Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Горькавый, Восстановление подмногообразия евклидова пространства по вырожденному в линию грассманову образу, *Матем. заметки*, 1996, том 59, выпуск 5, 681–691

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1762>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 18:11:29

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПОДМНОГООБРАЗИЯ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА ПО ВЫРОЖДЕННОМУ В ЛИНИЮ ГРАССМАНОВУ ОБРАЗУ

В. А. Горькавый

1. Пусть $F^n \subset E^{n+r}$ – ориентируемое регулярное n -мерное подмногообразие $(n+r)$ -мерного евклидова пространства. Каждой точке $Q \in F^n$ поставим в соответствие ориентированное подпространство $E^r \subset E^{n+r}$, параллельное ориентированному нормальному пространству $N_Q F^n$ подмногообразия F^n в точке Q и одинаково ориентированное с ним. Такое соответствие задает отображение G из F^n в грассманово многообразие $G^+(r, n+r)$ ориентированных r -мерных подпространств $(n+r)$ -мерного евклидова пространства. Образ $G(F^n)$ называют грассмановым образом подмногообразия $F^n \subset E^{n+r}$. Будем обозначать его Γ . В общем случае размерность Γ равна размерности F^n .

Ю. А. Аминовым в [1] была сформулирована следующая общая задача: по заданному регулярному подмногообразию $\Gamma \subset G^+(r, n+r)$ найти регулярное подмногообразие F^n в E^{n+r} , имеющее Γ^n своим грассмановым образом. Наиболее плодотворно данная проблема изучалась Ю. А. Аминовым [1], [2], Хоффманом и Оссерманом [3] в случае двумерных подмногообразий.

В некоторых случаях грассманов образ Γ может иметь размерность меньшую, чем размерность поверхности F^n : Это происходит в тех случаях, когда нормальное пространство F^n в E^{n+r} вдоль некоторых подмногообразий на F^n стационарно. Грассманов образ называют вырожденным, а само подмногообразие F^n – тангенциально вырожденным. Тангенциально вырожденные поверхности являются сильно параболическими (в смысле [4]). Проблема восстановления подмногообразия $F^n \subset E^{n+r}$ по вырожденному грассманову образу рассматривалась Ю. А. Аминовым и Т. С. Тарасовой. Ими доказана

ТЕОРЕМА [5]. *Для того, чтобы кривая $\Gamma \subset G^+(2, 4)$ была вырожденным грассмановым образом некоторой поверхности $F^2 \subset E^4$, не-*

обходимо и достаточно, чтобы Γ была асимптотической линией гиперповерхности $G^+(2, 4)$, вложенной в сферу S^5 с помощью плюккеровых координат.

В настоящей работе доказывается общее утверждение.

ТЕОРЕМА. 1. Если регулярная кривая Γ в грассмановом многообразии $G^+(r, n+r)$ является грассмановым образом регулярного C^p , $p > 2$, подмногообразия $F^n \subset E^{n+r}$, то тогда Γ – асимптотическая кривая многообразия $G^+(r, n+r) \subset S^{N-1}$.

2. Пусть Γ – регулярная C^p , $p > 1$, асимптотическая кривая в $G^+(r, n+r) \subset S^{N-1}$. Тогда для любой точки $P \in \Gamma$ существует окрестность $U \subset \Gamma$ и регулярное C^{p+1} подмногообразие $F^n \subset E^{n+r}$, для которого U – грассманов образ.

Здесь и далее рассматривается вложение $G^+(r, n+r)$ в сферу S^{N-1} радиуса 1, $N = C_{n+r}^r$, с помощью плюккеровых координат.

Напомним, что линия $\Gamma \subset G^+(r, n+r)$ – асимптотическая для $G^+(r, n+r)$, если в каждой точке $Q \in \Gamma$ в направлении, касательном к Γ , вторая квадратичная форма $G^+(r, n+r) \subset S^{N-1}$ относительно любой нормали равна нулю.

Как следствие доказано известное утверждение о строении поверхности с вырожденным грассмановым образом.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть регулярное C^p , $p > 2$, подмногообразие $F^n \subset E^{n+r}$ имеет вырожденный в линию грассманов образ. Тогда радиус-вектор $F^n \subset E^{n+r}$ в некоторой локальной системе координат имеет вид

$$\vec{r}(v^1, \dots, v^n) = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 \cdot v^2 + \dots + \vec{\omega}_n \cdot v^n,$$

где $\vec{\omega}_i$ – вектор-функции, зависящие только от v^1 , и нормальная плоскость $N_Q F^n$ вдоль подмногообразия $v^1 = \text{const}$ стационарна.

