Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Волчков, Экстремальные варианты проблемы Помпейю, *Матем. заметки*, 1996, том 59, выпуск 5, 671–680

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1761>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 14:06:53

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ВАРИАНТЫ ПРОБЛЕМЫ ПОМПЕЙЮ

В. В. Волчков

1. Введение. Пусть $M(n)$ – группа изометрий вещественного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Компактное множество $K \subset \mathbb{R}^n$ называется множеством Помпейю, если всякая локально суммируемая функция f ($f \in L_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$), для которой

$$\int_{\sigma K} f(u) du = 0 \quad \text{для всех } \sigma \in M(n), \quad (1)$$

равна нулю почти всюду. Классическая проблема Помпейю об описании таких K изучалась многими авторами (см. обзор [1] с обширной библиографией).

Большой интерес представляют “локальные” варианты проблемы Помпейю: например, когда f задана в шаре $B \subset \mathbb{R}^n$ и (1) выполнено при всех $\sigma K \subset B$. В этом случае для широкого класса множеств K следует, что $f = 0$ в B , если только размеры B достаточно велики по сравнению с K (см. [2]). В связи с этим возникает задача о нахождении минимального радиуса $r = r(K)$ шара B с этим свойством. До настоящего времени точное значение $r(K)$ не было известно ни при каком K . Вместе с тем известен ряд результатов (см. [2], [3]), содержащих оценки $r(K)$ для многих K .

В данной работе получено полное решение поставленной задачи в следующих случаях:

- а) $K = [0, 1]^n$ – единичный куб;
- б) K – единичный полушар, т.е. $K = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq 0, |x| \leq 1\}$, где $|\cdot|$ – евклидова норма в $\mathbb{R}^n$.

2. Основные результаты. Пусть $B_r = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\}$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $f \in L_{\text{loc}}(B_r)$ и для любого единичного куба $K \subset B_r$

$$\int_K f(u) du = 0. \quad (2)$$

Тогда справедливы следующие утверждения.

- 1) Если $r \geq \frac{1}{2}\sqrt{n+3}$, то $f = 0$.
- 2) При $r < \frac{1}{2}\sqrt{n+3}$ существуют ненулевые функции класса $C^\infty(B_r)$ с условием (2).

Отметим, что при $r > \sqrt{n}$ первое утверждение теоремы 1 было получено Беренстейном и Гэем [2], [3]. При $r > \frac{1}{2}\sqrt{n+3}$ этот результат получил автор [4].

ТЕОРЕМА 2. Пусть $f \in L_{\text{loc}}(B_r)$ и для любого единичного полушара $P \subset B_r$

$$\int_P f(u) du = 0. \quad (3)$$

Тогда выполнены следующие утверждения.

- 1) Если $r \geq \sqrt{5}/2$, то $f = 0$.
- 2) При $r < \sqrt{5}/2$ существуют ненулевые функции класса $C^\infty(B_r)$ с условием (3).

При $r > 2$ первое утверждение теоремы 2 следует из общей оценки для $r(K)$ (см. [2], [3]). Отметим также [5], где подобная задача изучалась на $\mathbb{R}^2$.

3. Вспомогательные утверждения. Здесь мы введем необходимые обозначения и докажем некоторые утверждения, представляющие самостоятельный интерес.

Пусть ρ, σ – полярные координаты в $\mathbb{R}^n$ (для $x \in \mathbb{R}^n$ $\rho = |x|$, а если $x \neq 0$, то $\sigma = x/\rho$), $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$, $\text{SO}(n)$ – группа вращений с нормированной мерой Хаара dg . Обозначим $T(g)$ квазирегулярное представление (для $f \in L^2(\Omega)$ $(T(g)f)(\sigma) = f(g^{-1}\sigma)$, где $\sigma \in \Omega$, $g \in \text{SO}(n)$). Как известно (см. [6, с. 442]), $T(g)$ является прямой суммой попарно неэквивалентных неприводимых унитарных представлений $T^k(g)$, действующих на пространствах H_k однородных гармонических полиномов степени k . Пусть $\{Y_l^{(k)}\}$ ($1 \leq l \leq a_k$) – ортонормированный базис в H_k (пространство H_k рассматривается как подпространство $L^2(\Omega)$), $\{t_{lp}^k\}$ ($1 \leq l, p \leq a_k$) – матрица представления $T^k(g)$:

