Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. П. Зимаков, Конечномерные дискретные линейные стохастические системы ускоряющегося времени и их приложение к квадратичным стохастическим динамическим системам, *Матем. заметки*, 1996, том 59, выпуск 5, 709–718

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1765>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 12:52:26

КОНЕЧНОМЕРНЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ СТОХАСТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ УСКОРЯЮЩЕГОСЯ ВРЕМЕНИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЕ К КВАДРАТИЧНЫМ СТОХАСТИЧЕСКИМ ДИНАМИЧЕСКИМ СИСТЕМАМ

Н. П. Зимаков

В теории однородных цепей Маркова с конечным числом состояний [1], [2] в математических моделях миграции [3, с. 576] и других областях математики естественным образом возникают конечномерные дискретные динамические системы следующего вида. Пусть $P: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ – линейный оператор, задаваемый в стандартном базисе $(e_j)_{j=1}^N$ пространства $\mathbb{R}^N$ матрицей $(p_{ij})_{i,j=1}^N$, с элементами, удовлетворяющими соотношениям:

$$p_{ij} \geq 0, \quad \sum_{i=1}^N p_{ij} = 1. \quad (1)$$

Такой оператор P будем называть линейным стохастическим оператором (ЛСО). Пусть K – стандартный симплекс в $\mathbb{R}^N$

$$K = \left\{ x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N) \in \mathbb{R}_+^N : \sum_{j=1}^N \xi_j = 1 \right\}.$$

Условия (1), очевидно, обеспечивают инвариантность симплекса K и, следовательно, определено действие полугруппы степеней оператора P на симплексе K , снабженном l_1^N -метрикой. Таким образом, определена топологическая полугрупповая, дискретная по времени динамическая система (ДС)

$$(K, P^n)_{n \in \mathbb{Z}_+}. \quad (2)$$

Как обычно, для каждого элемента $x \in K$ определяется траектория $\{x^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ соотношением $x^{(n)} = P^n x$ и вводится множество $\omega(x)$ ее предельных точек. Одной из основных задач в теории топологических

динамических систем является изучение предельного поведения траекторий. В описанной выше ситуации предельное поведение траекторий известно и приводится ниже в удобной для нас форме.

Целью настоящей работы является изучение предельного поведения траекторий следующей, неоднородной по времени, системы, порожденной однородной ДС (2):

$$(K, P^{a^n+b})_{n \in \mathbb{N}}, \quad (3)$$

где $a \in \mathbb{N}$, $a \neq 1$, $b \in \mathbb{Z}$, $a + b > 0$. Систему (3) будем называть конечномерной дискретной линейной стохастической системой ускоряющегося времени (СУВ).

Ниже, в качестве приложения будут рассмотрены квадратичные стохастические операторы, некоторые классы которых приводят к рассмотрению СУВ.

Вернемся к классическому случаю. Хорошо известно [4, гл. XIII], что для ДС (2) существует такое число $m \in \mathbb{N}$, что каждая подпоследовательность

$$\{x^{(mq+r)}\}_{q=0}^{\infty} \quad (r = 0, 1, \dots, m-1)$$

сходится и, в частности, множество $\omega(x)$, $x \in K$, конечно. Имеется много и более современных доказательств этого результата, снабженных удобными для наших целей формулировками. Приведем одну из них [5, с. 115].

Пусть P – ЛСО в $\mathbb{R}^N$, наделенном l_1^N -нормой. Тогда существует такое разложение $\mathbb{R}^N$ в прямую сумму подпространств

$$\mathbb{R}^N = E_0 \oplus E_1,$$

что

- 1) $PE_0 \subset E_0$ и $PE_1 \subset E_1$;
- 2) $r(P_0) < 1$, где $r(P_0)$ – спектральный радиус сужения оператора P на инвариантное подпространство E_0 и, в частности, $\lim_{n \rightarrow \infty} P_0^n = 0$;
- 3) найдется такое число $m \in \mathbb{N}$, что операторы $P_1, P_1^2, \dots, P_1^m$ являются попарно различными изометриями E_1 , причем P_1^m – тождественный оператор в E_1 , а P_1 – сужение P на подпространство E_1 и выполнено равенство

$$P_1^{mq+r} = P_1^r$$

для любых $q, r \in \mathbb{N}$;

- 4) выполнено равенство $\lim_{q \rightarrow \infty} P^{mq+r} = P_1^r$.