Отметим, что поверхности с вырожденным в линию грассмановым образом являются разворачивающимися, т.е. изометричными пространству E^n . Отметим также, что содержание теоремы можно сформулировать без применения понятия ориентации заменив $G^+(r, n+r)$ грассмановым многообразием $G(r, n+r)$ неориентированных r -мерных подпространств в E^{n+r} ; соответственно $G(r, n+r)$ вкладывается с помощью плюккеровых координат в проективное пространство.

2. Зафиксируем в E^{n+r} базис $e_1, \dots, e_{n+r}$ и рассмотрим плоскость $E_0^r = \text{span}(e_1, \dots, e_r)$, которую считаем положительно ориентированной. Подпространства E^r , проектирующиеся без вырождения с сохранением ориентации на E_0^r , образуют окрестность точки P , соответствующей E_0^r ,

в $G^+(r, n+r)$. Каждое такое подпространство E^r можно задать в декартовых координатах x^i в E^{n+r} в виде

$$\begin{pmatrix} x^{r+1} \\ \vdots \\ x^{r+n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1^1 & \dots & z_r^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1^n & \dots & z_r^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^r \end{pmatrix},$$

и каждое подпространство E^r натянуто на векторы $\varepsilon_j = e_j + \sum_{i=1}^n z_j^i e_{r+i}$. Набор чисел z_j^i , $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, r}$, является локальными координатами на $G^+(r, n+r)$ и, таким образом, на $G^+(r, n+r)$ вводится структура аналитического многообразия [6, с. 174]. Будем обозначать точку из $G^+(r, n+r)$ и вектор из касательного пространства $T_Q G^+(r, n+r)$ матрицей $n \times r$. Для $G^+(r, n+r)$ существует вложение в сферу S^{N-1} радиуса 1 с помощью плюккеровых координат ($N = C_{n+r}^r$ – биномиальный коэффициент), а именно: каждому ориентированному подпространству, натянутому на векторы ε_i , $i = \overline{1, r}$, ставится в соответствие точка в E^N с радиус-вектором $R = R_1/|R_1|$, где $R_1 = [\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r]$ – ориентированный поливектор. Плюккерovo вложение изометрично и эквивалентно [7].

3. Рассмотрим в $G^+(r, n+r)$ множество M r -мерных подпространств, содержащих $(r-1)$ -мерное фиксированное подпространство E^{r-1} . Предположим, что E^{r-1} натянуто на векторы $b_\alpha = (b_\alpha^1, \dots, b_\alpha^{n+r})$. Тогда M – подмногообразие в $G^+(r, n+r)$, задаваемое в локальных координатах

$$\begin{pmatrix} b_\alpha^{r+1} \\ \vdots \\ b_\alpha^{r+n} \end{pmatrix} = (z_j^i) \cdot \begin{pmatrix} b_\alpha^1 \\ \vdots \\ b_\alpha^r \end{pmatrix}, \quad \alpha = \overline{1, r-1}. \quad (3.1)$$

Через каждую точку на $G^+(r, n+r)$ проходит $(r-1)$ -параметрическое семейство подмногообразий M вида (3.1). В [8] указано, что подмногообразие $M \subset G^+(r, n+r)$ является вполне геодезическим и изометричным n -мерной сфере радиуса 1. Как и в [8] будем называть M стандартной сферой S^n в $G^+(r, n+r)$.

Касательный вектор T стандартной сферы (3.1) в точке Q удовлетворяет в $T_Q G^+(r, n+r)$ условию

$$T \begin{pmatrix} b_\alpha^1 \\ \vdots \\ b_\alpha^r \end{pmatrix} = 0, \quad \alpha = \overline{1, r-1}. \quad (3.2)$$

Если обозначить через T_i вектор-столбцы матрицы T , то (3.2) в общем случае есть $r-1$ независимое линейное соотношение между r векторами T_i , и поэтому (3.2) эквивалентно коллинеарности вектор-столбцов T_i , т.е.

$$[T_i, T_j] = 0, \quad i, j = \overline{1, r}, \quad (3.3)$$

где $[T_i, T_j]$ – простой бивектор в евклидовом пространстве. Обратно, легко видеть, что если в $T_Q G^+(r, n+r)$ задать направление T , удовлетворяющее (3.3), то однозначно восстанавливается стандартная сфера S^n , проходящая через точку Q и такая, что $T \in T_Q S^n$. Таким образом, (3.3) является характеризационным свойством направлений в $T_Q G^+(r, n+r)$, касательных к стандартным сферам S^n . В заключение отметим, что из (3.2) легко получить, что касательные пространства к различным стандартным сферам S^n не имеют общих направлений и образуют в $T_Q G^+(r, n+r)$ $(r+n-1)$ -мерный конус K_Q , задаваемый в $T_Q G^+(r, n+r)$ системой условий (3.3).

