Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Ермаков, Наилучшие хаусдорфовы приближения алгебраическими полиномами и пористость, *Матем. заметки*, 1996, том 59, выпуск 5, 692–702

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1763>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 14:24:52

НАИЛУЧШИЕ ХАУСДОРФОВЫ ПРИБЛИЖЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ И ПОРИСТОСТЬ

А. И. Ермаков

Определения и обозначения, которыми будем пользоваться ниже, приведены в [1] и [2]. Напомним, что хаусдорфовым расстоянием между двумя множествами E_1 и E_2 метрического пространства (X, ρ) называется величина

$$H_\rho(E_1, E_2) = \inf \{ \varepsilon \mid E_1 \subset U_\varepsilon(E_2), E_2 \subset U_\varepsilon(E_1) \},$$

где $U_\varepsilon(\cdot)$ — ε -окрестность множества относительно метрики ρ . При $\alpha > 0$ α -метрика Хаусдорфа H_α — это метрика, порожденная α -метрикой Минковского на плоскости xOy :

$$\rho_\alpha((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max \left\{ \frac{|x_1 - x_2|}{\alpha}, |y_1 - y_2| \right\}.$$

Дополненный график $F(f)$ ограниченной, вообще говоря многозначной, функции f вещественной переменной определяется как наименьшее замкнутое множество плоскости xOy , содержащее график $\{(x, f(x))\}$ этой функции и вместе с каждой парой точек $(x, y_1), (x, y_2)$, содержащее вертикальный отрезок с концами в этих точках. Нам удобно считать, что график функции f совпадает с ее дополненным графиком $F(f)$. Хаусдорфовым α -расстоянием между ограниченными функциями f и g , заданными на множестве $E \subset \mathbb{R}$, называется хаусдорфово α -расстояние между их дополненными графиками: $H_\alpha(f, g, E) = H_\alpha(f, g) = H_\alpha(F(f), F(g))$. Если $\Delta = [a, b]$, $0 < \varepsilon < |b - a|/2$, f_ε — сужение функции f ($\text{dom } f = \Delta$) на отрезок $[a + \varepsilon, b - \varepsilon]$, то

$$\tilde{H}_\alpha(f, g, \Delta) \stackrel{\text{def}}{=} \inf \{ \varepsilon \mid F(f_\varepsilon) \subset U_\varepsilon(F(g)), F(g_\varepsilon) \subset U_\varepsilon(F(f)) \}.$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 93-01-00236.

Через $H_\alpha E_n(f, \Delta)$ обозначают наименьшее уклонение заданной на Δ функции f от алгебраических полиномов степени не большей n , через $H_\alpha E_n(f)$ – наименьшее уклонение 2π -периодической функции f от тригонометрических полиномов порядка не большего n в α -метрике Хаусдорфа. Положим $\mathfrak{Z} = [-1, 1]$, $c_\alpha(f, \mathfrak{Z}) = \lim n H_\alpha E_n(f, \mathfrak{Z})$, $c_\alpha(f) = \lim n H_\alpha E_n(f)$. Изучение величин $c_\alpha(f)$ и $c_\alpha(f, \mathfrak{Z})$ положило начало исследованиям, связанным с “эффектом констант”, неожиданно обнаруженным Е.П. Долженко и Е.А. Севастьяновым [3]. Эти величины позволяют описать ряд свойств функции (см. [2], [4]). Так, если $c_\alpha(f) < \pi/\alpha$, то 2π -периодическая функция f однозначна и непрерывна почти всюду, если $c_\alpha(f) < \pi/(2\alpha)$ – всюду. С другой стороны, для любого $\alpha > 0$ существуют всюду разрывная функция g , для которой $c_\alpha(g) = \pi/\alpha$, и разрывная функция φ , для которой $c_\alpha(\varphi) = \pi/(2\alpha)$. Сходные результаты получены и в случае приближения функции алгебраическими полиномами [5]. При $c_\alpha(f, \mathfrak{Z}) \geq \pi/\alpha$ нельзя гарантировать однозначности и непрерывности функции f ни в одной точке, на что указывает пример функции с $c_\alpha(f, \mathfrak{Z}) = \pi/\alpha$, график которой есть квадрат $\{(x, y) \mid -1 \leq x, y \leq 1\}$. Если $c_\alpha(f, \mathfrak{Z}) = \pi\sqrt{1 - (a')^2}/\alpha$, $0 < a' \leq 1$, то f однозначна и непрерывна почти всюду на отрезке $[-a', a']$, а если $c_\alpha(f, \mathfrak{Z}) = \pi\sqrt{1 - a'^2}/(2\alpha)$, $0 < \alpha \leq 1$, то f непрерывна на интервале $(-a, a)$. При этом для любого положительного $a' < 1$ найдется заданная на $\mathfrak{Z}$ функция h , непрерывная почти всюду на $[-a', a']$ и разрывная в остальных точках отрезка $\mathfrak{Z}$, для которой $c_\alpha(h, \mathfrak{Z}) = \pi\sqrt{1 - (a')^2}/\alpha$; если $0 < \alpha \leq 1$, то найдется заданная на $\mathfrak{Z}$ функция ψ с разрывами второго рода в точках $\pm a$, для которой $c_\alpha(\psi, \mathfrak{Z}) = \pi\sqrt{1 - a^2}/(2\alpha)$. Для меры множества $D(f)$ точек разрыва функции f , заданной на $\mathfrak{Z}$, при $0 < c_\alpha(f, \mathfrak{Z}) < \pi/\alpha$ имеет место [5] оценка

