизмов, называется *сигма-спектром*.

Эффект техники сигма-спектров проявляется только тогда, когда рассматриваются сигма-спектры, пределы которых неметризуемы (в противном случае все сводится к пределам обратных последовательностей). Существующие “в природе” примеры таких сигма-спектров дает следующая конструкция, успешно примененная в свое время Щепиным [7] для исследования различных свойств бикомпактов и отображений между ними.

ПРИМЕР 1.12. Пусть X – бикомпакт несчетного веса τ . Вложим его в тихоновский куб I^τ . Для счетного множества $a \subset \tau$ обозначим через X_a образ бикомпакта X при координатном проектировании $I^\tau \rightarrow I^a$. Если $b \subset a$, то через $p_b^a: X_a \rightarrow X_b$ обозначается ограничение проектирования $I^a \rightarrow I^b$ на компакт X_a . Легко видеть, что

$$S = \{X_a, p_b^a, \tau^\omega\}$$

есть сигма-спектр, пределом которого является бикомпакт X .

ЛЕММА 1.13. *Пусть бикомпакт X является пределом сигма-спектра $S = \{X_a, p_b^a, A\}$, и пусть $\dim X \leq n$. Тогда для произвольных $a_0 \in A$ и счетного семейства покрытий $u_i \in \text{cov}(X_{a_0})$ существует $a_1 \in A$, $a_1 \geq a_0$, такое, что каждое покрытие $(p_{a_0}^{a_1})^{-1}(u_i)$ почти n -мерно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 1.7 для всякого $u_i \in \text{cov}(X_{a_0})$ существует $b_i \in A$, $b_i \geq a_0$, такое, что покрытие $(p_{a_0}^{b_i})^{-1}(u_i)$ почти n -мерно. Поскольку множество A сигма-полно, существует $a_1 \in A$, мажорирующее все b_i . Этот элемент a_1 и будет искомым, поскольку прообраз почти n -мерного покрытия почти n -мерен. Лемма 1.13 доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.14. *Пусть бикомпакт X является пределом сигма-спектра $S = \{X_a, p_b^a, A\}$, и пусть $\dim X \leq n$. Тогда множество*

$$A_n = \{a \in A : \dim X_a \leq n\}$$

замкнуто и конфинально в A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Замкнутость множества A_n вытекает из непрерывности спектра S и того, что предел обратного спектра из компактов размерности $\leq n$ имеет размерность $\leq n$. Предположим, что A_n не конфинально A . Тогда существует $a_0 \in A$ такое, что

$$\dim X_a \geq n + 1 \quad \text{для всех } a \geq a_0. \quad (1.1)$$

Возьмем счетное семейство $u_i^{a_0}$, $i \in \omega$, конечных открытых покрытий компакта X_{a_0} , конфинальное в $\text{cov}(X_{a_0})$. Согласно лемме 1.13 существует $a_1 \in A$, $a_1 \geq a_0$, такое, что каждое покрытие $(p_{a_0}^{a_1})^{-1}(u_i^{a_0})$ почти n -мерно. То же самое сделаем со счетным семейством $u_i^{a_1}$, конфинальным в $\text{cov}(X_{a_1})$. Найдем $a_2 \geq a_1$ такое, что все покрытия $(p_{a_1}^{a_2})^{-1}(u_i^{a_1})$ почти n -мерны. Получаем возрастающую последовательность a_k , $k \in \omega$. Положим $b = \sup a_k$. Тогда семейство