ЛЕММА 1. *Направления, касательные к стандартным сферам, проходящим через точку P , и только они в $T_P G^+(r, n+r)$ являются асимптотическими для $G^+(r, n+r) \subset S^{N-1}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $z = \|z_j^i\|$ – матрица $n \times r$ локальных координат точки $Q \in G^+(r, n+r)$. Соответствующее подпространство $E^r \subset E^{n+r}$ натянуто на векторы (см. п. 2):

$$\varepsilon_\alpha = (\delta_\alpha^1, \dots, \delta_\alpha^r, z_\alpha^1, \dots, z_\alpha^n), \quad \alpha = \overline{1, r}. \quad (3.4)$$

Радиус-вектор $G^+(r, n+r)$, вложенного в E^N с помощью плюккеровых координат, имеет вид $R = R_1/|R_1|$ (см. п. 2), где N -мерный вектор R_1 в силу вида векторов ε_α имеет следующую структуру: $R_1 = (1; \Omega_1; \Omega_2; \Omega_3)$, где Ω_1 – набор координат $(-1)^{r+j} z_j^i$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, r}$, Ω_2 – набор координат $(-1)^\sigma (z_t^i z_h^j - z_h^i z_t^j)$, $i, j = \overline{1, n}$, $t, h = \overline{1, r}$, Ω_3 – набор координат, являющихся однородными многочленами степени больше 2 от z_j^i . Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial z_t^i} &= \frac{\partial R_1}{\partial z_t^i} \frac{1}{|R_1|} - \left(R_1, \frac{\partial R_1}{\partial z_t^i} \right) \frac{R_1}{|R_1|^3}, \\ \frac{\partial^2 R}{\partial z_t^i \partial z_h^j} &= \frac{\partial^2 R_1}{\partial z_t^i \partial z_h^j} \frac{1}{|R_1|} - \frac{1}{|R_1|^3} \left\{ \left(R_1, \frac{\partial R_1}{\partial z_h^j} \right) \frac{\partial R_1}{\partial z_t^i} + \left(R_1, \frac{\partial R_1}{\partial z_t^i} \right) \frac{\partial R_1}{\partial z_h^j} \right\} \\ &\quad - \left\{ \left(\frac{\partial R_1}{\partial z_t^i}, \frac{\partial R_1}{\partial z_h^j} \right) - \left(R_1, \frac{\partial^2 R_1}{\partial z_t^i \partial z_h^j} \right) \right\} \frac{R_1}{|R_1|^3} \\ &\quad + 3 \left(R_1, \frac{\partial R_1}{\partial z_t^i} \right) \left(R_1, \frac{\partial R_1}{\partial z_h^j} \right) \frac{R_1}{|R_1|^5}. \end{aligned}$$

Возьмем произвольную точку P в $G^+(r, n+r)$. Выберем локальные координаты z_j^i так, чтобы точке P отвечали значения $z_j^i = 0$. (Для этого в исходном пространстве E^{n+r} необходимо выбрать ортонормированный

базис $e_1, \dots, e_{n+r}$ так, чтобы соответствующее точке P подпространство $E^r \subset E^{n+r}$ было натянуто на $e_1, \dots, e_r$.) Тогда в точке P :

$$\begin{aligned} R_1 &= (1; 0, \dots, 0; 0, \dots, 0; 0, \dots, 0), \\ \frac{\partial R_1}{\partial z_t^i} &= (0; 0, \dots, (-1)^{r+t}, \dots, 0; 0, \dots, 0; 0, \dots, 0), \\ \frac{\partial^2 R_1}{\partial z_t^i \partial z_h^j} &= (0; 0, \dots, 0; 0, \dots, (-1)^{\sigma_1}, \dots, 0; 0, \dots, 0), \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial R}{\partial z_t^i} = \frac{\partial R_1}{\partial z_t^i}, \quad \frac{\partial^2 R}{\partial z_t^i \partial z_h^j} = \frac{\partial^2 R_1}{\partial z_t^i \partial z_h^j} - \delta^{ij} \delta_{th} R_1.$$