$$\text{mes } D(f) \leq 2d = 2\left(1 - \sqrt{1 - \alpha^2 c_\alpha^2(f, \mathfrak{Z})\pi^{-2}}\right) < 2c_\alpha(f, \mathfrak{Z}).$$

Причем множество $D(f)$ с точностью до подмножества меры 0 находится на множестве $[-1, -1 + d] \cup [1 - d, 1]$. В случае $0 < c_\alpha(f, \mathfrak{Z}) < \pi/(2\alpha)$ множество $D(f)$ целиком находится на множестве $[-1, -1 + d'] \cup [1 - d', 1]$, где $2d' = 2\left(1 - \sqrt{1 - 4\alpha^2 c_\alpha^2(f, \mathfrak{Z})\pi^{-2}}\right) < 2\alpha c_\alpha(f, \mathfrak{Z})$. А.П. Петуховым [6] изучена зависимость свойств множества $D(f)$ точек разрыва 2π -периодической функции f от величины $c_\alpha(f)$. Характеристикой множества $D(f)$, связанной с $c_\alpha(f)$, оказался коэффициент σ -равнопористости множества. Само понятие пористости было введено в анализ Е.П. Долженко [7] для характеристики граничных свойств функций. Пусть E – множество в метрическом пространстве (X, ρ) , $x \in X$, $r(\varepsilon, x, E)$ – точная верхняя грань радиусов шаров из ε -окрестности точки x , не пересекающихся с множеством E . Величину

$$r_0(E) = \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf_{x \in E} \frac{r(\varepsilon, x, E)}{\varepsilon}$$

назовем коэффициентом равнопористости множества E , а множество E_0 , для которого $r_0(E_0) > 0$, — равнопористым. Множество E , представимое в виде объединения счетного числа множеств $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$, для которых $\inf r_0(E_i) \geq a > 0$, назовем σ -равнопористым, а величину

$$R(E) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\cup E_i \supset E} \{ \inf r_0(E_i) \},$$

где $\sup$ берется по всем не более чем счетным покрытиям множества E , — коэффициентом σ -равнопористости множества E . Положим $a(c) = \sqrt{1 - (2\alpha c/\pi)^2}$, если $0 < c \leq \pi/(2\alpha)$, и $a(c) = 0$, если $\pi/(2\alpha) < c < \pi/\alpha$; $a'(c) = \sqrt{1 - (\alpha c/\pi)^2}$. В алгебраическом случае имеют место следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 1. Пусть f — ограниченная (вообще говоря, многозначная) функция, заданная на отрезке $\mathfrak{Z}$, $0 < c = c_\alpha(f, \mathfrak{Z}) < \pi/\alpha$. Тогда при любом $b \in (a(c), a'(c)]$ имеет место оценка

$$R(D(f) \cap [-b, b]) \geq \frac{2\pi\sqrt{1-b^2} - 2\alpha c_\alpha(f, \mathfrak{Z})}{3\pi\sqrt{1-b^2} - 2\alpha c_\alpha(f, \mathfrak{Z})}.$$

ТЕОРЕМА 2. Для любого $\alpha > 0$, любого c_0 , удовлетворяющего неравенству $0 < c_0 < \pi/\alpha$, и любого $b \in (a(c_0), a'(c_0)]$ существует заданная на отрезке $\mathfrak{Z}$ функция g , для которой $c_\alpha(g, \mathfrak{Z}) = c_0$ и

$$R(D(g) \cap [-b, b]) = \frac{2\pi\sqrt{1-b^2} - 2\alpha c_0}{3\pi\sqrt{1-b^2} - 2\alpha c_0}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1 вытекает из следующих двух лемм.