Минимальное число m , удовлетворяющее пункту 3, будем обозначать $\text{ind } P$.

Следующая ниже лемма (вместе с приведенным выше описанием предельного поведения траекторий) представляет основу для описания аналогичных объектов в СУВ. Перед ее формулировкой напомним определение сравнения в $\mathbb{Z}$ и связанные с этим обозначения [6, гл. 3] (см. также [7]).

Если $a, b, m \in \mathbb{Z}$ и $m \neq 0$, то говорят, что a сравнимо с b по модулю m , если m делит $b - a$. Это отношение записывается так: $a \equiv b(m)$. Сравнимость по модулю m является отношением эквивалентности в $\mathbb{Z}$. Если $a \in \mathbb{Z}$, то $\bar{a}$ обозначает множество целых чисел, сравнимых с a по модулю m . Множество $\bar{a}$ называется классом вычетов, а его элементы вычетами по модулю m . Символ (a, b) обозначает наибольший общий делитель чисел a и b и, в частности, a и b – взаимно простые, если $(a, b) = 1$. Пусть $a, m \in \mathbb{Z}$ и $(a, m) = 1$. Говорят, что a имеет порядок γ по модулю m , если существует наименьшее целое положительное число, для которого $a^\gamma \equiv 1(m)$. Отметим некоторые свойства порядка.

1. Если a имеет порядок γ по модулю m , то числа $1 = a^0, a^1, \dots, a^{\gamma-1}$ несравнимы по модулю m .

2. Сравнение $a^\delta \equiv 1(m)$ имеет место тогда и только тогда, когда число δ делится на γ .

ЛЕММА. Пусть $a, m \in \mathbb{N}$. Тогда (пункты 1–4 допускают сведение к известным результатам о конечных полугруппах [8, с. 38–40])

1) существует такие единственные числа $t, k \in \mathbb{N}$, что

$$a^{k+t} \equiv a^k(m), \quad (4)$$

а число $k + t$ – наименьшее из всех $n \in \mathbb{N}$, для которых выполнено сравнение $a^n \equiv a^r(m)$, с некоторым натуральным $r < n$;

2) для любого натурального $n \geq k$ и любого $d \in \mathbb{Z}_+$

$$a^{n+dt} \equiv a^n(m); \quad (5)$$

3) если натуральное число $n \geq t$ и i – остаток от делений числа n на t , то

$$a^{k+n} \equiv a^{k+i}(m); \quad (6)$$

4) первые $k + t - 1$ элементов последовательности $\{\bar{a}^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ попарно различны, и поэтому $k + t - 1 \leq t$, а все остальные периодически (с периодом t) принимают одно из значений набора

$$\{\bar{a}^k, \bar{a}^{k+1}, \dots, \bar{a}^{k+t-1}\}; \quad (7)$$

- 5) если $a^n \not\equiv 0(m)$ при $n \in \mathbb{N}$, то число t равно порядку a по модулю m_0 , где m_0 – частное от деления m на наибольший член q последовательности

$$q_1 = (m, a), q_2 = (m, a^2), \dots, q_n = (m, a^n), \dots, \quad (8)$$

a k – наименьший из показателей степени n таких, что $(m, a^n) = q$, если $(a, m) = 1$, то t – порядок a по модулю m ;

- 6) t – наименьшее из чисел $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяющих одному из сравнений $a^{r+n} \equiv a^r(m)$ при $r \in \mathbb{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как, случай $a = 1$ очевиден ($t = 1, k = 1$ и $k+t-1 = 1$), то далее будем считать, что $a \neq 1$. Тогда последовательность $\{a^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ имеет бесконечное число членов, а, поскольку имеется ровно m классов чисел по модулю m , то в некотором классе чисел по модулю m лежит бесконечное число элементов этой последовательности. Поэтому существуют такие натуральные числа $k < s$, что $a^k \equiv a^s(m)$. Пусть s – наименьшее из чисел, обладающих приведенным выше свойством. Тогда и k – единственное из натуральных $k < s$, удовлетворяющих сравнению

$$a^k \equiv a^s(m). \quad (9)$$

Итак, определено k . Положим далее $t = s - k$. Тогда из сравнения (9) следует (4) и пункт 1 установлен.

