Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Воловиков, К теореме ван Кампена–Флореса, *Матем. заметки*, 1996, том 59, выпуск 5, 663–670

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1760>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 12:26:18

К ТЕОРЕМЕ ВАН КАМПЕНА–ФЛОРЕСА

А. Ю. Воловиков

1. Обозначим через Δ^N симплекс размерности N и через Δ_k^N – его k -мерный остов. В начале 30-х ван Кампен [1] и Флорес [2] показали, что Δ_{s-1}^{2s} не вкладывается в $\mathbb{R}^{2s-2}$. Более точное утверждение, доказанное ими, состоит в следующем: для любого (непрерывного) отображения $f: \Delta_{s-1}^{2s} \rightarrow \mathbb{R}^{2s-2}$ найдутся непересекающиеся симплексы $\sigma_1, \sigma_2 \subset \Delta_{s-1}^{2s}$ такие, что $f(\sigma_1) \cap f(\sigma_2) \neq \emptyset$.

Теорему Радона [3], утверждающую, что любое подмножество из $N+2$ точек в $\mathbb{R}^N$ можно разбить на два непересекающихся подмножества, выпуклые оболочки которых имеют непустое пересечение, можно сформулировать похожим образом: для любого линейного отображения $f: \Delta^{N+1} \rightarrow \mathbb{R}^N$ найдутся попарно непересекающиеся грани σ_1, σ_2 симплекса Δ^{N+1} такие, что $f(\sigma_1) \cap f(\sigma_2) \neq \emptyset$. Бажмози и Барани [4] показали, что это утверждение остается верным для произвольного (непрерывного) отображения f . Аналогично, теорема Тверберга [5], обобщающая теорему Радона, допускает похожую на теорему ван Кампена–Флореса формулировку: для любого линейного $f: \Delta^N \rightarrow \mathbb{R}^m$, где $N = (m+1)(q-1)$ найдутся попарно непересекающиеся грани $\sigma_1, \dots, \sigma_q$ симплекса Δ^N такие, что $f(\sigma_1) \cap \dots \cap f(\sigma_q) \neq \emptyset$. В случае, когда q – простое число, Барани, Шлосман и Сюч [6] показали, что f в этом утверждении может быть произвольным.

В работе [7] Саркариа дал единообразное доказательство полученных в [1], [2], [4], [6] результатов. В частности, он получил следующее обобщение теоремы ван Кампена–Флореса: для любого $f: \Delta^{qs+q-2} \rightarrow \mathbb{R}^m$, где q – простое число и $m(q-1) \leq q(s-1)$, найдутся попарно непересекающиеся симплексы $\sigma_1, \dots, \sigma_q \subset \Delta_{s-1}^{qs+q-2}$ такие, что $f(\sigma_1) \cap \dots \cap f(\sigma_q) \neq \emptyset$.

Следуя [7], [8] назовем набор из q подмножеств некоторого множества j -дизъюнктным, где $2 \leq j \leq q$, если пересечение любых j подмножеств из

Работа выполнена при финансовой поддержке Международного научного фонда, грант JH2100.

этого q -набора пусто.

Сформулируем теперь основной результат настоящей заметки.

Пусть M – m -мерное топологическое многообразие (с краем или без), $q = p^n$, где p – простое число и $2 \leq j \leq q$.

ТЕОРЕМА. Пусть выполнено одно из следующих условий:

- 1) $N = s - 1$, $j > 2$ и $(N + 1)(j - 1) > (m + 1)(q - 1)$;
- 2) $N = s$, $j = 2$ и $N = (m + 1)(q - 1)$;
- 3) $N \geq s$ и существует натуральное k такое, что

$$(k + 1)(q - 1) + qs \geq (N + 1)(j - 1) > (k + m + 2)(q - 1).$$

Предположим, что задано непрерывное отображение $f: \Delta_{s-1}^N \rightarrow M$ такое, что $f^*: H^{s-1}(M) \rightarrow H^{s-1}(\Delta_{s-1}^N)$ – тривиальный гомоморфизм. Тогда найдется j -дизъюнктный q -набор симплексов $\sigma_1, \dots, \sigma_q \subset \Delta_{s-1}^N$ такой, что $f(\sigma_1) \cap \dots \cap f(\sigma_q) \neq \emptyset$.