ЛЕММА 1 (см. [5]). Если $\underline{\lim} nH_\alpha E_n(f, \mathfrak{Z}) \leq c$, P_n — алгебраический полином степени не большей n наилучшего приближения функции f в α -метрике Хаусдорфа, $f^*(t) = f(\cos t)$, $P_n^*(t) = P_n(\cos t)$ ($0 \leq t \leq \pi$) и $0 < b < 1$, то

$$\underline{\lim} n\tilde{H}_\alpha(f^*, P_n^*, [\arccos b, \pi - \arccos b]) \leq c(1-b^2)^{-1/2}.$$

ЛЕММА 2. Пусть функция f задана и, вообще говоря, неоднозначна на отрезке $\Delta \subset [-\pi, \pi]$, а $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность тригонометрических полиномов степени не большей n соответственно, в совокупности по абсолютной величине ограниченных на $(-\infty, \infty)$ некоторой постоянной $\mathcal{K}$. Если

$$\frac{\pi}{2\alpha} \leq \tilde{c}_\alpha(f, \Delta) \stackrel{\text{def}}{=} \underline{\lim} n\tilde{H}_\alpha(f, T_n, \Delta) \leq \frac{\pi}{\alpha},$$

то

$$R(D(f)) \geq \frac{2\pi - 2\alpha\tilde{c}_\alpha(f, \Delta)}{3\pi - 2\alpha\tilde{c}_\alpha(f, \Delta)}.$$

Эта лемма по формулировке и доказательству аналогична теореме 1 работы [6], где функция f задана на промежутке $(-\infty, \infty)$. Отметим, что если $\tilde{c}_\alpha(f, \Delta) < \pi/(2\alpha)$ и выполнены остальные условия леммы 2, то функция f непрерывна внутри Δ .

Полагая в лемме 1 $c = c_\alpha(f, \Im)$, получаем

$$\lim n\tilde{H}_\alpha(f^*, P_n^*, [\arccos b, \pi - \arccos b]) \leq c(1 - b^2)^{-1/2}.$$

Так как $b \in (a(c), a'(c)]$, то $\pi/(2\alpha) < c_\alpha(f, \Im)(1 - b^2)^{-1/2} \leq \pi/\alpha$. Множество полиномов $\{P_n\}_{n=1}^\infty$, а, следовательно, и множество тригонометрических полиномов $\{P_n^*\}_{n=1}^\infty$ равномерно ограничены по модулю соответственно на отрезке $\Im$ и на прямой $(-\infty, \infty)$ константой $\mathcal{K} = 2 \sup\{|f(x)| \mid x \in \Im\}$. Применяя к функции f^* , заданной на отрезке $\Delta = [\arccos b, \pi - \arccos b]$, лемму 2, получаем, что

$$R(D(f^*)) \geq \frac{2\pi\sqrt{1 - b^2} - 2\alpha c_\alpha(f, \Im)}{3\pi\sqrt{1 - b^2} - 2\alpha c_\alpha(f, \Im)}.$$

В силу локальной линейности отображения $x = \cos t$ ($0 \leq t \leq \pi$), тогда и

$$R(D(f) \cap [-b, b]) \geq \frac{2\pi\sqrt{1 - b^2} - 2\alpha c_\alpha(f, \Im)}{3\pi - 2\alpha c_\alpha(f, \Im)},$$

что доказывает теорему 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Основой доказательства является

ЛЕММА 3. Для любого $\alpha > 0$, любого $\tilde{c}_0 \in (\pi/(2\alpha), \pi/\alpha)$ и любой возрастающей последовательности натуральных чисел существуют 2π -периодическая функция f_0 с $\sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)| = 1$ и последовательность тригонометрических полиномов $\{T_{n_i}\}_{i=1}^\infty$ такие, что

$$1) \quad H_\alpha(f_0, T_{n_i}) \leq \frac{\tilde{c}_0(1 + 2^{-i+1})}{n_i}, \quad i = 1, 2, \dots; \quad (1)$$

$$2) \quad R\left(D(f_0) \cap \left(-\frac{2\alpha\tilde{c}_0 - \pi}{2n_1}, \frac{2\alpha\tilde{c}_0 - \pi}{2n_1}\right)\right) \leq \frac{2\pi - 2\alpha\tilde{c}_0}{3\pi - 2\alpha\tilde{c}_0}; \quad (2)$$

3) $\{n_i\}_{i=1}^\infty$ — подпоследовательность заданной возрастающей последовательности натуральных чисел, первый член n_1 которой может быть взят сколь угодно большим.

Конструкция функции f_0 и выбор полиномов $\{T_{n_i}\}_{i=1}^\infty$ описаны А. П. Петуховым в работе [6, с. 983–987]. Построение А. П. Петухова таково, что

начальное число n_1 , положенное единице, может быть взято любым как угодно большим; каждое из определяемых по индукции чисел $n_1, n_2, \dots$ подчинено только ограничениям снизу (см. [6, с. 984]) и может быть выбрано произвольным достаточно большим, в частности, принадлежащим заданной возрастающей последовательности натуральных чисел.