Пусть далее $n \in \mathbb{N}$ и $n \geq k$. Тогда $n = k + l$ для некоторого $l \in \mathbb{Z}_+$. Умножая обе части сравнения (4) на a^l а затем на a^{dt} , получим сравнение (5) и, таким образом, пункт 2 установлен.

Докажем пункт 3. Итак, пусть $n \in \mathbb{N}$ и $n \geq 1$. Тогда существуют такие $d \in \mathbb{N}$ и $i \in \mathbb{Z}_+$, что $n = dt + i$, где $0 \leq i < t$. Поэтому из сравнения (5) вытекает сравнение (9).

По поводу пункта 4 заметим, что, как следует из пункта 1, все классы чисел по модулю m : $\bar{a}^1, \bar{a}^2, \dots, \bar{a}^{k+t-1}$ попарно различны. Оставшаяся часть этого утверждения вытекает из пункта 3.

Докажем пункт 5. Пусть $a^n \not\equiv 0(m)$ при $n \in \mathbb{N}$ и, в частности, $m \neq 1$ (если $a^{n_0} \equiv 0(m)$, где n_0 – первый номер, обладающий этим свойством, то, очевидно, $t = 1$ и последовательность $\{\bar{a}^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ стационарна, начиная с номера n_0). Тогда существуют такие числа $k_0, m_0, q, a_0 \in \mathbb{N}$, что $m_0 \neq 1$, $m = qm_0$, $a^{k_0} = qa_0$, $(m_0, a) = 1$ и $(m_0, a_0) = 1$. Действительно, если $(m, a) = 1$, то в качестве искомым, возьмем числа $m_0 = m$, $a_0 = a$, $k_0 = 1$ и $q = 1$. Если же $(m, a) > 1$, то рассмотрим последовательность (8). Поскольку последовательность (8) ограничена, монотонно не убывает и содержится в множестве $\mathbb{N}$, то найдется такой наименьший номер k_0 , что $q_n = q_{k_0}$ при $n \geq k_0$. Положим $q = q_{k_0}$. Тогда для некоторых чисел m_0 ,

$a_0 \in \mathbb{N}$: $m = qm_0$, $a^{k_0} = qa_0$ и $(m_0, a_0) = 1$. Кроме того, и $(a, m) = 1$. Действительно, если $(a, m_0) = q' > 1$, то $m_0 = q'm'_0$ и $a = q'a'_0$ для некоторых $m'_0, a'_0 \in \mathbb{N}$. Тогда $a^{k_0+1} = (qq')(a_0a'_0)$ и $m = (qq')m'_0$. При этом $qq' > q$. Поэтому $qq' = (m, a^{k_0+1})$ и $qq' > q$, но $(m, a^{k_0+1}) = q_{k_0+1} = q$. Полученное противоречие показывает, что $(a, m_0) = 1$. Отметим также, что по определению числа k_0 ни одно из чисел $a^1, a^2, \dots, a^{k_0-1}$ не делится на q . Так как $(a, m_0) = 1$, то определен порядок t_0 числа a по модулю m_0 и, таким образом, $a^{t_0} \equiv 1(m_0)$. Умножая обе части этого сравнения, а также его модуль m_0 на q , с учетом равенства $m = qm_0$, получим $qa^{t_0} \equiv q(m)$. Умножив затем обе части последнего сравнения на a_0 , с учетом равенства $a^{k_0} = qa$, получим