$$(T^k(g)Y_l^{(k)})(\sigma) = Y_l^{(k)}(g^{-1}\sigma) = \sum_{p=1}^{a_k} t_{lp}^k(g)Y_p^{(k)}(\sigma). \quad (4)$$

Всякой функции $f \in L_{\text{loc}}(B_r)$ соответствует ряд Фурье

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{a_k} f_{kl}(\rho)Y_l^{(k)}(\sigma), \quad 0 < \rho < r, \quad (5)$$

где

$$f_{kl}(\rho) = \int_{\Omega} f(\rho\sigma) \overline{Y_l^{(k)}(\sigma)} d\sigma. \quad (6)$$

Для последовательности f_{kl} , определенной формулой (6), имеется другое представление (см. [7]):

$$f_{kl}(\rho) Y_p^{(k)}(\sigma) = a_k \int_{\text{SO}(n)} f(\rho g^{-1}\sigma) \overline{t_{lp}^k(g)} dg. \quad (7)$$

Обозначим $\mathcal{D}(B_r)$ – множество функций $f \in C^\infty(B_r)$ с компактным носителем, $\mathcal{D}_0(B_r)$ – множество радиальных (зависящих только от ρ) функций из $\mathcal{D}(B_r)$. Для $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ положим $[x] = x_1$. Пусть еще $\chi_r = \chi_r(x)$ – характеристическая функция (индикатор) шара B_r , Δ – оператор Лапласа, $\varphi * \psi$ – свертка функций φ и ψ . Символами $c, c_1, c_2, \dots$ обозначаются комплексные постоянные, которые в разных случаях, вообще говоря, разные.

Получим теперь общее решение одного функционального уравнения, впервые рассмотренного в [5].

ТЕОРЕМА 3. Пусть $0 < \delta < 1$, $K_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n : 1 - \delta < |x| < 1 + \delta\}$, $f \in C(K_\delta)$ и при всех $u, v \in \Omega$, $w \in B_\delta$

$$f(w + u) + f(w - u) = f(w + v) + f(w - v). \quad (8)$$

Тогда

$$f(x) = c_1|x|^2 + c_2(x, y) + c_3, \quad (9)$$

где $y \in \Omega$, $(\cdot, \cdot)$ – скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$. Обратно, всякая функция вида (9) удовлетворяет (8).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть S_n – множество функций $f \in C^\infty(K_\delta)$, удовлетворяющих (8). Если $n = 2$, то для $f = f(x, y) \in S_2$ при $\alpha \in \mathbb{R}^1$, $|t| < \delta$ имеем

$$f(t + 1, 0) + f(t - 1, 0) = f(t + \cos \alpha, \sin \alpha) + f(t - \cos \alpha, -\sin \alpha).$$

Дифференцируя по α и полагая $\alpha = 0$, получим

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1 + t, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(t - 1, 0). \quad (10)$$

Далее точка $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ отождествляется с комплексным числом $z = x + iy$. Изучим функции вида $f_k = u_k(|z|)z^k \in S_2$, $k = 0, 1, \dots$

При $k = 1$ из (10) следует, что

$$u'_1(1+t) = -u'_1(1-t). \quad (11)$$

Далее, вместе с f и все частные производные от f очевидно принадлежат S_2 . Применяя (11) к функции $\partial^2 f / \partial y^2$ получим

$$\frac{u'_1(1+t)}{1+t} = \frac{u'_1(1-t)}{1-t} \quad \text{при } |t| < \delta.$$

Отсюда и из (11) следует, что $f_1 = cz$.