Касательное пространство $T_P G^+(r, n+r)$ в E^N состоит из векторов вида $(0; *, 0, \dots, 0; 0, \dots, 0)$. Вектор R_1 является нормалью к гиперсфере $S^{N-1} \subset E^N$, в которую вложено $G^+(r, n+r)$. Поэтому легко видеть, что проекция $d^2 R$ на нормальное пространство подмногообразия $G^+(r, n+r) \subset S^{N-1}$ в точке P есть $(0; 0, \dots, 0; \Omega_4; 0, \dots, 0)$, где Ω_4 – набор координат $(-1)^\sigma (dz_t^i \cdot dz_h^j - dz_h^i \cdot dz_t^j)$, $i, j = \overline{1, n}$, $t, h = \overline{1, r}$, и условие равенства нулю этой проекции эквивалентно выполнению условия (3.3), являющегося характеристическим свойством конуса касательных пространств стандартных сфер S^n в $T_P G^+(r, n+r)$. Поэтому данный конус является конусом асимптотических направлений в $T_P G^+(r, n+r)$ многообразия $G^+(r, n+r) \subset S^{N-1}$. Так как условие асимптотичности инвариантно при замене координат в $G^+(r, n+r)$, а точка P выбиралась произвольно, то имеет место содержание утверждения леммы 1.

4. Если подмногообразие F^n задано в декартовых координатах в E^{n+r} гладкими C^p , $p > 2$, функциями $x^i(v^1, \dots, v^n)$, то легко видеть, что грассманов образ Γ задается в $G^+(r, n+r)$ гладкими C^{p-1} функциями $z_j^i(v^1, \dots, v^n)$.

ЛЕММА 2. Если грассманов образ Γ регулярного C^p , $p > 2$, подмногообразия F^n имеет размерность k , то на F^n можно ввести такие координаты v^i , $i = \overline{1, n}$, что $\partial z_j^i / \partial v^t = 0$, $t = \overline{k+1, n}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть F^n параметризовано координатами $u^1, \dots, u^n$. Так как $\dim \Gamma = k$, то можно считать, что

$$\frac{\partial z}{\partial u^t} = \sum_{i=1}^k \alpha_t^i \frac{\partial z}{\partial u^i}, \quad t = \overline{k+1, n}, \quad (4.1)$$

и $\partial z / \partial u^i$, $i = \overline{1, k}$, линейно независимы. В координатах v^j имеем

$$\frac{\partial z}{\partial v^j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial z}{\partial u^i} \frac{\partial u^i}{\partial v^j} = \sum_{i=1}^k \left(\frac{\partial u^i}{\partial v^j} + \sum_{t=k+1}^n \alpha_t^i \frac{\partial u^t}{\partial v^j} \right) \frac{\partial z}{\partial u^i}. \quad (4.2)$$

Найдем $u^i = u^i(v^1, \dots, v^n)$ такие, что $\partial z / \partial v^j = 0$, $j = \overline{k+1, n}$. Из (4.2) имеем

$$\frac{\partial u^i}{\partial v^j} = - \sum_{t=k+1}^n \alpha_t^i \frac{\partial u^t}{\partial v^j}, \quad i = \overline{1, k}, \quad j = \overline{k+1, n}. \quad (4.3)$$

Условие совместности системы (4.3) имеет вид

$$\begin{aligned} & \sum_{t=k+1}^n \sum_{h=1}^k \left(\frac{\partial \alpha_t^i}{\partial u^h} \frac{\partial u^h}{\partial v^g} \frac{\partial u^t}{\partial v^j} - \frac{\partial \alpha_t^i}{\partial u^h} \frac{\partial u^h}{\partial v^j} \frac{\partial u^t}{\partial v^g} \right) \\ & + \sum_{t, h=k+1}^n \left(\frac{\partial \alpha_t^i}{\partial u^h} - \frac{\partial \alpha_h^i}{\partial u^t} \right) \frac{\partial u^h}{\partial v^g} \frac{\partial u^t}{\partial v^j} = 0, \quad i = \overline{1, k}, \quad j, g = \overline{k+1, n}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Подставляя в первую группу слагаемых вместо $\partial u^h / \partial v^g$ и $\partial u^h / \partial v^j$ их выражения из (4.3) и меняя порядок суммирования там, где это нужно, можно привести систему (4.4) к виду

$$\sum_{t, h=k+1}^n \Phi_{ht}^i \frac{\partial u^h}{\partial v^g} \frac{\partial u^t}{\partial v^j} = 0, \quad i = \overline{1, k}, \quad i, g = \overline{k+1, n}, \quad (4.5)$$