$$a^{k_0+t_0} \equiv a^{k_0}(m). \quad (10)$$

Отметив, что из сравнения (10) и пункта 1 следует неравенство $k_0 + t_0 \geq k + t$, докажем несравнимость чисел

$$a^1, a^2, \dots, a^{k_0+t_0-1} \quad (11)$$

по модулю m . Действительно, предположим противное. Пусть

$$a^{n_1} \equiv a^{n_2}(m), \quad (12)$$

где числа $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ удовлетворяют неравенствам $1 \leq n_1 < n_2 \leq k_0 + t_0 - 1$. Если при этом $k_0 \leq n_1$, то $n_1 = k_0 + i$ и $n_2 = k_0 + j$ для таких $i, j \in \mathbb{Z}_+$, что

$$i < j \leq t_0 - 1. \quad (13)$$

Записав сравнение (12) в виде $a^{k_0+i} \equiv a^{k_0+j}(m)$ и разделив обе его части и модуль на q , получим

$$a_0a^i \equiv a_0a^j(m_0). \quad (14)$$

Левую и правую части сравнения (14) можно сократить на a_0 , так как $(a_0, m_0) = 1$. В результате приходим к сравнению $a^i \equiv a^j(m_0)$, где числа i, j удовлетворяют неравенствам (13). Однако это невозможно, поскольку t_0 – порядок числа a по модулю m_0 и, следовательно, все числа $a^0, a^1, \dots, a^{t_0-1}$ несравнимы по модулю m_0 . Итак, $k_0 > n_1$. Если при этом $n_2 \geq k_0$, то $n_2 = k_0 + j$ для такого $j \in \mathbb{Z}_+$, что $j \leq t_0 - 1$. Поскольку $a^{k_0}a^j \equiv a^{n_1}(m)$, то a^{n_1} делится на q . Но это невозможно, так как $n_1 < k_0$. Рассмотрим последний случай $k_0 > n_2$. Тогда $k_0 = n_2 + j$ для некоторого $j \in \mathbb{N}$. Умножая сравнение (12) на a^j , приходим к сравнению

$$a^{n_1+j} \equiv a^{k_0}(m), \quad (15)$$

где $n_1 + j < n_2 + j = k_0$. Из сравнения (15) вытекает, что a^{n_1+j} делится на q , а это невозможно, поскольку $n_1 + j < k_0$. Значит, сравнение (12)

не может выполняться, и поэтому все члены последовательности (11) попарно несравнимы по модулю m . Выше было установлено неравенство $k_0 + t_0 \geq k + t$. Если $k_0 + t_0 > k + t$, то существует такое число $i \in \mathbb{N}$, что $k_0 + t_0 = k + t + i$ и, следовательно, $k_0 + t_0 - 1 = k + t + i - 1$, а, значит, и $a^{k_0+t_0-1} \equiv a^{k+t+i-1}(m)$. Откуда в силу сравнения (5) имеем $a^{k_0+t_0-1} \equiv a^{k+t-1}(m)$, причем $k + i - 1 < k_0 + t_0 - 1$, а это противоречит несравнимости членов последовательности (11) по модулю m . Следовательно, $k_0 + t_0 = k + t$. Далее заметим, что тогда из сравнений (4) и (10) следует сравнение $a^{k_0} \equiv a^k(m)$, возможное лишь при $k = k_0$. Поэтому $t = t_0$ и пункт 5 установлен.

Докажем пункт 6. Предполагая далее, что $a^n \not\equiv 0(m)$, $n \in \mathbb{N}$ (в противном случае $t = 1$ утверждение тривиально), рассмотрим сравнение

$$a^{r+n} \equiv a^r(m), \quad r \in \mathbb{N}. \quad (16)$$

При этом можно считать, что $r \geq k_0$, где k_0 определено в процессе доказательства пункта 5, так как этого легко добиться умножением сравнения (16) на подходящую степень a . Итак, сравнение (16) можно записать в виде $a^{k_0}a^{r-k_0+n} \equiv a^{k_0}a^{r-k_0}(m)$ и, разделив обе части и модуль на q (число q определено в процессе доказательства пункта 5), получим