Докажем теперь индукцией по $k = 2, 3, \dots$, что $f_k = 0$. При $k = 2$ имеем $\partial f_2 / \partial z = z(u'_2(|z|)/|z| + 2u(|z|)/|z|^2) \in S_2$ и по доказанному выше $f_2 = z(c_1|z|^{-3} + c_2|z|)$. Легко проверить, что такие функции принадлежат S_2 только при $c_1 = c_2 = 0$. Предположим, что при некотором $k \geq 2$ всякая $f_k \in S_2$ равна нулю. Пусть $f_{k+1} \in S_2$, тогда $\partial f_{k+1} / \partial z = z^k(u'_{k+1}(|z|)|z|^{-k} + (k+1)u_{k+1}(|z|)|z|^{-k-1})$ и по предположению индукции $f_{k+1} = c|z|^{-2k-2}z^{k+1}$. Поскольку $f_{k+1} \in S_2$, $c = 0$ и $f_{k+1} = 0$.

Пусть $k = 0$, $f_0 \in S_2$. Тогда $\partial f_0 / \partial z = u'_0(|z|)z/|z| \in S_2$ и по доказанному выше $f_0 = c_1|z|^2 + c_2$.

Рассмотрим теперь произвольную функцию $f \in S_n$, $n \geq 2$. Поскольку $\forall g \in \text{SO}(n) \quad f(gx) \in S_n$, из (7) следует, что $f_{kl}(\rho)Y_p^{(k)}(\sigma) \in S_n$ при всех $1 \leq l, p \leq a_k$, $k = 0, 1, \dots$. Тогда для любого $Y \in H_k \quad f_{kl}(\rho)Y(\sigma) \in S_n$. Положим $Y(\sigma) = (\sigma_1 + i\sigma_2)^k$ и рассмотрим сужение $f_{kl}(\rho)Y(\sigma)$ на плоскость $\{x \in \mathbb{R}^n : x_i = 0 \text{ при } i > 2\}$. Тогда $f_{kl}(|z|)z^k|z|^{-k} \in S_2$ и по доказанному выше $f_{kl} = 0$ при $k \geq 2$, $f_{1l} = c\rho$, $f_{0l} = c_1\rho^2 + c_2$. Отсюда следует утверждение теоремы 3 для $f \in S_n$. Пусть теперь $f \in C(K_\delta)$ и удовлетворяет (8). Тогда f можно приблизить равномерно на компактах в K_δ свертками вида $f * \varphi_\varepsilon \in C^\infty$, где $\varphi_\varepsilon \in \mathcal{D}(B_\varepsilon)$ (см. [8, с. 17]). Очевидно, при $\varepsilon < \delta$ такие свертки удовлетворяют (8) при всех $u, v \in \Omega$, $w \in B_{\delta-\varepsilon}$. По доказанному выше такие свертки имеют вид (9) и в силу замкнутости конечномерного линейного многообразия в банаховом пространстве при $\varepsilon \rightarrow 0$ получаем, что f также имеет вид (9).

Обратное утверждение теоремы 3 тривиально.

Докажем теперь теорему единственности для функций с нулевыми шаровыми средними.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $r > 1$, $0 < \alpha < \beta \leq r - 1$, $f \in L_{\text{loc}}(B_r)$ и имеет нулевые интегралы по всем замкнутым единичным шарам, содержащимся в B_r . Тогда справедливы следующие утверждения.

1) Если $f = 0$ в кольце $1 - \alpha < |x| < 1 + \beta$, то $f = 0$ и в кольце $1 - \beta < |x| < 1 + \beta$.

2) Если $f = 0$ в кольце $1 - \beta < |x| < 1 + \alpha$, то $f = 0$ и в кольце $1 - \beta < |x| < 1 + \beta$.