Здесь и далее когомологии берутся с коэффициентами в поле $\mathbb{Z}_p$ из p элементов, которые исключаются из обозначений.

В случае 1) условие на f^* очевидным образом выполняется.

Из утверждения 3) теоремы при $j = 2$, $k = 0$ получаем следующее обобщение теоремы ван Кампена–Флореса.

СЛЕДСТВИЕ. Для $f: \Delta_{s-1}^{qs+q-2} \rightarrow M^m$ такого, что $m(q-1) \leq q(s-1)$ и $0 = f^*: H^{s-1}(M) \rightarrow H^{s-1}(\Delta_{s-1}^{qs+q-2})$ найдутся попарно непересекающиеся симплексы $\sigma_1, \dots, \sigma_q \subset \Delta_{s-1}^{qs+q-2}$ такие, что

$$f(\sigma_1) \cap \dots \cap f(\sigma_q) \neq \emptyset.$$

В случае, когда $q = p$ – простое число (т.е. $n = 1$) и $M = \mathbb{R}^m$, теорема превращается в результат Саркариа [7].

2. Пусть $G = \mathbb{Z}_p \times \dots \times \mathbb{Z}_p$ (n раз) – элементарная абелева группа (p -тор), где p – простое число. Обозначим $|G| = p^n$ через q .

Предположим, что G действует на паракомпakte X . Пусть $E_G \rightarrow B_G$ – универсальное главное G -расслоение и $X_G = X \times_G E_G = (X \times E_G)/G$ – тотальное пространство, ассоциированного с универсальным, расслоения $X_G \rightarrow B_G$ со слоем X . Положим $\Lambda^* = H^*(B_G) = H_G^*(\text{pt})$, где pt – точка, и $H_G^*(X) = H^*(X_G)$ (здесь H^* – когомологии Александрова–Чеха с коэффициентами в поле $\mathbb{Z}_p$) G -отображение $X \rightarrow \text{pt}$ индуцирует гомоморфизм $\Lambda^* \rightarrow H^*(X_G)$.

Скажем, что индекс G -пространства X равен N , если $\Lambda^i \rightarrow H_G^i(X)$ – мономорфизм в размерностях $\leq N$ и имеет ненулевое ядро в размерности

$N+1$ (нетрудно показать, что из мономорфности в размерности N следует мономорфность и в размерностях $< N$).

Нам понадобятся следующие свойства индекса.

- А) Если существует G -отображение из X в Y , то $\text{in } X \leq \text{in } Y$.
- В) Если $\tilde{H}^i(X) = 0$ при $i \leq N$, то $\text{in } X \geq N+1$.
- С) Пусть S либо компактно, либо паракомпактно и имеет конечную когомологическую размерность над полем $\mathbb{Z}_p$. Предположим, что S является k -мерной когомологической сферой над $\mathbb{Z}_p$, т.е. $H^*(S) \cong H^*(S^k)$, и что G действует на S без неподвижных точек. Тогда $\text{in } S = k$.
- Д) Пусть S – когомологическая сфера из свойства С). Тогда $\text{in}(X * S) \leq \text{in } X + \text{in } S + 1$ т.е. $\text{in } X \geq \text{in}(X * S) - k - 1$, где $X * S$ – джойн пространств X и S с диагональным действием группы G .

Свойство А) следует непосредственно из определения, свойство В) – из рассмотрения спектральной последовательности расслоения $X_G \rightarrow B_G$. Свойство С) вытекает из теоремы локализации Бореля [9]. Имеется класс $e \in \Lambda^{k+1}$, не являющийся делителем нуля в Λ^* , образ которого в $H_G^{k+1}(S)$ равен нулю (e – эйлеров класс расслоения на когомологические сферы $S_G \rightarrow B_G$).