$$a_0a^{r-k_0}a^n \equiv a_0a^{r-k_0}(m_0). \quad (17)$$

Покажем, что $(a^{r-k_0}, m_0) = 1$. Действительно, если $(a^{r-k_0}, m_0) = c > 1$, то $a^{r-k_0} = ci$ и $m_0 = cj$ для некоторых $i, j \in \mathbb{N}$. Тогда $a^r = cia^{k_0} = (cq)(ia_0)$, $m = qm_0(cq)j$ и $cq > q$, так как $c > 1$. Итак, cq – общий делитель чисел a^r и m , больший q , что невозможно, так как $(a^r, m) = q$ при $r \geq k$. Следовательно, $(m_0, a^{r-k_0}) = 1$, а поскольку и $(m, a_0) = 1$, то, разделив сравнение (17) на $a_0a^{r-k_0}$, получим $a^n \equiv 1(m_0)$. Следовательно, n делится на t (действительно, t – порядок числа a по модулю m_0 , что установлено в процессе доказательства пункта 5, и, следовательно, имеет силу свойство 2 порядка), что и устанавливает пункт 6. Итак, лемма доказана.

ТЕОРЕМА. Пусть

$$(K, P^{a^n+b})_{n \in \mathbb{N}}, \quad a \in \mathbb{N}, \quad b \in \mathbb{Z}, \quad a \neq 1, \quad a + b > 0,$$

– СУВ, порожденная ЛСО $P: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$. Тогда

- 1) для любого элемента $x \in K$ множество $\omega(x)$ конечно ($\omega(x) = \{\hat{x}_0, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_{t-1}\}$);
- 2) траектория $\{x^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ каждого элемента $x \in K$ разбивается на t подпоследовательностей $\{x^{(tq+s)}\}_{q \in \mathbb{N}}$, $s = 0, 1, \dots, t-1$,

сходящихся к соответствующим точкам $\hat{x}_s \in \omega(x)$, где $t \leq m$ и $m = \text{ind } P$;

- 3) если $m = a^{n_0}$ для некоторого $n_0 \in \mathbb{Z}_+$, то траектория каждой точки $x \in K$ сходится к единственной неподвижной точке $\hat{x}$;
- 4) для любой точки $x \in K$ существует предел средних

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} (x + x^{(1)} + \dots + x^{(n)}). \quad (18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $m = \text{ind } P$ и, применяя лемму к числам a, m , находим соответствующие параметры t и k . Тогда по лемме выполнено сравнение (5). Обозначим через $r_0, r_1, \dots, r_{t-1}$ соответствующие остатки от деления на m чисел $a^{kt} + b, a^{k(t+1)} + b, \dots, a^{(k+1)t-1} + b$. Тогда

$$a^{kt+s} + b \equiv r_s(m), \quad s = 0, 1, \dots, t-1. \quad (19)$$

Покажем далее, что если $s \in \mathbb{Z}_+$ удовлетворяет неравенству $s \leq t-1$, то при $q \in \mathbb{N}$ и $q \geq k$ выполнено сравнение

$$a^{tq+s} + b \equiv r_s(m). \quad (20)$$

Действительно, имеем $q = k + d$ для некоторого $d \in \mathbb{Z}_+$. Поскольку $tq + s = (tk + s) + td$, то из (5) получаем $a^{tq+s} \equiv a^{tk+s}(m)$, но тогда и $a^{tq+s} + b \equiv (a^{tk+s} + b)(m)$. Откуда с учетом (19) получаем сравнение (20). Запишем далее сравнение (20) в виде $a^{tq+s} + b = l_q m + r_s$ ($q \geq k$) и разложим векторное пространство $\mathbb{R}^N$ в прямую сумму P -инвариантных подпространств E_0 и E_1 и обозначим через P_0 и P_1 соответствующие сужения ЛСО P на E_0 и E_1 . Тогда

$$\lim_{q \rightarrow \infty} P^{a^{tq+s}+b} = \lim_{q \rightarrow \infty} P^{l_q m + r_s} = P_1^{r_s}.$$

Положив $\hat{x}_s = P_1^{r_s} x$, $x \in K$, имеем $\lim_{q \rightarrow \infty} x^{(tq+s)} = \hat{x}_s$ для $s = 0, 1, \dots, t-1$. Итак, для доказательства утверждений 1, 2 осталось только заметить, что если некоторая подпоследовательность $\{x^{(n_k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ последовательности $\{x^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ сходится, то ее предел обязан совпасть с одной из точек $\hat{x}_s$, поскольку каждое достаточно большое число n_k представимо в виде $tq + s$.