Для доказательства потребуется

ЛЕММА 1. Пусть $u \in \mathcal{D}_0(B_r)$. Тогда уравнение

$$\int_{\text{SO}(n)} h([gx]) dg = u(x) \quad (12)$$

имеет единственное решение h в классе четных непрерывных на $[-r, r]$ функций.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Уравнение (12) можно переписать в виде $u(x) = \int_{\Omega} h([\rho\sigma]) d\sigma$ (см. [8, с. 46]). При четных h последнее уравнение сводится к уравнению Абеля [9, с. 126], откуда следует утверждение леммы 1.

Оба утверждения теоремы 4 достаточно доказать для радиальной функции $f \in C^\infty(B_r)$ (см. конец доказательства теоремы 3, а также [10, доказательство леммы 2]). Поэтому далее считаем $f(x) = F(\rho)$, где $F \in C^\infty[0, r)$. Положим $F = 0$ на $[r, \infty)$.

Докажем первое утверждение. Пусть $0 < \varepsilon < \alpha/2$, $\psi_\varepsilon \in \mathcal{D}_0(B_\varepsilon)$, $\psi_\varepsilon \geq 0$, $\int_{B_\varepsilon} \psi_\varepsilon(x) dx = 1$, $\varphi = \psi_\varepsilon * \chi_1$. Тогда $\varphi \in \mathcal{D}_0(B_{1+\varepsilon})$ и при $|y| < r - 1 - \varepsilon$

$$\int_{B_r} f(x) \varphi(y - x) dx = 0. \quad (13)$$

Пусть $h = h([x])$ – решение (12) при $u = \varphi$. Из определения φ и свойств ψ_ε имеем $\varphi = 1$ в $B_{1-\varepsilon}$, $0 \leq \varphi < 1$ вне $B_{1-\varepsilon}$. По лемме 1 отсюда $h = 1$ в $B_{1-\varepsilon}$ и при любом $\gamma > 0$

$$\text{supp}(h - 1) \cap B_{1-\varepsilon+\gamma} \neq \emptyset. \quad (14)$$

Пусть $v([y]) = (h * F)(y)$, тогда $\forall g \in \text{SO}(n)$ $v([gy]) = \int_{\mathbb{R}^n} h([gx]) F(|y - x|) dx$. Интегрируя это равенство по $\text{SO}(n)$, из (13), определения h и леммы 1 при $u = 0$ получим $v([y]) = 0$ в $B_{r-1-\varepsilon}$. Тогда

$$((h - 1) * F)(y) = - \int_{\mathbb{R}^n} F(|x|) dx, \quad y \in B_{r-1-\varepsilon}. \quad (15)$$

Пусть $\Phi = F$ на $[0, 1 + \beta)$, $\Phi = 0$ на $[1 + \beta, \infty)$, $\eta = \Delta(\Phi(|x|))$. Тогда из (15) при $|y| < \beta - \varepsilon$ имеем

$$\int_{\mathbb{R}^n} (h([x]) - 1) \eta(|y - x|) dx = 0. \quad (16)$$

Далее проверяются известные рассуждения [10, доказательство леммы 2]: уравнение (16) приводится к уравнению Вольтерра первого рода, затем из теоремы Титчмарша [11, с. 608], теоремы о носителе [9, с. 125] и (14) получаем $F = 0$ на $(1 - \beta + \varepsilon, 1 + \beta)$. В силу произвольности ε отсюда следует первое утверждение теоремы 4.

Для доказательства второго утверждения этой теоремы положим $H(x) = f(x)$ в $B_{1+\alpha}$, $H(x) = 0$ при $1 + \alpha \leq |x| \leq 1 + \beta$. Тогда функции $f, H, f - H$ удовлетворяют (13) при $|y| < \beta - \varepsilon$ (поскольку $\varphi = 1$ в $B_{1-\varepsilon}$, $\varphi = 0$ вне $B_{1+\varepsilon}$). Так как $f - H = 0$ в $B_{1+\alpha}$ из [10] получаем, что $f = H$ в $B_{1+\beta-\varepsilon}$. Из произвольности ε и определения H получаем второе утверждение теоремы 4.