где

$$\Phi_{ht}^i = \frac{\partial \alpha_t^i}{\partial u^h} - \frac{\partial \alpha_h^i}{\partial u^t} + \sum_{m=1}^k \left(\frac{\partial \alpha_h^i}{\partial u^m} \alpha_t^m - \frac{\partial \alpha_t^i}{\partial u^m} \alpha_h^m \right).$$

Так как по условию z_j^i являются гладкими C^p , $p > 1$, функциями, то $\partial^2 z / \partial u^i \partial u^j = \partial^2 z / \partial u^j \partial u^i$ и из (4.1) получаем

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^k \left(\frac{\partial \alpha_g^i}{\partial u^j} \frac{\partial z}{\partial u^i} + \alpha_g^i \frac{\partial^2 z}{\partial u^i \partial u^j} - \frac{\partial \alpha_j^i}{\partial u^g} \frac{\partial z}{\partial u^i} - \alpha_j^i \frac{\partial^2 z}{\partial u^i \partial u^g} \right) = 0, \\ & j, g = \overline{k+1, n}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Из (4.1) найдем выражение для $\partial^2 z / \partial u^i \partial u^j$. Подставляя его в (4.6) и меняя порядок суммирования там, где это необходимо, получаем

$$\begin{aligned} & \sum_{i, t=1}^k \left(\frac{\partial \alpha_g^i}{\partial u^j} - \frac{\partial \alpha_j^i}{\partial u^g} + \alpha_g^i \frac{\partial \alpha_j^i}{\partial u^t} - \alpha_j^i \frac{\partial \alpha_g^i}{\partial u^t} \right) \\ & + \sum_{i, t=1}^k \left| \begin{array}{cc} \alpha_g^i & \alpha_j^i \\ \alpha_t^i & \alpha_j^i \end{array} \right| \frac{\partial^2 z}{\partial u^i \partial u^t} = 0, \quad j, g = \overline{k+1, n}. \end{aligned}$$

Замечая, что вторая группа слагаемых равна нулю в силу симметричности $\partial^2 z / \partial u^i \partial u^t$ и кососимметричности $\alpha_j^i \alpha_g^t - \alpha_g^i \alpha_j^t$ по индексам i и t , а также тот факт, что выражение в скобках в первой группе слагаемых есть Φ_{jg}^i , получаем

$$\sum_{i=1}^k \Phi_{jg}^i \frac{\partial z}{\partial u^i} = 0, \quad j, g = \overline{k+1, n}.$$

Но $\partial z / \partial u^i, i = \overline{1, k}$, линейно независимы, поэтому $\Phi_{jg}^i = 0$, и, значит, система (4.5) выполнена тождественно, а система (4.3) является совместной. Задавая $u^{k+1}, \dots, u^n$ произвольно, а $u^1, \dots, u^k$ вдоль подмногообразия $v^i = \text{const}, i = \overline{1, k}$, на F^n , находим решение системы (4.3). Для регулярности параметризации F^n координатами v^i достаточно задать $u^{k+1}, \dots, u^n$ и $u^1, \dots, u^k$ вдоль $v^i = \text{const}, i = \overline{1, k}$, так, чтобы вдоль $v^i = \text{const}, i = \overline{1, k}$, выполнялось условие $\text{rg} \|\partial u^i / \partial v^j\| = n$. Тогда в некоторой окрестности подмногообразия $v^i = \text{const}, i = \overline{1, k}$, параметризация F^n координатами v^i будет регулярна. Лемма 2 доказана.

Отметим, что в силу доказанной леммы подмногообразие F^n с k -мерным грассмановым образом состоит из подмногообразий размерности $n - k$, вдоль которых нормальное пространство поверхности $F^n \subset E^{n+r}$ стационарно.