Положим $\rho = (2\alpha\tilde{c}_0 - \pi)/(2n_1)$, $m_i = [\sqrt{n_i} + 1]$. Нам понадобится обращающаяся в нуль на множестве $[-\pi, \pi] \setminus [-\rho, \rho]$ 2π -периодическая четная функция $\psi \in \tilde{C}^{(8)}$ с $\max_{t \in \mathbb{R}, 0 \leq k \leq 8} |\psi^{(k)}(t)| \leq M$, где значение положительной постоянной M уточним позже. Пусть W_{m_i} – тригонометрический полином наименьшего уклонения порядка $\leq m_i$ от (нечетной) функции ψ' . Тогда согласно результату Ж. Фавара, Н.И. Ахиезера, М.Г. Крейна и теореме Н.П. Корнейчука имеем

$$|\psi'(t) - W_{m_i}(t)| \leq \frac{\pi \mathcal{K}_6 M}{2(m_i + 1)^6} \leq \frac{\pi \mathcal{K}_6 M}{2n_i^3} < \frac{2M}{n_i^3}, \quad (3)$$

так как постоянная Фавара $\mathcal{K}_6 < 4/\pi$. Отсюда следует, что для полинома $P_{m_i}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\pi}^t W_{m_i}(t) dt$, $t \in (-\infty, \infty)$, будет

$$|\psi(t) - P_{m_i}(t)| < \frac{A}{n_i^3}, \quad (4)$$

где $A = 4\pi M$. В частности,

$$|P_{m_i}(t)| < \frac{A}{n_i^3} \quad \text{при } t \in [-\pi, \pi] \setminus [-\rho, \rho]. \quad (5)$$

Введем 2π -периодическую функцию $\varphi_0 = f_0\psi$ и тригонометрические полиномы $\sigma_{r_i} = T_{n_i}P_{m_i}$, где $r_i = n_i + m_i$. Так как $D(\varphi_0) \cap (-\rho, \rho) = D(f_0) \cap (-\rho, \rho)$, то $R(D(\varphi_0) \cap (-\rho, \rho)) \leq (2\pi - 2\alpha\tilde{c}_0)/(3\pi - 2\alpha\tilde{c}_0)$ в силу (2). Очевидно, что

$$\varphi_0(t) = 0 \quad \text{при } t \in [-\pi, \pi] \setminus [-\rho, \rho], \quad (6)$$

$$|\sigma_{r_i}(t)| < \frac{2A}{n_i^3} \quad \text{при } t \in [-\pi, \pi] \setminus [-\rho, \rho]. \quad (7)$$

Обозначим через τ_i величину $\tilde{c}_0(1 + 2^{-i+1})/n_i$. Из неравенства (1) и определения хаусдорфова α -расстояния между двумя функциями следует, что для любого t и любого значения $f_0(t)$ функции f_0 найдется такое t_i , для которого $|t - t_i| \leq \alpha\tau_i$, $|f_0(t) - T_{n_i}(t_i)| \leq \tau_i$. Отсюда и из (3)–(5) вытекает

$$\begin{aligned} |\varphi_0(t) - \sigma_{r_i}(t_i)| &\leq |f_0(t)| \cdot |\psi(t) - P_{m_i}(t)| + |P_{m_i}(t)| \cdot |f_0(t) - T_{n_i}(t)| \\ &\quad + |T_{n_i}(t_i)| \cdot |W_{m_i}(\xi)| \cdot |t - t_i| \\ &\leq (M + 2\alpha M)\tau_i + \frac{A + A\tau_i + 4\alpha M\tau_i}{n_i^3}, \quad \xi \in (t, t_i). \end{aligned}$$

Если считать, что $M = 1/(1 + 2\alpha)$, $B = (3A + 8\alpha M)\tilde{c}_0$, то окажется

$$|\varphi_0(t) - \sigma_{r_i}(t_i)| < \tau_i + \frac{B}{n_i^3}. \quad (8)$$

С другой стороны, для любого t найдется такое t'_i и некоторое значение $f_0(t'_i)$ функции f_0 , что $|t - t'_i| \leq \alpha\tau_i$, $|f_0(t'_i) - T_{n_i}(t)| \leq \tau_i$. Из этого и из (3)–(5) аналогично тому, как было получено неравенство (8), выводим неравенство

$$|\varphi_0(t'_i) - \sigma_{r_i}(t)| < \tau_i + \frac{B}{n_i^3},$$

которое вместе с (8) дает

$$H_\alpha(\varphi_0, \sigma_{r_i}) \leq \tau_i + \frac{B}{n_i^3}. \quad (9)$$

Пусть теперь $2\rho < \lambda_k < \pi/2$, $\varphi_k(t) = \varphi_0(t - \lambda_k + \rho) + \varphi_0(-t - \lambda_k + \rho)$, $S_{r_i}(t) = \sigma_{r_i}(t - \lambda_k + \rho) + \sigma_{r_i}(-t - \lambda_k + \rho)$, $t \in (-\infty, \infty)$. Отметим, что φ_k и S_{r_i} – четные 2π -периодические функции и $\max_{t \in \mathbb{R}} |\varphi_k(t)| = 1$. Оценим величину $H_\alpha(\varphi_0, S_{r_i}, [0, \pi])$. С этой целью воспользуемся тем, что неравенство (9) остается верным, если у функций φ_0 и σ_{r_i} аргумент t заменить на $t - \lambda_k + \rho$ (такая замена означает параллельный перенос графиков исходных функций φ_0 и σ_{r_i} , сохраняющий неизменным хаусдорфово расстояние между ними). Но тогда для любого t и любого значения $\varphi_0(t - \lambda_k + \rho)$ функции φ_0 найдется такое $\bar{t}_i$, что