4. Доказательство теоремы 1. Пусть $r > \sqrt{n}/2$. Обозначим $\mathcal{K}_r$ — класс функций $f \in C^\infty(B_r)$, имеющих нулевые интегралы по всем единичным кубам $K \subset B_r$. Нам потребуются следующие простые свойства $\mathcal{K}_r$, которые уже использовались в предшествующих работах.

ЛЕММА 2. Пусть $f \in \mathcal{K}_r$. Тогда справедливы следующие утверждения.

1) $f(gx) \in \mathcal{K}_r$ для любого $g \in \text{SO}(n)$.

2) Каждое слагаемое ряда (5), доопределенное по непрерывности в точке $x = 0$, принадлежит $\mathcal{K}_r$.

3) Все частные производные f принадлежат $\mathcal{K}_r$.

$$4) \int_{K_{n-1}} f\left(x_1, \dots, x_{n-1}, -\frac{1}{2}\right) d\mu = \int_{K_{n-1}} f\left(x_1, \dots, x_{n-1}, \frac{1}{2}\right) d\mu,$$

где $d\mu = dx_1 \cdots dx_{n-1}$, $K_{n-1} = [-1/2, 1/2]^{n-1}$.

$$5) \int_{K_{n-2}} f\left(x_1, \dots, x_{n-1}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) d\nu + \int_{K_{n-2}} f\left(x_1, \dots, x_{n-1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) d\nu = \int_{K_{n-2}} f\left(x_1, \dots, x_{n-2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) d\nu + \int_{K_{n-2}} f\left(x_1, \dots, x_{n-2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) d\nu,$$

где $n > 2$, $d\nu = dx_1 \cdots dx_{n-2}$, $K_{n-2} = [-1/2, 1/2]^{n-2}$.

6) Пусть $r < \frac{1}{2}\sqrt{n+3}$, B — пересечение всех единичных кубов $K \subset B_r$. Тогда, если f — многочлен в $B_r \setminus B$, то $f = c$ в $B_r \setminus B$.

7) Пусть $f(x) = F(|x|)P(x)$, где P — однородный гармонический многочлен степени $k \geq 1$. Тогда для любого однородного гармонического многочлена Q степени $k-1$ функция $(|x|F'(|x|) + (n+2k-2)F(|x|))Q(x)$ принадлежит $\mathcal{K}_r$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение леммы 2 очевидно. Второе утверждение сразу следует из первого и формулы (7). Для доказательства третьего утверждения достаточно продифференцировать свертку f с

индикатором единичного куба. Утверждения 4, 5 легко получить, интегрируя по кубу $[-1/2, 1/2]^n$ функции $\partial f / \partial x_n \in \mathcal{K}_r$, $\partial^2 f / \partial x_{n-1} \partial x_n \in \mathcal{K}_r$. Утверждение 6 очевидно, если f – полином не выше первой степени в $B_r \setminus B$. В общем случае нужно сначала понизить степень f дифференцированием, а затем воспользоваться утверждением 3. Доказательство утверждения 7 содержится в работе [7].

ЛЕММА 3. Пусть $r = \frac{1}{2}\sqrt{n+2}$, $f \in \mathcal{K}_r$. Тогда $f = c$ в кольце $1 - \sqrt{3}/2 < |x| < r$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из утверждений 1, 2, 6, 7 леммы 2 заключаем (см. [10, доказательство леммы 2]), что лемму 3 достаточно доказать для радиальных функций $f \in \mathcal{K}_r$. Пусть $n = 2$. Из условия следует [4], что $\Delta^2 f = 0$ при $1/2 < |x| < 1$ и, что интеграл $\Delta^2 f$ по любой хорде круга $|x| \leq 1/2$, не пересекающей круг $|x| \leq 1 - \sqrt{3}/2$, равен нулю. По теореме о носителе [9, с.125] $\Delta^2 f = 0$ при $1 - \sqrt{3}/2 < |x| < 1$. Отсюда $\Delta f = c \ln \rho + c_1$ в этом кольце. Так как $\Delta f \in \mathcal{K}_r$, $c = 0$ и $f = \frac{1}{4}c_1 \rho^2 + c_2$ при $1 - \sqrt{3}/2 < |x| < 1$. Поскольку $f \in \mathcal{K}_r$, $c_1 = 0$ и мы получаем $f = c_2$ при $1 - \sqrt{3}/2 < |x| < 1$.