$$\{(p_{a_k}^b)^{-1}(u_i^{a_k}) : i, k \in \omega\} \quad (1.2)$$

состоит из почти n -мерных покрытий, поскольку прообраз почти n -мерного покрытия при отображении “на” является почти n -мерным покрытием. Из предложения 1.5 и непрерывности спектра S вытекает, что семейство (1.2) является базой множества $\text{cov}(X_b)$. Поэтому из предложения 1.6 получаем, что $\dim X_b \leq n$. Но это противоречит условию (1.1). Предложение 1.14 доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.15. Здесь приведено элементарное доказательство предложения 1.14, являющегося основным утверждением п. 1. Это утверждение можно также доказать, применяя факторизационную теорему Мардешича [8] и спектральную теорему Шепина [7]. Но альтернативное доказательство, использующее два фундаментальных факта общей топологии, не получается короче. А учитывая то, что весь материал, предваряющий предложение 1.14, существенным образом используется в дальнейшем, приведенное доказательство наиболее оптимально в контексте данной статьи.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.16. Напомним, что для бикompакта Y через $\text{exp}^c Y$ обозначается множество всех его подконтинуумов, наделенное топологией Вьеториса. Для непустого (метризуемого) Y гиперпространство $\text{exp}^c Y$ является непустым (метризуемым) бикompактом, содержащим Y . Для непрерывного отображения $f: Y \rightarrow Z$ через $\text{exp}^c(f)$ обозначается непрерывное (в топологии Вьеториса) отображение $\text{exp}^c Y \rightarrow \text{exp}^c Z$, определяемое равенством $\text{exp}^c(f)(K) = f(K)$. Известно, что конструкция exp^c является ковариантным функтором в категории Comp бикompактов и их непрерывных отображений. Более того, этот функтор *непрерывен*, т.е. перестановочен с операцией перехода к пределу обратного спектра.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.17. Напомним, что семейство $\mathcal{B}$ замкнутых подмножеств пространства X называется его *большой базой*, если для всякого замкнутого множества $F \subset X$ и всякой его окрестности OF существует $B \in \mathcal{B}$ такое, что $F \subset B \subset OF$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.18. Легко видеть, что во всяком бикompакте X веса τ существует большая база мощности τ .

2. Леммы о разрезающих гранях. Будем пользоваться обозначениями примера 1.12. Для $a \in \tau^\omega$ положим $\tau_a^\omega = \{b \in \tau^\omega : a \subset b\}$. В этом пункте множество a фиксировано. Фиксируются также замкнутые непересекающиеся подмножества D_a и E_a

компакта X_a . Полагаем $D = p_a^{-1}(D_a)$, $E = p_a^{-1}(E_a)$. Фиксируем некоторый разрез C между D и E . Для $a \subset c \subset b \in \tau_a^\omega$ полагаем

$$\begin{aligned} C_{cb} &= (p_c^b)^{-1} p_c(C), & D_b &= p_b(D), & E_b &= p_b(E), \\ Y_b &= \{K \in \exp^c X_b : D_b \cap K \neq \emptyset \neq E_b \cap K\}, \\ Z_b &= \{K \in Y_b : C_{ab} \cap K = \emptyset\}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

ЛЕММА 2.1. *Для разреза C между D и E существует $a_0 \in \tau_a^\omega$ такое, что C_{aa_0} является разрезом между $D_{a_0} = p_{a_0}(D)$ и $E_{a_0} = p_{a_0}(E)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что утверждение леммы 2.1 не имеет места. Это означает, что

$$Z_b \neq \emptyset \quad \text{для всякого } b \in \tau_a^\omega. \quad (2.2)$$

Для $a \subset b_1 \subset b$ положим $e_{b_1}^b = \exp^c(p_{b_1}^b)$. Тогда

$$Z_b = (e_{b_1}^b)^{-1} Z_{b_1}. \quad (2.3)$$

В самом деле, в силу (2.1) множества C_{ab}, D_b, E_b являются прообразами множеств $C_{ab_1}, D_{b_1}, E_{b_1}$ при отображении $p_{b_1}^b$. Поэтому множество $K \subset X_b$ пересекается с одним из множеств C_{ab}, D_b, E_b тогда и только тогда, когда $p_{b_1}^b(K)$ пересекается с соответствующим из множеств $C_{ab_1}, D_{b_1}, E_{b_1}$. В частности, это так для любого континуума $K \subset X_b$. Отсюда равенство (2.3) и вытекает.