$$|t - \bar{t}_i| \leq \alpha\tau_i, \quad |\varphi_0(t - \lambda_k + \rho) - \sigma_{r_i}(\bar{t}_i - \lambda_k + \rho)| \leq \tau_i + \frac{B}{n_i^3}.$$

Для любого t найдется также такое $\bar{t}'_i$ и некоторое значение $\varphi_0(\bar{t}'_i - \lambda_k + \rho)$ функции φ_0 , для которых $|t - \bar{t}'_i| \leq \alpha\tau_i$ и $|\sigma_{r_i}(t - \lambda_k + \rho) - \varphi_0(\bar{t}'_i - \lambda_k + \rho)| \leq \tau_i + B/n_i^3$. При этом когда $t \in [\lambda_k - 2\rho, \lambda_k]$, то $\bar{t}_i$ и $\bar{t}'_i \in [0, \pi]$, если i достаточно велико. А так как в силу (6) и (7)

$$\varphi_0(-t - \lambda_k + \rho) = 0 \quad \text{и} \quad |\sigma_{r_i}(-t - \lambda_k + \rho)| \leq \frac{2A}{n_i^3} \quad \text{при} \quad t \in [0, \pi], \quad (10)$$

$$\varphi_k(t) = \varphi_0(t - \lambda_k + \rho) \quad \text{при} \quad t \in [0, \pi], \quad (11)$$

$$\varphi_0(t - \lambda_k + \rho) = 0 \quad \text{и} \quad |\sigma_{r_i}(t - \lambda_k + \rho)| \leq \frac{2A}{n_i^3}$$

$$\text{при} \quad t \in [0, \pi] \setminus [\lambda_k - 2\rho, \lambda_k],$$

то

$$|\varphi_k(t) - S_{r_i}(t)| = |S_{r_i}(t)| \leq \frac{4A}{n_i^3} \quad \text{при} \quad t \in [0, \pi] \setminus [\lambda_k - 2\rho, \lambda_k]. \quad (12)$$

И далее с учетом (10) при достаточно больших i получаем

$$|\varphi_k(t) - S_{r_i}(\bar{t}_i)| \leq \tau_i + \frac{\Phi}{n_i^3}, \quad (13)$$

$$|\varphi_k(\bar{t}'_i) - S_{r_i}(t)| \leq \tau_i + \frac{\Phi}{n_i^3}, \quad (14)$$

где $\Phi = 4A + B$. Неравенства (13) и (14) вместе с неравенствами

$$|t - \bar{t}_i| \leq \alpha\tau_i, \quad |t - \bar{t}'_i| \leq \alpha\tau_i \quad (15)$$

равносильны неравенству $H_\alpha(\varphi_k, S_{r_i}, [0, \pi]) \leq \tau_i + \Phi/n_i^3$ для достаточно больших i . Ясно также, что

$$R(D(\varphi_k) \cap (\lambda_k - 2\rho, \lambda_k)) \leq (2\pi - 2\alpha\tilde{c}_0)/(3\pi - 2\alpha\tilde{c}_0).$$

Наконец, считаем $b_k = \cos \lambda_k$, $\Delta_k = [b_k, b_k \cos 2\rho + \sqrt{1 - b_k^2} \sin 2\rho]$, $\overset{\circ}{\Delta}_k$ – внутренность Δ_k , $g_k(x) = \sqrt{1 - b_k^2} \varphi(\arccos x)$ и $Q_{r_i}(x) = \sqrt{1 - b_k^2} \times S_{r_i}(\arccos x)$ при $x \in \mathfrak{F}$. Функция $S_{r_i}(t)$ – полином степени не выше r_i от $\cos t$, а тогда $Q_{r_i}(x)$ – алгебраический полином степени не выше r_i , для которого

$$|g_k(x) - Q_{r_i}(x)| = |Q_{r_i}(x)| \leq \frac{4A}{n_i^3} \quad \text{при } x \in \mathfrak{F} \setminus \Delta_k$$