Предположим, что утверждение леммы 3 верно для любой размерности от 2 до $n - 1$ и докажем его для размерности n . Пусть

$$f = F(|x|), \quad \Phi = \frac{\partial f}{\partial x_n} = F'(|x|) \frac{x_n}{|x|} \in \mathcal{K}_r.$$

В этом случае интегралы от Φ по противоположным $(n - 1)$ -мерным граням любого единичного куба $K \subset B_r$ равны (см. утверждение 4 леммы 2) и в силу нечетности Φ по x_n получаем, что функция

$$\frac{1}{2} F' \left(\sqrt{\frac{1}{4} + x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2} \right) \left(\frac{1}{4} + x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 \right)^{-1/2}$$

удовлетворяет условию леммы в шаре $x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 < \frac{1}{4}(n + 1)$. По предположению индукции отсюда следует, что

$$F' = c|x| \quad \text{при} \quad \left(\frac{1}{4} + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \right)^{1/2} < |x| < \frac{\sqrt{n+2}}{2}. \quad (17)$$

Следовательно, при таких x $\Delta^2 f = 0$. Так как $\Delta^2 f \in \mathcal{K}_r$, сдвигая куб $[-1/2, 1/2]^n$ на вектор вида $(0, \dots, 0, t, t) \in \mathbb{R}^n$ до касания с границей B_r , из утверждения 5 леммы 2 и радиальности $\Delta^2 f$ получаем, что

интеграл от $\Delta^2 f$ по пересечению B_r с любой $(n-2)$ -мерной гиперплоскостью, не пересекающей шар $B_{\sqrt{2}-1}$, равен нулю. По теореме о носителе [9, с.125] $\Delta^2 f = 0$ вне $B_{\sqrt{2}-1}$. Далее, сдвигая куб $[-1/2, 1/2]^n$ на вектор вида $(0, \dots, 0, t) \in \mathbb{R}^n$ до касания с границей B_r , из утверждения 4 леммы 2 получаем, что интеграл от $\Delta^2 f$ по пересечению $B_{\sqrt{2}-1}$ с любой $(n-1)$ -мерной гиперплоскостью, не пересекающей шар $B_{1-\sqrt{3}/2}$, равен нулю. По теореме о носителе [9, с.125] $\Delta^2 f = 0$ вне $B_{1-\sqrt{3}/2}$. Отсюда и из (17) следует, что $\Phi = cx_n$ вне $B_{1-\sqrt{3}/2}$. Из утверждения 6 леммы 2 получаем $c = 0$, откуда следует утверждение леммы 3.

Перейдем к доказательству теоремы 1. Пусть $r \geq \frac{1}{2}\sqrt{n+3}$, $\varepsilon > 0$ достаточно мало, ψ_ε – функция, использованная в доказательстве теоремы 4. Тогда $f * \psi_\varepsilon \in \mathcal{K}_{r-\varepsilon}$. Представляя $B_{r-\varepsilon}$ в виде объединения шаров радиуса $\frac{1}{2}\sqrt{n+2}$ из леммы 3 имеем $f * \psi_\varepsilon = c$ при $1/2 \leq |x| < r - \varepsilon$. Тогда $f_k = \partial(f * \psi_\varepsilon)/\partial x_k \in \mathcal{K}_{r-\varepsilon}$, $1 \leq k \leq n$, и равна нулю вне $B_{1/2}$. Сдвигая куб $[-1/2, 1/2]^n$ на вектор вида $(0, \dots, 0, t) \in \mathbb{R}^n$ до касания с границей $B_{r-\varepsilon}$, из утверждений 2, 4 леммы 2 получаем, что интеграл от f_k по пересечению $B_{r-\varepsilon}$ с любой $(n-1)$ -мерной гиперплоскостью, не пересекающей шар $|x| < 1 - \sqrt{(r-\varepsilon)^2 - (n-1)/4}$, равен нулю. По теореме о носителе [9, с. 125] $f * \psi_\varepsilon = c$ вне этого шара. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ отсюда следует, что f – константа в B_r и тогда $f = 0$.