Докажем утверждение 3. Итак, пусть $m = a^{n_0}$, $n_0 \in \mathbb{Z}_+$. В этом случае $k = n_0$, $t = 1$ и из ряда сравнений (19) остается лишь сравнение $a^{n_0} + b \equiv r_0(m)$, где r_0 – остаток от деления b на m . Следовательно,

в этом случае траектория $x^{(n)}$ сходится к единственной предельной точке $\hat{x}_0 = P_1^{r_0}x$, являющейся, очевидно, неподвижной точкой СУВ.

Утверждение 4 вытекает из пункта 2 с учетом того факта, что средние арифметические сходящейся последовательности сходятся к тому же самому пределу. Таким образом, теорема доказана.

Квадратичным стохастическим оператором КСО называется отображение $V: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ вида

$$(Vx)_i = \sum_{j,k=1}^N p_{ijk} \xi_j \xi_k, \quad x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N),$$

где $p_{ijk} \geq 0$, $p_{ijk} = p_{ikj}$ и $\sum_{i=1}^N p_{ijk} = 1$.

Условия на коэффициенты, очевидно, обеспечивают инвариантность симплекса K и, таким образом, определена квадратичная стохастическая динамическая система КСДС: $(K, V^n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$. КСДС имеет прямой биологический смысл [6] и, в частности, представляет большой интерес задача изучения предельного поведения траекторий. При этом в конкретных случаях возможно значительное разнообразие ситуаций. В том числе имеется класс КСДС, для которых множество $\omega(x)$ может быть и бесконечным [5]. Далее покажем, что траектории некоторых КСДС приводятся к траекториям СУВ, и, таким образом, в силу теоремы имеют предельное поведение, аналогичное предельному поведению траекторий линейных систем (2).

Отметим следующие факты, непосредственно вытекающие из определения КСО.

1. КСО V однозначно соответствует такая линейная операторнозначная функция $P(x)$, $x \in \mathbb{R}^N$, со значениями во множестве линейных операторов в $\mathbb{R}^N$, что

- а) $P(x)$ – ЛСО при $x \in K$,
- б) $V(x) = P(x)x$,
- в) $P(x)y = P(y)x$, $x, y \in \mathbb{R}^N$.

При этом функция $P(x)$ задается переменной матрицей с элементами $p_{ij}(x) = \sum_{k=1}^N p_{ijk} \xi_k$, $i, j = \overline{1, N}$, $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N)$.

2. КСО V является сужением соответствующего билинейного стохастического отображения $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ в $\mathbb{R}^N$, наделяющего $\mathbb{R}^N$ структурой коммутативной но, вообще говоря, неассоциативной алгебры

$$(x \circ y)_i = \sum_{j,k=1}^N p_{ijk} \xi_j \xi_k, \quad x = (\xi_1, \dots, \xi_N), \quad y = (\eta_1, \dots, \eta_N), \quad (21)$$

и, таким образом, в обозначениях пункта 1 $x \circ y = P(x)y$, $Vx = x \circ x$.