в силу неравенства (12). Пусть x – любое значение из отрезка Δ_k и $g_k(x)$ – любое значение функции g_k , $t = \arccos x$, $\bar{t}_i$ – то значение, при котором выполнены неравенства (13) и (15), когда в них $\varphi_k(t) = g_k(x)/\sqrt{1 - b_k^2}$. Положив $x_i = \cos \bar{t}_i$, получим тогда

$$|x - x_i| \leq |t - \bar{t}_i| \cdot |\sin(\lambda_k + \alpha\tau_i)| \leq \alpha \left(\sqrt{1 - b_k^2} \tau_i + \alpha\tau_i^2 \right), \quad (16)$$

$$|g_k(x) - Q_{r_i}(x)| \leq \sqrt{1 - b_k^2} \tau_i + \frac{\Phi}{n_i^3} \quad (17)$$

(при достаточно больших i). Опираясь на неравенства (14) и (15), аналогичными рассуждениями установим, что для любого x из отрезка Δ_k найдется такое $x'_i = \cos \bar{t}'_i$ и некоторое значение $g_k(x'_i)$ функции g_k , что

$$|x - x'_i| \leq \alpha \left(\sqrt{1 - b_k^2} \tau_i + \alpha\tau_i^2 \right), \quad (18)$$

$$|Q_{r_i}(x) - g_k(x'_i)| \leq \sqrt{1 - b_k^2} \tau_i + \frac{\Phi}{n_i^3}. \quad (19)$$

Неравенства (16)–(19) в совокупности означают, что

$$H_{\alpha}(g_k, Q_{r_i}, \mathfrak{S}) \leq \sqrt{1 - b_k^2 \tau_i} + \frac{L}{n_i^2},$$

где $L = 2 \max\{4\alpha \tilde{c}_0^2, \Phi\}$, а i достаточно велико. В силу локальной линейности отображения $x = \cos t$ ($t \in [0, \pi]$) и равенства (11) очевидны соотношения $R(D(g_k)) = R(D(\varphi_k) \cap (\lambda_k - 2\rho, \lambda_k)) \leq (2\pi - 2\alpha \tilde{c}_0)/(3\pi - 2\alpha \tilde{c}_0)$, где $D(g_k) \subset \overset{\circ}{\Delta}_k$.

Полученный для алгебраического случая результат удобно резюмировать в виде следующей леммы технического характера.

ЛЕММА 3'. Для любых $\alpha > 0$, $\tilde{c}_0 \in (\pi/(2\alpha), \pi/\alpha)$, $b_k \in (0, 1)$, любого положительного $\varepsilon_k < \arccos b_k$ и любой возрастающей последовательности натуральных чисел $\{n_i^{(0)}\}_{i=1}^{\infty}$ существуют заданная на отрезке $\mathfrak{S}$ функция g_k с $\sup_{x \in \mathfrak{S}} |g_k(x)| \leq 1$ и последовательность алгебраических полиномов $\{Q_{r_i}\}_{i=1}^{\infty}$, $r_i = n_i + m_i$, $m_i = [\sqrt{n_i} + 1]$, такие, что

1) $H_{\alpha}(g_k, Q_{r_i}, \mathfrak{S}) \leq (\sqrt{1 - b_k^2}(\tilde{c}_0 + 2^{-i+1})/n_i) + L/n_i^2$ ($i = 1, 2, \dots$), где $L = \text{const}$, зависящая только от α и $\tilde{c}_0$; причем $g_k(x) = 0$, $|Q_{r_i}(x)| \leq L/n_i^3$, если

$$x \notin \Delta_k \stackrel{\text{def}}{=} [b_k, b_k \cos 2\rho + \sqrt{1 - b_k^2} \sin 2\rho],$$

где $\rho = (2\alpha \tilde{c}_0 - \pi)/(2n_1) < \varepsilon_k$;

2) $D(g_k) \subset \overset{\circ}{\Delta}_k$, $R(D(g_k)) \leq (2\pi - 2\alpha \tilde{c}_0)/(3\pi - 2\alpha \tilde{c}_0)$;

3) $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ – подпоследовательность заданной возрастающей последовательности натуральных чисел $\{n_i^{(0)}\}_{i=1}^{\infty}$, первый член которой может быть взят любым как угодно большим числом.

Чтобы по заданным в теореме 2 числам $\alpha > 0$, $c_0 \in (0, \pi/\alpha)$, $b \in (a(c_0), a'(c_0))$ предъявить функцию с требуемыми свойствами, выберем последовательность чисел $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ из промежутка $(a(c_0), a'(c_0))$ такую, что $b_k \nearrow b$, по индукции введем определенные на отрезке $\mathfrak{S}$ функции g_k ($k = 1, 2, \dots$) с $\sup_{x \in \mathfrak{S}} |g_k(x)| \leq 1$ и соответствующие им последовательности алгебраических полиномов $\{Q_{r_i^{(k)}}\}_{i=1}^{\infty}$, $r_i^{(k)} = n_i^{(k)} + m_i^{(k)}$,