Доказательство второго утверждения теоремы 1 содержится в [4].

5. Доказательство теоремы 2. Пусть $r > 1$. Обозначим P_r – класс функций $f \in C^\infty(B_r)$, имеющих нулевые интегралы по всем единичным полушарам $P \subset B_r$. Легко видеть, что если $f \in P_r$, то выполнены утверждения 1–3 леммы 2 с заменой $\mathcal{K}_r$ на P_r .

ЛЕММА 4. Пусть $f \in P_r$ и $f = 0$ при $|x| > 2 - r$. Тогда

$$\int_B f(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) dx_1 \cdots dx_{n-1} = 0,$$

где

$$B = \{x \in \mathbb{R}^{n-1} : x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 \leq 1\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\delta > 0$, $P^1 = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1, 0 \leq x_n \leq \delta x_1\}$, $P^2 = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1, x_1 \delta \leq x_n \leq 0\}$. Из условия следует, что $\partial f / \partial x_1 \in P_r$ и $\int_{P^1} f dx = \int_{P^2} f dx$. При $\delta \rightarrow 0$ из последнего равенства имеем

$$\int_B \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) x_1 dx_1 \cdots dx_{n-1} = 0.$$

Интегрируя по частям, получим утверждение леммы 4.

ЛЕММА 5. Пусть $f \in P_r$. Тогда f удовлетворяет (8) при всех $u, v \in \Omega$, $w \in B_{r-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно получить (8) при $w = 0$ (общий случай получается сдвигом). Пусть $P = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1, x_n \geq 0\}$, $S = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1, x_n \geq 0\}$. По формуле Остроградского при $j \neq n$ имеем $\int_S f(g^{-1}\sigma) \sigma_j d\sigma = \int_P (\partial f(g^{-1}x)/\partial x_j) dx = 0$ при всех $g \in \text{SO}(n)$, поскольку $f \in P_r$. Умножая на $\overline{t_{lp}^k(g)}$ и интегрируя на $\text{SO}(n)$, из (7) получаем $f_{kl}(1) \int_S \sigma_j Y(\sigma) d\sigma = 0$ при $Y = Y_p^{(k)}$, $1 \leq p \leq a_k$, а значит, при всех $Y \in H_k$. Если k четно, последний интеграл не равен нулю при $Y(\sigma) = (\sigma_{n-1} + i\sigma_n)^k$ (его легко вычислить в полярных координатах), откуда $f_{kl}(1) = 0$. Тогда все слагаемые ряда (5) для функции $f(x) + f(-x)$ при $k \geq 1$ равны нулю, откуда следует утверждение леммы 5.

ЛЕММА 6. Пусть $f \in P_r$. Тогда $f = c$ при $|x| > 1 - \sqrt{r^2 - 1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия, леммы 5 и теоремы 3 следует, что f — полином при $|x| > 2 - r$. Поскольку f имеет нулевые интегралы по всем единичным шарам, лежащим в B_r , получаем (см. доказательство утверждения 6 леммы 2) $f = c$ вне B_{2-r} . Функция $f_k = \partial f / \partial x_k$ ($1 \leq k \leq n$) удовлетворяет условиям леммы 4. Положим $f_k = 0$ при $r \leq |x| \leq R$, где $R = 1 + \sqrt{r^2 - 1}$. Отметим, что B_R представляет собой наименьший шар, который вместе с любым единичным полушаром $P \subset B_r$ содержит единичный шар, содержащий P . Тогда из леммы 4 имеем, что f_k имеет нулевые интегралы по всем единичным шарам из B_R (для шаров с центрами на оси Ox_n это очевидно, и остается учесть, что $f_k(gx) \in P_r$ при $g \in \text{SO}(n)$). Теперь из теоремы 4 следует утверждение леммы 6.