Докажем свойство Д). Пусть $\alpha \in \Lambda^r$ – такой ненулевой класс, что образ α в $H_G^r(X)$ равен нулю, где $r = \text{in } X + 1$. Пространства X и S естественным образом вкладываются в $X * S$. Обозначим их образы теми же буквами. Поскольку $(X * S) \setminus S$ стягивается на $X \subset X * S$, образ α в $H_G^r((X * S) \setminus S)$ равен нулю. Аналогично, образ e в $H_G^{k+1}((X * S) \setminus X)$ равен нулю. Поскольку объединение указанных открытых подмножеств совпадает с $X * S$, из свойств $\cup$ -умножения легко следует, что образ αe в $H_G^{r+k+1}(X * S)$ равен нулю. Так как e не является делителем нуля, αe не равен нулю. Следовательно, $\text{in } X * S \leq r + k = \text{in } X + \text{in } S + 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Можно было определить индекс указанным выше способом для пространства с действием произвольной конечной группы. Однако в общем случае будут выполняться только свойства А) и В).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Индекс пространства со свободной инволюцией был введен Янгом в [10]. Индекс и близкие числовые инварианты подробно изучались в [11]–[13].

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если G действует свободно на X , то $H_G^*(X) = H^*(X/G)$ поэтому $\text{in } X \leq \dim X$.

Пусть K – симплициальный комплекс и $2 \leq j \leq q$. Определим $P_j^q(K) \subset K^q$ как объединение таких произведений $\sigma_1 \times \cdots \times \sigma_q$

симплексов из K , что q -набор симплексов $\sigma_1, \dots, \sigma_q \subset K$ является j -дизъюнктным.

Симметрическая группа Σ_q действует на K^q и на его подпространстве $P_j^q(K)$ перестановками координат. Поскольку $|G| = q$, можно вложить G в Σ_q (для этого упорядочим элементы G и рассмотрим G как G -множество, тогда каждый элемент определит некоторую подстановку).

Пусть $h: X \rightarrow M$ – отображение G -пространства X в пространство M . Положим

$$A(h) = \{x \in X \mid h(x) = h(gx) \quad \forall g \in G\}.$$

Для заданного отображения $f: K \rightarrow M$ определим $h: P_j^q(K) \rightarrow M$ формулой $h(z) = f(x_1)$, где $z = (x_1, \dots, x_q) \in P_j^q(K) \subset K^q$.

Тогда $A(h)$ состоит из таких $z = (x_1, \dots, x_q)$, что $f(x_1) = \dots = f(x_q)$, и существует j -дизъюнктивный q -набор $\sigma_1, \dots, \sigma_q$ симплексов из K такой, что $x_1 \in \sigma_1, \dots, x_q \in \sigma_q$.

Пусть $K = \Delta_{s-1}^N$ и $f: \Delta_{s-1}^N \rightarrow M$ – указанное в теореме отображение. Тогда для доказательства теоремы нужно установить, что $A(h)$ непусто, где $h: P_j^q(\Delta_{s-1}^N) \rightarrow M$ построено по f . Это выводится из следующего результата [14].

Пусть $h: X \rightarrow M$ – отображение CW-комплекса X с G -действием в m -мерное топологическое многообразие M , ориентируемое при $p > 2$. Предположим, что гомоморфизм $h^*: H^i(M) \rightarrow H^i(X)$ тривиален для всех $i \geq 1$. Тогда $\text{in } A(h) \geq \text{in } X - m(q-1)$, в частности, $A(h)$ непусто, если $\text{in } X \geq m(q-1)$.

Из условий теоремы легко следует, что $h^* = 0$ в размерностях ≥ 1 . Кроме того, при $p > 2$ можно считать, что M ориентируемо, поскольку из односвязности Δ_{s-1}^N при $s \geq 3$ следует, что вместо f можно рассмотреть его поднятие в универсальное накрытие. Таким образом, для доказательства теоремы остается только установить неравенство

$$\text{in } P_j^q(\Delta_{s-1}^N) \geq m(q-1). \quad (*)$$

Мы докажем это неравенство в следующем пункте с помощью результатов Саркариа [7], [8].

3. Обозначим через $J^q(X)$ джойн q экземпляров пространства X . Его можно реализовать как факторпространство $X^q \times \Delta^{q-1} / \sim$ по отношению эквивалентности

$$(x_1, \dots, x_q, t_1, \dots, t_q) \sim (x'_1, \dots, x'_q, t'_1, \dots, t'_q),$$

если $t_i = t'_i$ при всех i и $x_i = x'_i$ для тех i , для которых $0 \neq t_i = t'_i$ (здесь $x_i, x'_i \in X$ и точки симплекса Δ^{q-1} представляются векторами

$(t_1, \dots, t_q) \in \mathbb{R}^q$ с $t_i \geq 0$ и $\sum t_i = 1$). Образ точки (z, θ) , где $z = (x_1, \dots, x_q) \in X^q$ и $\theta = (t_1, \dots, t_q) \in \Delta^{q-1}$, в $J^q(X)$ обозначим через $[z, \theta]$.