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Переформулируем рассматриваемую проблему восстановления (см. п. 1) аналогично сделанному в [2]. Нам задана кривая $\Gamma \subset G^+(r, n+r)$ r -мерных подпространств $E^r(v^1) \subset E^{n+r}$, $v^1 \in (a, b) \subset \mathbb{R}^1$. Так как рассмотрение носит локальный характер, то можно считать, что все $E^r(v^1)$ проектируются без вырождения на подпространство E_1^r векторов $e_1, \dots, e_r$ ортонормированного базиса в E^{n+r} . В каждом $E^r(v^1)$ существует базис векторов $\varepsilon_\alpha = (\varepsilon_\alpha^1, \dots, \varepsilon_\alpha^{n+r})$ специального вида (см. п. 2). Вследствие леммы 2 на искомом подмногообразии $F^n \subset E^{n+r}$ существует локальная система координат $v^1, \dots, v^n$, где $v = (v^1, \dots, v^n) \in D$, (D – область в пространстве параметров, проектирующаяся на прямую параметра v^1 в интервал (a, b)). Требуется найти $n+r$ функций $x^i(v^1, \dots, v^n)$, удовлетворяющих в D условиям

$$\sum_{i=1}^{n+r} \varepsilon_\alpha^i \frac{\partial x^i}{\partial v^j} = 0, \quad \alpha = \overline{1, r}, \quad j = \overline{1, n}, \quad (5.1)$$

$$\text{rg} \left\| \frac{\partial x^i}{\partial v^j} \right\| = n. \quad (5.2)$$

Функции x^i как декартовы координаты в E^{n+r} образуют тогда радиус-вектор поверхности F^n , для которой Γ является грассмановым образом в си-

лу (5.1) и которая регулярна в силу (5.2). Учитывая (3.4), из (5.1) получаем

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial v^i} = -\frac{\partial x^{r+1}}{\partial v^i} z_\alpha^1 - \dots - \frac{\partial x^{r+n}}{\partial v^i} z_\alpha^n, \quad \alpha = \overline{1, r}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (5.3)$$

Условие (5.2) невырожденности касательного пространства поверхности $F^n \subset E^{n+r}$ очевидно эквивалентно (в силу локальности рассматриваемой задачи) условию невырожденности проекции касательного пространства на ортогональное дополнение подпространства $E_1^r \subset E^{n+r}$, имеющему вид:

$$\det J \neq 0, \quad (5.4)$$

где J – матрица с элементами $J_j^i = \partial x^{r+i} / \partial v^j$, $i, j = \overline{1, n}$. Так как заданные функции z_j^i не зависят от $v^2, \dots, v^n$, то условие совместности системы (5.3) имеет вид:

$$\frac{\partial x^{r+1}}{\partial v^i} \frac{\partial z_\alpha^1}{\partial v^1} + \dots + \frac{\partial x^{r+n}}{\partial v^i} \frac{\partial z_\alpha^n}{\partial v^1} = 0, \quad \alpha = \overline{1, r}, \quad i = \overline{2, n}. \quad (5.5)$$

Если обозначать через z_α вектор-столбцы матрицы z , а через y – вектор с координатами $y^i = x^{r+i}$, $i = \overline{1, n}$, то (5.5) можно записать в виде

$$\left(\frac{\partial z_\alpha}{\partial v^1}, \frac{\partial y}{\partial v^i} \right) = 0, \quad \alpha = \overline{1, r}, \quad i = \overline{2, n}, \quad (5.6)$$

где $(*, *)$ – скалярное произведение в евклидовом пространстве.

Предположим, что в некоторой точке $v_1 \in D$ существуют α, β такие, что простой бивектор $[\partial z_\alpha / \partial v^1, \partial z_\beta / \partial v^1] \neq 0$. Тогда $n - 1$ n -мерных векторов $\partial y / \partial v^i$, $i = \overline{2, n}$, в силу (5.6) должны быть ортогональны двум неколлинеарным векторам $\partial z_\alpha / \partial v^1, \partial z_\beta / \partial v^1$ и, значит, быть линейно зависимыми. Поэтому в точке $v_1 \in D$ будет нарушено условие (5.4). Следовательно, если Γ – грассманов образ регулярного $F^n \subset E^{n+r}$, то вдоль Γ выполнено условие

$$\forall \alpha, \beta \quad \left[\frac{\partial z_\alpha}{\partial v^1}, \frac{\partial z_\beta}{\partial v^1} \right] = 0, \quad (5.7)$$

и поэтому для каждой точки $Q \in \Gamma$ существует стандартная сфера S^n , содержащая Q , которой кривая Γ касается (см. п. 3). В силу леммы 1 линия Γ будет асимптотической на многообразии $G^+(r, n+r) \subset S^{N-1}$; первая часть теоремы доказана.