Докажем первое утверждение теоремы 2. Пусть $0 < \varepsilon < \sqrt{5}/2 - 1$, ψ_ε — функция из доказательства теоремы 4. Тогда свертка $f * \psi_\varepsilon$ удовлетворяет условиям леммы 6 при $r = \sqrt{5}/2 - \varepsilon$. Из леммы 6 и произвольности $\varepsilon > 0$ следует $f = c$ вне $B_{1/2}$. Из условия следует, что функция $f - c$ имеет равные интегралы по всем единичным полушарам $P \subset B_{\sqrt{5}/2}$. Отсюда получаем, что интеграл от $f - c$ по пересечению $B_{1/2}$ с любой полосой вида gQ , где $g \in \text{SO}(n)$, $Q = \{x \in \mathbb{R}^n : h_1 \leq x_n \leq h_2\}$, равен нулю. Из инъективности преобразования Радона [9, с. 142] получаем $f = c$ в $B_{1/2}$. Итак, $f = c$ в $B_{\sqrt{5}/2}$, откуда $f = 0$.

Для доказательства второго утверждения теоремы 2 при $1 < r < \sqrt{5}/2$ рассмотрим линейно независимые радиальные функции $g_1, g_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, равные нулю при $|x| \leq \sqrt{r^2 - 1}$ и при $|x| \geq 1 - \sqrt{r^2 - 1}$. Пусть g_1 и g_2 — преобразования Радона функций f_1, f_2 (см. [9, с. 120]). По теореме о носителе [9, с. 125] $f_1 = f_2 = 0$ при $|x| \geq 1 - \sqrt{r^2 - 1}$. Поскольку $r - 1 < \sqrt{r^2 - 1}$, всякий единичный полушар $P \subset B_r$ содержит сегмент

H шара B_R , $R = 1 - \sqrt{r^2 - 1}$ с высотой $2R - 1$, причем основание H параллельно основанию P . Пусть $f = \alpha f_1 + \beta f_2$, где $f \neq 0$, $\int_H f(x) dx = 0$. Функция f удовлетворяет условию теоремы 2, ибо она радиальна [9, с. 120] и $\int_P f(x) dx = \int_H f(x) dx$.

При $r = 1$ гладкие ненулевые радиальные функции с нулевым интегралом по B_1 удовлетворяют условию теоремы 2.

Донецкий государственный университет

Поступило

01.10.93

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Zalcman L. A bibliographical survey of the Pompeiu problem. Approximation by solution of partial differential equations, quadrature formula and related topics: Kluwer Academic Publishers, 1992.
- [2] Berenstein C. A., Gay R. Le probleme de Pompeiu locale // J. Analyse Math. 1989. V. 52. P. 133–166.
- [3] Berenstein C. A., Gay R. A local version of the two-circles theorem // Israel J. Math. 1986. V. 55. P. 267–288.
- [4] Волчков В. В. О функциях с нулевыми интегралами по кубам // Укр. матем. ж. 1991. Т. 43. № 6. С. 859–863.
- [5] Szabo G. On fuctions having the same integral on congruent semidisks // Ann. Univ. Sci. Budapest. Lec. Computator. 1982. V. 3. P. 3–9.
- [6] Виленкин Н. Я. Специальные функции и теория представлений групп. М.: Наука, 1991.
- [7] Волчков В. В. Теоремы о взвешенных сферических средних для некоторых полиномов. Деп. УкрИНТЭИ. № 345–Ук93. Донецк: ДонГУ, 1993.
- [8] Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974.
- [9] Хелгасон С. Группы и геометрический анализ. М.: Мир, 1987.
- [10] Волчков В. В. Теоремы единственности для кратных лакунарных тригонометрических рядов // Матем. заметки. 1992. Т. 51. № 6. С. 27–31.
- [11] Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М.: ГИТТЛ, 1956.