$m_i^{(k)} = [\sqrt{n_i^{(k)}} + 1]$, со свойствами

$$\begin{aligned} 1) \quad H_{\alpha}(g_k, Q_{r_i^{(k)}}, \mathfrak{S}) &\leq \frac{c_0 + 2^{-i+1} \sqrt{1 - b_k^2}}{n_i^{(k)}} + \frac{L}{(n_i^{(k)})^2} \stackrel{\text{def}}{=} h_i^{(k)} \\ &< \frac{\min\{b_k - b_{k-1}, b_{k+1} - b_k\}}{2\alpha} \quad (b_0 \stackrel{\text{def}}{=} a(c_0)), \quad (20) \end{aligned}$$

где $L = \text{const}$; причем

$$g_k(x) = 0, \quad |Q_{r_i^{(k)}}^{(k)}(x)| \leq \frac{L}{(n_i^{(k)})^3},$$

если $x \notin \Delta_k = [b_k, b_k \cos 2\rho + \sqrt{1 - b_k^2} \sin 2\rho]$, (21)

где

$$\rho = \rho_k = \frac{(2\alpha c_0 / \sqrt{1 - b_k^2}) - \pi}{2n_1^{(k)}} < \arccos \frac{b_{k+1} + b_k}{2} - \arccos b_k;$$

$$2) \quad D(g_k) \subset \overset{\circ}{\Delta}_k, \quad R(D(g_k)) \leq \frac{2\pi\sqrt{1 - b_k^2} - 2\alpha c_0}{3\pi\sqrt{1 - b_k^2} - 2\alpha c_0};$$

3) $\{n_i^{(k)}\}_{i=1}^\infty$ – подпоследовательность последовательности $\{n_i^{(k-1)}\}_{i=1}^\infty$ ($n_i^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} i$). Существование функций g_k ($k = 1, 2, \dots$) обеспечено леммой 3'. На k -м шаге индукции она применяется для заданных чисел $\alpha > 0$, $b_k \in (0, 1)$, $\tilde{c}_0 = c_0 / \sqrt{1 - b_k^2}$, $\varepsilon_k = \arccos(b_{k+1} + b_k)/2 - \arccos b_k$ и определенной на $(k-1)$ -м шаге последовательности натуральных чисел $\{n_i^{(k-1)}\}_{i=1}^\infty$.

Положим $n_k^{(k)} = p_k$, $r_k^{(k)} = l_k$ и $g(x) = \sum_{k=1}^\infty g_k(x)/p_k^3$, $x \in \mathfrak{S}$. Ясно, что

$$g(x) = 0 \quad \text{при } x \in \mathfrak{S} \setminus \bigcup_{k=1}^\infty \Delta_k, \quad (22)$$

$$g(x) = \frac{g_k(x)}{p_k^3} \quad \text{при } x \in \Delta_k \quad (k = 1, 2, \dots),$$

$$R(D(g)) = \inf_k R(D(g_k)) \leq \frac{2\pi\sqrt{1 - b^2} - 2\alpha c_0}{3\pi\sqrt{1 - b^2} - 2\alpha c_0}. \quad (23)$$

Покажем, что $c_\alpha(g, \mathfrak{S}) = c_0$. С этой целью рассмотрим алгебраические полиномы $R_q(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^q (Q_{l_q^{(k)}}^{(k)}(x)/p_k^3)$ степени $\leq l_q$ и оценим величину $H_\alpha(g, R_q, \mathfrak{S})$. Отметим, что $\Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset$ при $i \neq j$, и что число $p_q = n_q^{(q)}$ входит во все предыдущие подпоследовательности, однако в каждую со своим порядковым номером, т.е. $n_q^{(q)} = n_{s(k)}^{(k)}$ при $k < q$. Очевидно,

что $s(k) \geq q$. Пусть x – любое фиксированное число из отрезка $\mathfrak{F}$. Если $x \notin \bigcup_{k=1}^q \Delta_k$, то из (21) и (22) следует

$$\begin{aligned} |g(x) - R_q(x)| &\leq \sum_{k=1}^q |g_k(x) - Q_{l_q}^{(k)}(x)| + \sum_{k=q+1}^{\infty} \left(\frac{|g_k(x)|}{p_k^3} \right) \\ &\leq \frac{qL}{p_q^3} + \frac{1}{p_q^3} \leq \frac{L+1}{p_q^2}. \end{aligned} \quad (24)$$