Докажем вторую часть теоремы. Легко видеть, что из условия асимптотичности Γ следует, что в каждой точке $Q \in \Gamma$ имеет место (5.7) и, значит, существует орт (в евклидовом смысле) $T(v^1)$ с координатами $T^i(v^1)$ и функции $\lambda_\alpha(v^1)$ такие, что

$$\frac{\partial z_\alpha}{\partial v^1} = \lambda_\alpha T, \quad \alpha = \overline{1, r}. \quad (5.8)$$

Система (5.5) примет тогда следующий вид

$$T^1 \frac{\partial x^{r+1}}{\partial v^i} + \dots + T^n \frac{\partial x^{r+n}}{\partial v^i} = 0, \quad i = \overline{2, n}. \quad (5.9)$$

В силу регулярности Γ вектор $T \neq 0$. Возьмем произвольную точку P с координатой v_0^1 на Γ ; в области D возьмем точку $v_0 = (v_0^1, \dots, v_0^n)$. Не уменьшая общности, можно считать, что $T^1(v_0^1) \neq 0$. Тогда в некоторой окрестности $U(v_0) \subset D$ точки v_0 система (5.9) эквивалентна следующей:

$$\frac{\partial x^{r+1}}{\partial v^i} = -\frac{T^2}{T^1} \cdot \frac{\partial x^{r+2}}{\partial v^i} - \dots - \frac{T^n}{T^1} \cdot \frac{\partial x^{r+n}}{\partial v^i}, \quad i = \overline{2, n}. \quad (5.10)$$

Так как T не зависит от $v^2, \dots, v^n$, то, очевидно, (5.10) совместна. Задавая $x^{r+2}, \dots, x^{r+n}$ в $U(v_0)$ и значения на прямой $(v^1, v^2, \dots, v^n)$ в $U(v_0)$ в виде гладких C^{p+1} функций так, чтобы в точке v_0 было выполнено условие (5.4) (а это можно сделать, так как

$$\det J = \left(\sum_{i=1}^n T^i \frac{\partial x^{r+i}}{\partial v^1} \right) \frac{\det J'}{T^1},$$

где J' – минор матрицы J , соответствующий элементу J_1^1), находим в некоторой окрестности $U_1(v_0) \subset U(v_0)$ гладкое решение системы (5.10), удовлетворяющее (5.4). Подставляя найденные функции в (5.3), получаем для каждой функции $x^i(v^1, \dots, v^n)$, $i = \overline{1, r}$, совместную систему. Задавая значения искомых функций в точке v_0 , получаем гладкое C^{p+1} решение системы (5.3) в некоторой окрестности $U_2(v_0) \subset U_1(v_0)$. Таким образом, найдена окрестность точки P на Γ , отвечающая интервалу изменения параметра v^1 , когда $v \in U_2(v_0)$, и регулярное подмногообразие $F^n \subset E^{n+r}$ с радиус-вектором $\mathbf{r}(v) = (x^1(v), \dots, x^{n+r}(v))$, для которого Γ является грассмановым образом. Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ. Так как T зависит только от v^1 , то систему (5.9) можно проинтегрировать:

$$x^{r+1}T^1 + \dots + x^{r+n}T^n = f(v^1), \quad (5.11)$$

т.е. для любого решения системы (5.9) существует функция $f(v^1)$ вида (5.11), и для любой функции $f(v^1)$ функции x^{r+i} , $i = \overline{1, n}$, удовлетворяющие (5.11), являются решением системы (5.9). Уравнения (5.3) при $i = \overline{2, n}$ интегрируются аналогичным образом:

$$x^\alpha = -x^{r+1}z_\alpha^1 - \dots - x^{r+n}z_\alpha^n + g^\alpha(v^1), \quad \alpha = \overline{1, r}. \quad (5.12)$$

Подставляя (5.12) в уравнения (5.3) при $i = 1$ и учитывая (5.11), получаем

$$\frac{\partial g^\alpha}{\partial v^1} = \lambda_\alpha(v^1)f(v^1), \quad \alpha = \overline{1, r}. \quad (5.13)$$