Назовем введенную в пункте 1 функцию $x \mapsto P(x)$, $x \in K$, переходной функцией КСДС. Траектория точки $x \in K$, $x^{(n)} = V^n x$, $n \in \mathbb{Z}_+$, для такой системы, которая устанавливается индукцией по n , выражается с помощью переходной функции следующим образом:

$$x^{(n)} P(x^{(n-1)}) P(x^{(n-2)}) \dots P(x) x. \quad (22)$$

КСО V назовем абелевым, если для любых точек x, y выполняется равенство $P(x)P(y) = P(y)P(x)$. В силу линейности функции $x \mapsto P(x)$ это условие эквивалентно равенствам $P_i P_j = P_j P_i$; $i, j = \overline{1, N}$, где $P_i = P(e_i)$, а $(e_i)_{i=1}^N$ – стандартный базис $\mathbb{R}^N$.

Отметим, что, как нетрудно убедиться, умножение (21) является ассоциативным тогда и только тогда, когда оператор V абелев.

ПРИМЕР. Рассмотрим стохастический вектор $a = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$, $\alpha_j \geq 0$, $\sum_{j=1}^N \alpha_j = 1$, и порожденный им циркулянт:

$$C(a) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{N-1} & \alpha_N \\ \alpha_N & \alpha_1 & \dots & \alpha_{N-2} & \alpha_{N-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_N & \alpha_1 \end{vmatrix}.$$

Пусть $m \in \{0, 1, \dots, N-1\}$. Полагая $P(e_i) = C(a)C^{m+i-1}(e_N)$, $i = \overline{1, N}$, и продолжая далее по линейности, получим переходную функцию $P(x)$ абелева КСО $Vx = P(x)x$.

Пусть V – абелев КСО и $x \mapsto P(x)$ – соответствующая ему переходная функция, тогда

$$x^{(n)} = P^{2^n-1}(x)x, \quad (23)$$

что нетрудно установить индукцией по n с помощью формулы (22). Поскольку существуют неассоциативные стохастические алгебры с ассоциативными степенями, такой, например, является вещественная групповая алгебра конечной некоммутативной группы, наделенная ассоциированным йордановым умножением, имеет смысл дать определение более общего класса КСО, включающего, в частности, и абелевы КСО.

КСО V назовем сворачиваемым, если для любого x выполнено равенство (23). Таким образом, мы приходим к следующему следствию теоремы, описывающему предельное поведение траекторий КСДС со сворачиваемыми и, в частности, абелевым КСО.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть x – произвольная точка симплекса K , $\{x^{(n)}\}$ – ее траектория относительно КСДС со сворачиваемым КСО V , $\omega(x)$ – соответствующее множество ее предельных точек. Тогда

- 1) $\omega(x) = \{\hat{x}_0, \dots, \hat{x}_{t-1}\}$ – конечное множество;
- 2) последовательность $\{x^{(n)}\}$ разбивается на t подпоследовательностей $\{x^{(tq+s)}\}_{q \in \mathbb{N}}$, $s = 0, 1, \dots, t-1$, сходящихся к соответствующим точкам $\hat{x}_s \in \omega(x)$, где $t \leq m$, а $m = \text{ind } P(x)$;
- 3) если $m = 2^{n_0}$ для некоторого $n_0 \in \mathbb{Z}_+$, то траектория сходится к неподвижной точке оператора V ;
- 4) существует предел средних арифметических при $n \rightarrow \infty$:

$$\frac{1}{n+1}(x + x^{(1)} + \dots + x^{(n)}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем элемент $x \in K$ и положим $P = P(x)$, $a = 2$ и $b = -1$. Тогда траектория $\{x^{(n)}\}$ КСДС совпадает с соответствующей траекторией СУВ (K, P^{2^n-1}) , применяя к которой теорему, получаем искомый результат.

Ташкентский государственный университет

Поступило

06.05.93

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Кемени Дж., Снелл Дж. Конечные цепи Маркова. М.: Наука, 1970.
- [2] Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1. М.: Мир, 1984.
- [3] Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989.
- [4] Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1967.
- [5] Любич Ю. И. Итерации квадратичных отображений. Математическая экономика и функциональный анализ. М.: Наука, 1974.
- [6] Айерленд К., Роузен М. Классическое введение в современную теорию чисел. М.: Мир, 1987.
- [7] Виноградов И. М. Основы теории чисел. М.: Наука, 1981.
- [8] Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп. Т. 1. М.: Мир, 1972.