Отметим, что множество Y_b замкнуто в компакте $\exp^c X_b$, а множество Z_b открыто в Y_b . Следовательно, множество Z_a является суммой последовательности компактов $F_k, k \in \omega$. Положим

$$B_k = \{b \in \tau_a^\omega : (e_a^b)^{-1} F_k \neq \emptyset\}. \quad (2.4)$$

Из условия (2.2) и равенства (2.3) вытекает

$$\bigcup \{B_k : k \in \omega\} = \tau_a^\omega. \quad (2.5)$$

Поскольку τ_a^ω , как и никакое сигма-полное множество, нельзя представить в виде счетной суммы не конфинальных подмножеств, из равенства (2.5) вытекает существование $k_0 \in \omega$ такого, что

$$B_{k_0} \text{ конфинально } \tau_a^\omega. \quad (2.6)$$

Но из (2.3) и (2.4) вытекает, что каждое множество B_k насыщено вниз, т.е. $b \in B_k$ влечет $b_1 \in B_k$ для всех $b_1, a \subset b_1 \subset b$. Поэтому из (2.6) получаем

$$B_{k_0} = \tau_a^\omega. \quad (2.7)$$

Для $b \in \tau_a^\omega$ положим

$$\Phi_b = (e_a^b)^{-1} F_{k_0}. \quad (2.8)$$

Из (2.3), (2.7) и (2.8) вытекает

$$e_{b_1}^b(\Phi_b) \subset \Phi_{b_1} \quad (2.9)$$

(но это не означает, что $e_{b_1}^b(Z_b) \subset Z_{b_1}$).

Положим $\varepsilon_{b_1}^b = e_{b_1}^b|_{\Phi_b}$. Из (2.9) следует, что система $\Sigma = \{\Phi_b, \varepsilon_{b_1}^b, \tau_a^\omega\}$ является обратным спектром. Из (2.4) и (2.8) вытекает, что спектр Σ состоит из непустых компактов. По теореме Куроша бикомпакт $\Phi = \lim \Sigma$ не пуст. Далее, бикомпакт Φ в силу непрерывности функтора $\exp^c$ состоит из континуумов, лежащих в X . Возьмем континуум $K \in \Phi$. По определению отображений $e_{b_1}^b$ и $\varepsilon_{b_1}^b$ нить спектра Σ , соответствующая континууму K , состоит из континуумов $p_b(K)$, $b \in \tau_a^\omega$. Поэтому из (2.3) вытекает

$$p_a(K) \in F_{k_0} \subset Z_a. \quad (2.10)$$

Но это означает, что $p_a(K)$ пересекается с D_a и E_a и не пересекается с C_{aa} . Тогда континуум K пересекается с $D = p_a^{-1}(D_a)$ и $E = p_a^{-1}(E_a)$ и не пересекается с $C \subset p_a^{-1}(C_{aa})$. Но это противоречит тому, что C является разрезом между D и E . Лемма 2.1 доказана.

ЛЕММА 2.2. *Существует $b \in \tau_a^\omega$ такое, что множество $C_b = p_b(C)$ является разрезом между D_b и E_b .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Последовательно применяя лемму 2.1, находим растущую последовательность множеств $a_k \in \tau_{a_{k-1}}^\omega$, $k \in \omega$, такую, что

$$C_{a_k a_{k+1}} \text{ есть разрез между } D_{a_{k+1}} \text{ и } E_{a_{k+1}}. \quad (2.11)$$

Положим $b = \cup\{a_k : k \in \omega\}$. Из (2.1) вытекает, что $p_{a_k}^b(C_b) = C_{a_k a_k}$. Следовательно, компакт C_b является пределом обратной последовательности $\{C_{a_k a_k}, p_{a_{k-1}}^{a_k}, \omega\}$. Поэтому

$$C_b = \cap\{(p_{a_k}^b)^{-1}C_{a_k a_k} : k \in \omega\}. \quad (2.12)$$

Предположим, что C_b не является разрезом между D_b и E_b . Тогда существует континуум $K \in Y_b$ такой, что $K \cap C_b = \emptyset$. Из (2.12) вытекает существование $k \in \omega$ такого, что

$$K \cap (p_{a_k}^b)^{-1}C_{a_k a_k} = \emptyset. \quad (2.13)$$

Но

$$(p_{a_k}^b)^{-1}C_{a_k a_k} = (p_{a_{k+1}}^b)^{-1}(p_{a_k}^{a_{k+1}})^{-1}C_{a_k a_k}.$$