При заданных функциях $x^{r+i}(v)$, $i = \overline{1, n}$, для любого решения системы (5.3) существуют функции $g^\alpha(v^1)$ из (5.12), удовлетворяющие (5.13). И обратно, для любых функций $g^\alpha(v^1)$, удовлетворяющих (5.13), функции $x^1(v)$, $i = \overline{1, r}$, из (5.12) являются решением системы (5.3). Тогда радиус-вектор искомого подмногообразия $F^n \subset E^{n+r}$ имеет вид

$$\mathbf{r}(v^1, \dots, v^n) = \sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} -z_1^i \\ \vdots \\ -z_r^i \\ \delta_1^i \\ \vdots \\ \delta_n^i \end{pmatrix} x^{r+i} + \begin{pmatrix} g^1 \\ \vdots \\ g^r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5.14)$$

где x^{r+i} удовлетворяют (5.11), а g^α — (5.13). Предположим, что как и ранее $T^1 \neq 0$. Тогда легко получить, что $\det J = \det J'f(v^1)/T^1 \neq 0$ в силу регулярности F^n . Заменяя $v^2, \dots, v^n$ на $x^{r+2}, \dots, x^{r+n}$, и выражая x^{r+1} из (5.11), получаем из (5.14):

$$\mathbf{r}(v^1, x^{r+2}, \dots, x^{r+n}) = \omega_1(v^1) + \sum_{i=2}^n \omega_i(v^1)x^{r+i},$$

где векторы ω_i имеют следующую форму

$$\omega_1 = \begin{pmatrix} g^1 - z_1^1 \frac{f}{T^1} \\ \vdots \\ g^r - z_r^1 \frac{f}{T^1} \\ \frac{f}{T^1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \omega_i = \frac{1}{T^1} \begin{pmatrix} z_1^1 T^i - z_1^i T^1 \\ \vdots \\ z_r^1 T^i - z_r^i T^1 \\ -T^i \\ \delta_i^2 T^1 \\ \vdots \\ \delta_i^n T^1 \end{pmatrix}, \quad i = \overline{2, n},$$

т.е. ω_i , $i = \overline{2, n}$, полностью определяются заданием кривой $\Gamma \subset G^+(r, n+r)$, а вектор ω_1 определяется с некоторым произволом. Радиус-вектор (5.14) имеет наглядное геометрическое толкование. По заданному 1-параметрическому семейству r -мерных подпространств $E^r(v^1) \subset E^{n+r}$, проектирующих без вырождения на подпространство E_1^r , строится семейство

n -мерных ортогональных дополнений $E^n(v^1)$. Условием (5.11) в каждом $E^n(v^1)$ выделяется гиперплоскость $E^{n-1}(v^1)$. В E_1^r строится кривая с радиус-вектором $\rho = (g^1, \dots, g^r, 0, \dots, 0)$ и каждое $E^n(v^1)$ переносится в соответствующую точку $\rho(v^1)$ кривой параллельно. Искомое подмногообразие $F^n \subset E^{n+r}$ образовано соответствующими плоскостями $E^{n-1}(v^1)$ и вдоль каждой образующей нормальное пространство подмногообразия $F^n \subset E^{n+r}$ стационарно.

Физико-технический институт
низких температур АН Украины
E-mail: gorkaviy@ilt.kharkov.ua

Поступило
27.09.93

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Аминов Ю. А. Определение поверхности в четырехмерном евклидовом пространстве по ее грассманову образу // Матем. сб. 1982. Т. 117. № 2. С. 147–160.
- [2] Аминов Ю. А. О грассмановом образе двумерной поверхности в четырехмерном евклидовом пространстве // Укр. геом. сб. 1980. № 23. С. 3–16.
- [3] Hoffman D., Osserman R. The Gauss map of surfaces in $\mathbb{R}^3$ and $\mathbb{R}^4$ // Proc. London Math. Soc. 1985. V. 50. № 1. P. 27–56.
- [4] Борисенко А. А. О полных параболических поверхностях // Укр. геом. сб. 1985. № 28. С. 8–19.
- [5] Аминов Ю. А., Тарасова Т. С. Определение поверхности в E по вырожденному грассманову образу // Укр. геом. сб. 1983. № 26. С. 6–13.
- [6] Рохлин В. А., Фукс Д. Б. Начальный курс топологии. Геометрические главы. М.: Наука, 1977.
- [7] Борисенко А. А., Николаевский Ю. А. Многообразия Грассмана и грассманов образ подмногообразий // УМН. 1991. Т. 46. № 2 (278). С. 41–83.
- [8] Николаевский Ю. А. Вполне омбилические подмногообразия в $G(2, n)$. I // Укр. геом. сб. 1991. № 34. С. 83–98.