Группа Σ_q действует на X^q , Δ^{q-1} и на $J^q(X)$ перестановками координат.

Для симплициального комплекса K при $2 \leq j \leq q$ можно определить два подпространства $\tilde{J}_j^q(K) \subset J_j^q(K)$ в $J^q(K)$, инвариантных относительно действия Σ_q . Подпространство $\tilde{J}_j^q(K) \subset J^q(K)$ определяется как объединение симплексов вида $\sigma_1 * \dots * \sigma_q$, где $\sigma_1, \dots, \sigma_q \subset K - j$ -дизъюнктный q -набор симплексов. Если считать, что джойн пространства с пустым множеством совпадает с самим пространством и рассмотреть объединение симплексов указанного выше вида, но допуская наличие пустых симплексов в q -наборе, то получится пространство $J_j^q(K)$, содержащее $\tilde{J}_j^q(K)$. Таким образом, $J_j^q(K)$ получается из $\tilde{J}_j^q(K)$ добавлением некоторых “граничных” точек пространства $J^q(K)$ (граничная точка имеет вид $[z, \theta]$, где $\theta \in \partial \Delta^{q-1} = \Delta_{q-2}^{q-1}$).

Саркариа показал (см. [7], [8]), что

$$\pi_i(J_j^q(\Delta^N)) = 0 \quad \text{при } i \leq (N+1)(j-1) - 2.$$

Поэтому, рассматривая $J_j^q(\Delta^N)$ как G -пространство, из свойства В) индекса имеем

$$\text{in } J_j^q(\Delta^N) \geq (N+1)(j-1) - 1. \quad (**)$$

Определим Σ_q -отображение (и, следовательно, G -отображение)

$$J^q(X) \rightarrow X^q * \Delta_{q-2}^{q-1}$$

следующим образом. Отобразим точку $[z, \theta_0]$, где θ_0 — барицентр симплекса Δ^{q-1} , в $z \in X^q \subset X^q * \Delta_{q-2}^{q-1}$ и точку $[z, \theta]$, где $\theta \in \Delta_{q-2}^{q-1}$, в $\theta \in \Delta_{q-2}^{q-1} \subset X^q * \Delta_{q-2}^{q-1}$. Далее продолжим это отображение “по линейности”, используя тот факт, что Δ^{q-1} является конусом над Δ_{q-2}^{q-1} с вершиной в барицентре. Если $X = K$ — симплициальный комплекс, то ограничив указанное отображение на $J_j^q(K)$ получим Σ_q -отображение $J_j^q(K) \rightarrow P_j^q(K) * \Delta_{q-2}^{q-1}$. Используя свойства А), С) и D) индекса, получаем

$$\text{in}(P_j^q(K) * \Delta_{q-2}^{q-1}) \geq \text{in } J_j^q(K), \quad \text{in } P_j^q(K) + \text{in } \Delta_{q-2}^{q-1} + 1 \geq \text{in } J_j^q(K)$$

и $\text{in } \Delta_{q-2}^{q-1} = q - 2$ (поскольку $\Delta_{q-2}^{q-1} \cong S^{q-2}$). Поэтому

$$\text{in } P_j^q(K) \geq \text{in } J_j^q(K) - q + 1,$$

и из (***) следует, что

$$\text{in } P_j^q(\Delta^N) \geq (N+1)(j-1) - q.$$

Это неравенство, очевидно, дает (*) в случаях 1) и 2) теоремы. (В случае 2) используется также тот факт, что $P_2^q(\Delta_{N-1}^N) = P_2^q(\Delta^N)$.)

Докажем теперь неравенство (*) в случае 3) теоремы.