Поэтому из (2.13) вытекает, что

$$p_{a_{k+1}}^b(K) \cap (p_{a_k}^{a_{k+1}})^{-1}C_{a_k a_k} = \emptyset.$$

Но это противоречит условию (2.11), поскольку $C_{a_k a_{k+1}} = (p_{a_k}^{a_{k+1}})^{-1}(C_{a_k a_k})$ по определению, а $K \in Y_b$ влечет $p_{a_{k+1}}^b(K) \in Y_{a_{k+1}}$. Лемма 2.2 доказана.

Множество b из леммы 2.2 будем называть (C, D, E) -разрезающей гранью.

ЛЕММА 2.3. *Множество (C, D, E) -разрезающих граней замкнуто и конфинально τ_a^ω .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Конфинальность вытекает из леммы 2.2. Доказательство замкнутости фактически содержится в доказательстве леммы 2.2, но мы приведем его. Пусть множество $b \in \tau_a^\omega$ является суммой растущей последовательности (C, D, E) -разрезающих граней b_k . Тогда компакт X_b является пределом обратной последовательности $\Sigma = \{X_{b_k}, p_{b_k}^{b_{k+1}}, \omega\}$.

Предположив, что b не есть (C, D, E) -разрезающая грань, возьмем континуум $K \in Y_b$ такой, что $K \cap C_b = \emptyset$. Из равенства $X_b = \lim \Sigma$ вытекает существование k такого, что $p_{b_k}^b(K) \cap p_{b_k}^b(C_b) = \emptyset$. Ясно также, что $p_{b_k}^b(K) \in Y_{b_k}$. Итак, мы нашли континуум $p_{b_k}^b(K) \subset X_{b_k}$, соединяющий множества D_{b_k} и E_{b_k} и не пересекающийся с $p_{b_k}^b(C_b) = C_{b_k}$. Но это противоречит тому, что b_k является (C, D, E) -разрезающей гранью. Лемма 2.3 доказана.

3. Основная теорема.

ТЕОРЕМА 3.1. *Для всякого бикompакта X имеет место неравенство*

$$\dim X \leq \text{Dg } X.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Индукция по $k = \dim X$. Для метризуемого X результат вытекает из теоремы 1.3. Предположим, что неравенство $k \leq \text{Dg } X$ доказано для всех $k \leq n$. Предположим также, что нашелся неметризуемый бикompакт X веса τ , для которого $\dim X = n + 1$, но $\text{Dg } X \leq n$. В дальнейшем применяем обозначения примера 1.12. Поскольку $\dim X = n + 1$, множество тех $a \in \tau^\omega$, что $\dim X_a \leq n$, не может быть конфинально τ^ω . Следовательно, существует $a \in \tau^\omega$ такое, что

$$\dim X_b \geq n + 1 \quad \text{для всех } b \in \tau_a^\omega. \quad (3.1)$$

Для каждого $b \in \tau_a^\omega$ возьмем большую счетную базу $\mathcal{B}_b$ компакта X_b (см. замечание 1.18). Пусть $\{(D_b^{b,i}, E_b^{b,i}), i \in \omega\}$ – семейство всех дизъюнктивных пар элементов базы $\mathcal{B}_b$. Положим

$$D^{b,i} = p_b^{-1}(D_b^{b,i}), \quad E^{b,i} = p_b^{-1}(E_b^{b,i}). \quad (3.2)$$