Если $x \in \Delta_j$, где j – одно из чисел $1, 2, \dots, q$, то для любого значения $g_j(x)$ функции g_j в силу (20) найдется такое x_j , что $|x - x_j| \leq \alpha h_{s(j)}^{(j)}$, $x_j \notin \bigcup_{k=1, k \neq j}^q \Delta_k$, $|g_j(x) - Q_{l_q}^{(j)}(x_j)| \leq h_{s(j)}^{(j)}$. А тогда, учитывая (21), получаем

$$\begin{aligned} |g(x) - R_q(x_j)| &\leq \sum_{k=1, k \neq j}^q |g_k(x) - Q_{l_q}^{(k)}(x_j)| + |g_j(x) - Q_{l_q}^{(j)}(x_j)| \\ &\quad + \sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{|g_k(x)|}{p_k^3} \\ &\leq \frac{(q-1)L}{p_q^3} + h_{s(j)}^{(j)} + \frac{1}{p_q^2} \leq h_{s(j)}^{(j)} + \frac{L+1}{p_q^2}. \end{aligned}$$

С другой стороны, в силу (20), каким бы не был $x \in \Delta_j$, найдется такое x'_j и значение $g_j(x'_j)$ функции g_j , что $|x - x'_j| \leq \alpha h_{s(j)}^{(j)}$, $x'_j \notin \bigcup_{k=1, k \neq j}^q \Delta_k$, $|g_j(x'_j) - Q_{l_q}^{(j)}(x)| \leq h_{s(j)}^{(j)}$. Поэтому

$$\begin{aligned} |g_j(x'_j) - R_q(x)| &\leq \sum_{k=1, k \neq j}^q |g_k(x'_j) - Q_{l_q}^{(k)}(x)| + |g_j(x'_j) - Q_{l_q}^{(j)}(x)| \\ &\quad + \sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{|g_k(x)|}{p_k^3} \leq h_{s(j)}^{(j)} + \frac{L+1}{p_q^2}. \end{aligned}$$

Неравенства (24)–(26) означают, что

$$H_{\alpha}(g, R_q, \mathfrak{F}) \leq \max_{j=1, 2, \dots, q} \{h_{s(j)}^{(j)}\} + \frac{L+1}{p_q^2}.$$

Так как $p_q = n_q^{(q)} = n_{s(j)}^{(j)}$, $s(j) \geq q$,

$$h_{s(j)}^{(j)} \leq \frac{c_0 + 2^{-s(j)+1} \sqrt{1 - b_k^2}}{n_{s(j)}^{(j)}} + \frac{L}{(n_{s(j)}^{(j)})^2},$$

то

$$\max_{j=1,2,\dots,q} \{h_{s(j)}^{(j)}\} \leq \frac{c_0 + 2^{-q+1}}{p_q} + \frac{L}{p_q^2}.$$

Ввиду того, что $l_q/p_q = (p_q + [\sqrt{p_q} + 1])/p_q \rightarrow 1$ при $q \rightarrow \infty$, с учетом последнего неравенства оказывается

$$l_q H_\alpha(g, R_q, \mathfrak{F}) \leq \frac{l_q(c_0 + 2^{-q+1})}{p_q} + \frac{l_q L}{p_q} \rightarrow c_0 \quad \text{при } q \rightarrow \infty.$$

Таким образом, $c_\alpha(g, \mathfrak{F}) = \lim n H_\alpha E_n(g, \mathfrak{F}) \leq c_0$. По лемме 1 в согласии с оценкой (23) имеем

$$\frac{2\pi\sqrt{1-b^2} - 2\alpha c_\alpha(g, \mathfrak{F})}{3\pi\sqrt{1-b^2} - 2\alpha c_\alpha(g, \mathfrak{F})} \leq R(D(g)) \leq \frac{2\pi\sqrt{1-b^2} - 2\alpha c_0}{3\pi\sqrt{1-b^2} - 2\alpha c_0},$$

что возможно только при $c_\alpha(g, \mathfrak{F}) = c_0$. Теорема 2 доказана.

Восточноукраинский государственный университет

Поступило

29.12.94

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Сендов Бл. Хаусдорфовы приближения. София: Изд-во Болг. АН, 1979.
- [2] Долженко Е. П., Севастьянов Е. А. О зависимости свойств функций от скорости их приближения полиномами // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1978. Т. 42. С. 270–304.
- [3] Долженко Е. П., Севастьянов Е. А. О приближении функций в хаусдорфовой метрике // Докл. АН СССР. 1976. Т. 226. № 4. С. 768–770.
- [4] Петрушев П., Ташев С. Некоторые обратные теоремы в метрике Хаусдорфа // Докл. Болг. АН. 1976. Т. 29. С. 1721–1724.
- [5] Ермаков А. И. Наилучшие хаусдорфовы приближения алгебраическими полиномами и непрерывность функции // Матем. заметки. 1980. Т. 28. № 6. С. 843–858.
- [6] Петухов А. П. О зависимости свойств множества точек разрыва функции от скорости ее полиномиальных хаусдорфовых приближений // Матем. сб. 1989. Т. 180. № 7. С. 969–988.
- [7] Долженко Е. П. Граничные свойства произвольных функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1967. Т. 31. № 1. С. 3–14.