В [8] Саркариа показал, что при $(N+1)(j-1) \leq (k+1)(q-1) + qs$ имеется Σ_q -отображение

$$J_j^q(\Delta^N) \rightarrow J_j^q(\Delta_{s-1}^N) * J_q^q(\Delta^k).$$

Поскольку $J_q^q(\Delta^k) \cong S^{(k+1)(q-1)-1}$ (см. [8]), из неравенства (***) и свойств A), C), D) индекса получаем

$$\text{in } J_j^q(\Delta_{s-1}^N) \geq (N+1)(j-1) - (k+1)(q-1) - 1.$$

Используя Σ_q -отображение

$$J_j^q(\Delta_{s-1}^N) \rightarrow P_j^q(\Delta_{s-1}^N) * \Delta_{q-2}^{q-1}$$

и снова применяя свойства A), C), D) индекса, имеем

$$\text{in } P_j^q(\Delta_{s-1}^N) \geq (N+1)(j-1) - (k+2)(q-1) - 1,$$

что в силу второго неравенства в условии 3) теоремы дает требуемое неравенство (*).

Ван Кампен [1] и Флорес [2] рассмотрели также случай джойнов комплексов вида Δ_{s-1}^{2s} . В частности, они показали, что такие комплексы нельзя вложить в евклидово пространство удвоенной размерности. В [7] дано обобщение этого утверждения. Приведем соответствующий результат, обобщающий [7].

Как и выше, пусть $q = p^n$, $2 \leq j \leq q$ и $M - m$ -мерное топологическое многообразие.

Пусть для некоторых k_i при $i = 1, \dots, l$ выполнены неравенства

$$(k_i + 1)(q - 1) + qs_i \geq (N_i + 1)(j - 1).$$

Положим

$$K = \Delta_{s_1-1}^{N_1} * \dots * \Delta_{s_l-1}^{N_l}.$$

Предположим, что задано $f: K \rightarrow M$ такое, что $f^* = 0$ в размерности $s_1 + \dots + s_l - 1$. Тогда если

$$(N_1 + \dots + N_l + l)(j - 1) > (m + k_1 + \dots + k_l + l + 1)(q - 1),$$

то существует j -дизъюнктивный q -набор симплексов $\sigma_1, \dots, \sigma_q$ из K такой, что $f(\sigma_1) \cap \dots \cap f(\sigma_q) \neq \emptyset$.

Доказательство проводится по схеме доказательства теоремы. Поскольку $\Delta_{s_i-1}^{N_i}$ — букет $(s_i - 1)$ -мерных сфер, K гомотопически эквивалентно букету $(s_1 + \dots + s_l - 1)$ -мерных сфер. Поэтому $f^* = 0$ во всех размерностях ≥ 1 . Остается показать, что $\text{in } P_j^q(K) \geq m(q - 1)$. Из [7], [8] следует, что при каждом i существует Σ_q -отображение

$$J_j^q(\Delta^{N_i}) \rightarrow J_j^q(\Delta_{s_i-1}^{N_i}) * J_q^q(\Delta^{k_i}).$$

Взяв джойн этих отображений и используя легко устанавливаемый (см. [8]) Σ_q -гомеоморфизм пространств $J_j^q(L_1 * L_2)$ и $J_j^q(L_1) * J_j^q(L_2)$ (аналогичное верно и для $\tilde{J}_j^q$), где L_1, L_2 — симплициальные комплексы, получаем Σ_q -отображение

$$J_j^q(\Delta^{N_1 + \dots + N_l + l - 1}) \rightarrow J_j^q(K) * J_q^q(\Delta^{k_1 + \dots + k_l + l - 1}).$$

Следовательно,

$$\text{in } J_j^q(K) \geq (N_1 + \dots + N_l + l)(j - 1) - (k_1 + \dots + k_l + l)(q - 1) - 1.$$

Поэтому

$$\text{in } P_j^q(K) \geq (N_1 + \dots + N_l + l)(j - 1) - (k_1 + \dots + k_l + l + 1)(q - 1) \geq m(q - 1),$$

что и требовалось установить.