Поскольку $\text{Dg } X \leq n$, в X существует разрез $C^{b,i}$ между $D^{b,i}$ и $E^{b,i}$ размерности $\text{Dg } C^{b,i} \leq n - 1$. Зафиксируем его. По предположению индукции

$$\dim C^{b,i} \leq n - 1. \quad (3.3)$$

Для $b, c \in \tau_a^\omega$ положим

$$C_b^{c,i} = p_b(C^{c,i}), \quad D_b^{c,i} = p_b(D^{c,i}), \quad E_b^{c,i} = p_b(E^{c,i}). \quad (3.4)$$

Для $c \in \tau_a^\omega$ положим

$$\mathcal{A}_{c,i} = \{b \in \tau_a^\omega : \dim C_b^{c,i} \leq n - 1\}, \quad (3.5)$$

$$\mathcal{A}^{c,i} = \{b \in \tau_a^\omega : b \text{ есть } (C^{c,i}, D^{c,i}, E^{c,i})\text{-разрезающая грань}\}. \quad (3.6)$$

Согласно (3.4) бикомпакт $C^{c,i}$ есть предел спектра $\{C_b^{c,i}, p_{b_1}^b, \tau_a^\omega\}$. Поэтому из (3.3) и предложения 1.4 вытекает, что $\mathcal{A}_{c,i}$ замкнуто и конфинально τ_a^ω . По лемме 2.3 множество $\mathcal{A}^{c,i}$ также замкнуто и конфинально τ_a^ω . Поэтому из предложения 1.10 вытекает, что множество

$$\mathcal{A}_c^i = \mathcal{A}_{c,i} \cap \mathcal{A}^{c,i} \quad (3.7)$$

также замкнуто и конфинально τ_a^ω . Положим

$$\mathcal{A}_c = \cap \{\mathcal{A}_c^i : i \in \omega\}.$$

Из (3.7) и предложения 1.10 вытекает, что

$$\mathcal{A}_c \text{ замкнуто и конфинально } \tau_a^\omega. \quad (3.8)$$

В частности, для любого конечного набора $a_1, \dots, a_m \in \tau_a^\omega$ множество $\mathcal{A}_{a_1} \cap \dots \cap \mathcal{A}_{a_m}$ не пусто. Поэтому можно определить последовательность $a_k \in \tau_a^\omega$, $k \in \omega$, подчиненную условию

$$a_k \in \mathcal{A}_{a_0} \cap \dots \cap \mathcal{A}_{a_{k-1}}. \quad (3.9)$$

Из определения множеств $\mathcal{A}_c$ вытекает свойство

$$a_{k-1} \subset a_k. \quad (3.10)$$

Положим $b_0 = \cup \{a_k : k \in \omega\}$ и покажем, что

$$\dim X_{b_0} \leq n. \quad (3.11)$$

Для этого в силу теоремы 1.3 достаточно доказать следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ (*). Для любых двух непересекающихся замкнутых подмножеств D и E компакта X_{b_0} между ними существует разрез C размерности $\dim C \leq n - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $X_{b_0} = \lim \{X_{a_k} : k \in \omega\}$, существует $k \geq 1$ такое, что $p_{a_k}^{b_0}(D) \cap p_{a_k}^b(E) = \emptyset$. Но $\mathcal{B}_{a_k}$ является большой базой компакта X_{a_k} . Поэтому существует дизъюнктивная пара $D_{a_k}^{a_k,i}, E_{a_k}^{a_k,i} \in \mathcal{B}_{a_k}$ такая, что $p_{a_k}^{b_0}(D) \subset D_{a_k}^{a_k,i}$, $p_{a_k}^{b_0}(E) \subset E_{a_k}^{a_k,i}$.

Покажем, что $C_{b_0}^{a_k,i}$ и есть искомый разрез C . Согласно (3.9) для любого $m > k$ имеем $a_m \in \mathcal{A}_{a_k} \subset \mathcal{A}^{a_k,i}$.

Поэтому из (3.6) вытекает, что a_m есть $(C_{a_k}^{a_k,i}, D_{a_k}^{a_k,i}, E_{a_k}^{a_k,i})$ -разрезающая грань. Из (3.10), определения множества b_0 и леммы 2.3 вытекает, что b_0 также является $(C_{a_k}^{a_k,i}, D_{a_k}^{a_k,i}, E_{a_k}^{a_k,i})$ -разрезающей гранью, т.е. $C_{b_0}^{a_k,i}$ есть разрез между $D_{b_0}^{a_k,i}$ и $E_{b_0}^{a_k,i}$. Тогда $C_{b_0}^{a_k,i}$ является разрезом и между меньшими множествами D и E . Из того же условия (3.9) вытекает, что $a_m \in \mathcal{A}_{a_k,i}$ при $m > k$.

Следовательно, $\dim C_{a_m}^{a_k,i} \leq n - 1$ согласно определению множества $\mathcal{A}_{c,i}$ (см. (3.5)). Но $C_{b_0}^{a_k,i} = \lim \{C_{a_m}^{a_k,i} : m > k\}$. Поэтому $\dim C_{b_0}^{a_k,i} \leq n - 1$. Утверждение (*) доказано.

Значит, имеет место неравенство (3.11). Но это противоречит неравенству (3.1). Теорема 3.1 доказана.

Из теоремы счетной суммы для размерности $\dim$ вытекает

СЛЕДСТВИЕ 3.2. *Для всякого σ -бикompактного пространства X выполнено неравенство*

$$\dim X \leq \text{Dg } X.$$

СЛЕДСТВИЕ 3.3. *Для всякого локально бикompактного линделёфова пространства X выполнено неравенство*

$$\dim X \leq \text{Dg } X.$$

Из следствия 3.3 и очевидной теоремы дискретной суммы для брауэровской размерности вытекает

СЛЕДСТВИЕ 3.4. *Для всякого локально бикompактного паракомпактного пространства X выполнено неравенство*

$$\dim X \leq \text{Dg } X.$$

СЛЕДСТВИЕ 3.5. *Если X – бикompакт и $\text{Dg } X = 1$, то $\dim X = 1$.*

Действительно, это утверждение вытекает из теоремы 3.1 и того, что равенства $\text{Dg } X = 0$ и $\dim X = 0$ равносильны.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.6. Существуют бикompакты X , для которых равенство $\text{Dg } X = \dim X$ не имеет места. В самом деле, в качестве X можно взять двумерный бикompакт B_2 без промежуточных размерностей [9]. Тогда X не содержит замкнутых одномерных подмножеств. Отсюда, в силу индуктивного определения инварианта Dg вытекает, что $\text{Dg } X = \infty$, в то время, как $\dim X = 2$. Отметим также, что бикompакт B_2 строится без дополнительных теоретико-множественных предположений и удовлетворяет первой аксиоме счетности.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Brouwer L. E. J. Über den natürlichen Dimensionsbegriff // J. Reine Angew. Math. 1913. V. 142. P. 146–152.
- [2] Brouwer L. E. J. Berichtigung zur Abhandlung “Über den natürlichen Dimensionbegriff”, dieses Journal Bd. 142 (1913), S. 146–152 // J. Reine Angew. Math. 1924. V. 153. P. 253.
- [3] Гуревич В., Волмэн Г. Теория размерности. М.: ИЛ, 1948.
- [4] Fedorchuk V. V., van Mill J. Dimensiongrad for locally connected Polish spaces // Fund. Math. 2000. V. 163. № 1. P. 77–82.
- [5] Федорчук В. В., Левин М., Щепин Е. В. О брауэровском определении размерности // УМН. 1999. Т. 54. № 2. С. 193–194.
- [6] Александров П. С., Пасынков Б. А. Введение в теорию размерности. М.: Наука, 1973.
- [7] Щепин Е. В. Функторы и несчетные степени компактов // УМН. 1981. Т. 36. № 3. С. 3–62.
- [8] Mardesic S. On covering dimension and inverse limits of compact spaces // Illinois J. Math. 1960. V. 4. № 2. P. 278–291.
- [9] Федорчук В. В. Бикompакты без промежуточных размерностей // Докл. АН СССР. 1973. Т. 213. № 4. С. 795–797.