В качестве следствия при $q = 2$ получаем, что если $K = \Delta_{s_1-1}^{2s_1} * \dots * \Delta_{s_l-1}^{2s_l}$ и $f: K \rightarrow M$ — такое отображение в $2(s_1 + \dots + s_l - 1)$ -мерное топологическое многообразие, что $f^* = 0$ в размерности $s_1 + \dots + s_l - 1$, то найдутся непересекающиеся симплексы σ_1, σ_2 из K такие, что $f(\sigma_1) \cap f(\sigma_2) \neq \emptyset$. В частности, K не вкладывается в $2(s_1 + \dots + s_l - 1)$ -мерное многообразие, у которого тривиальна $(s_1 + \dots + s_l - 1)$ -мерная группа когомологий с коэффициентами в поле $\mathbb{Z}_2$. Отметим, что равенство $\text{in } P_2^2(K) = 2(s_1 + \dots + s_l - 1)$ можно установить также с помощью обнаруженного Флоресом [2] интересного геометрического факта, что $\tilde{J}_2^2(\Delta_{s-1}^{2s})$ и $(2s - 1)$ -мерная сфера (с антиподальной инволюцией) $\mathbb{Z}_2$ -гомеоморфны.

ЗАМЕЧАНИЕ. Используя джойны, Саркариа дал в [8] короткое доказательство гипотез Кнезера и Эрдеша в комбинаторной теории. Небольшое обобщение этого доказательства позволяет легко получить нижнюю оценку Криза [15] для хроматического числа определенного в [15] q -графа пересечений (см. [15, теорема 2.4]), по крайней мере для случая, когда q является степенью простого числа. (Результаты Криза [15] основаны на теореме типа Борсука–Улама для действия циклической группы произвольного порядка, см. [15, теорема 2.6]. Однако импликация (2) $\implies$ (3) в этой теореме, верная для групп простого порядка, в общем случае несправедлива, см. по этому поводу работу Манкхольма [16].)

Московский институт
радиоэлектроники и автоматики

Поступило
21.06.94

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Van Kampen E. R. Komplexe in euklidischen Raumen // Abh. Math. Sem. Hamburg. 1932. V. 9. P. 72–78.
- [2] Flores A. Über n -dimensionale Komplexe die im R_{2n+1} absolut selbstverschlungen sind // Ergeb. Math. Kolloq. 1933–34. V. 6. P. 4–7.
- [3] Radon J. Mengen konvexer Körper, die einen gemeinsamen Punkt enthalten // Math. Ann. 1921. V. 83. P. 113–115.
- [4] Bajmóczy E. G., Bárány I. On common generalization of Borsuk's and Radon's theorem // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 1979. V. 34. P. 347–350.
- [5] Tverberg H. A generalization of Radon's theorem // J. London Math. Soc. 1966. V. 41. P. 123–128.
- [6] Bárány I., Shlossman S. B., Szücs A. On topological generalization of a theorem of Tverberg // J. London Math. Soc. 1981. V. 23. P. 158–164.
- [7] Sarkaria K. S. A generalized van Kampen–Flores theorem // Proc. Amer. Math. Soc. 1991. V. 111. № 2. P. 559–565.
- [8] Sarkaria K. S. A generalized Kneser conjecture // J. Combin. Theory. Ser. B. 1990. V. 49. P. 236–240.
- [9] Сян У. И. Когомологическая теория топологических групп преобразований. М.: Мир, 1979.
- [10] Yang C. T. On theorems of Borsuk–Ulam, Kakutani–Yamabe–Yujobo and Dyson. I // Ann. of Math. 1954. V. 60. P. 262–282.
- [11] Шварц А. С. Некоторые оценки рода топологического пространства в смысле Красносельского // УМН. 1957. Т. 12. № 4. С. 209–214.
- [12] Шварц А. С. Род расслоенного пространства // Тр. ММО. 1962. Т. 11. С. 99–126.
- [13] Conner P. E., Floyd E. E. Fixed point free involutions and equivariant maps // Bull. Amer. Math. Soc. 1960. V. 66. P. 416–441.
- [14] Воловиков А. Ю. Теорема типа Буржена–Янга для $\mathbb{Z}_p^n$ -действия // Матем. сб. 1992. Т. 183. № 7. С. 115–144.
- [15] Kriz I. Equivariant cohomology and lower bounds for chromatic numbers // Trans. Amer. Math. Soc. 1992. V. 333. № 2. P. 567–577.
- [16] Munkholm H. J. On the Borsuk–Ulam theorem for $\mathbb{Z}_{p^\alpha}$ actions on S^{2n-1} and maps $S^{2n-1} \rightarrow \mathbb{R}^m$ // Osaka J. Math. 1970. V. 7. P. 451–456.