Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Т. Ильичев, Уединенные волны в холодной плазме, *Матем. заметки*, 1996, том 59, выпуск 5, 719–728

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1766>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 13:37:20

УЕДИНЕННЫЕ ВОЛНЫ В ХОЛОДНОЙ ПЛАЗМЕ

А. Т. Ильичев

Введение. Понижение порядка динамической системы методом редукции на центральное многообразие (см. [1], [2]) является плодотворным методом решения задач механики и физики, где требуется определить формы бегущих волн, являющихся бифуркацией из состояния покоя, т.е. тривиального решения рассматриваемой динамической системы. Поток на центральном многообразии описывает все ограниченные решения, не покидающие малой окрестности состояния покоя для всех положительных и отрицательных значений “времени”. Роль “времени” для бегущих волн играет пространственная переменная $-\infty < \xi < \infty$. Все малые решения динамической системы

$$\dot{\mathbf{w}} = A\mathbf{w} + F(\mu, \mathbf{w}) \quad (1)$$

($A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – линейный оператор (постоянная матрица), среди собственных значений которой находятся чисто мнимые, $F \in C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ для достаточно большого целого k , $F(0, 0) = 0$, $\partial_{\mathbf{w}} F(0, 0) = 0$, μ – параметр бифуркации) лежат на центральном многообразии $\mathbf{w}_1 = h(\mu, \mathbf{w}_0)$, $\mathbf{w}_0 \in E_0$ -инвариантному подпространству, натянутому на собственные векторы, отвечающие чисто мнимым собственным значениям A , $\mathbf{w}_1 \in E_h$, $\mathbb{R}^n = E_0 \oplus E_h$ и $\mathbf{w} = \mathbf{w}_0 + \mathbf{w}_1$. Функция h имеет второй порядок малости по μ и $\mathbf{w}_0$ и наследует свойства симметрии системы (1).

Отметим, что в последнее время получил распространение метод редукции для систем типа (1) в гильбертовых пространствах, в частности, широкий интерес вызывают модельные задачи, связанные с редукцией уравнений в частных производных в цилиндрических областях. Если инвариантное подпространство, отвечающее мнимым собственным значениям оператора A конечномерно, то уравнение в частных производных, где неограниченная пространственная переменная трактуется как “время”, при определенных свойствах резольвенты оператора A сводится к конечномерной динамической системе. Развитие метода редукции для динамических

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 93–013–17355.

систем в гильбертовых пространствах было впервые предпринято в [3] и получило свое завершение (для квазилинейных систем) в [4]. Среди работ, где рассматривается приложение обсуждаемого метода к модельным задачам механики и физики, отметим работу [5], где изучается распространение нелинейных волн в упругой полосе, а также [6], где описываются все ветви нелинейных бегущих волн, являющиеся бифуркацией из состояния покоя, в идеальной жидкости конечной глубины с учетом капиллярных эффектов.

В настоящей работе исследуется вопрос наличия уединенных волн в холодной плазме. Уравнения, описывающие плоские бегущие волны в холодной плазме, достаточно сложны, вследствие чего известно лишь несколько частных решений солитонного типа [7]. В работах [8], [9] для длинных слабонелинейных волн формально были получены уравнения Кортевега–де Вриза для $\varphi \neq \varphi_c$ (где φ – угол между вектором магнитного поля в состоянии покоя и направлением движения, а φ_c – критическое значение этого угла) и уравнение с пятой производной для $\varphi = \varphi_c$. Формальный вывод при φ близких к φ_c дает эволюционное уравнение с квадратичной нелинейностью и третьей и пятой производной. Для этого модельного уравнения (в случае разных знаков при третьей и пятой производной) в работах [10], [11] было доказано существование уединенных волн, а также установлена их нелинейная устойчивость.

В настоящей работе исследуется полная система уравнений холодной плазмы на предмет существования семейства уединенных волн, зависящего от параметра. Следуя [6], выделим три последовательных этапа этого исследования:

- сведение динамической системы (4) четвертого порядка к системе второго порядка на центральном многообразии (п. 1);
- приближение системы на центральном многообразии последовательностью интегрируемых систем, описание всех ограниченных решений аппроксимирующей системы (п. 2);
- доказательство грубости солитоноподобных решений по отношению к любым обратимым возмущениям высшего порядка по амплитуде (п. 3), обратимость этих возмущений отвечает соответствующей симметрии исходных уравнений.

Доказательство существования солитоноподобных решений, таким образом, представляет собой комбинацию асимптотических методов и приемов, связанных с доказательством “выживания” решений указанного типа для полной системы уравнений. Применение асимптотических методов (типа ВКБ) в теории плазмы с малой нелинейностью, описываемой МГД уравнениями, хорошо известно (см., например, [12]). В рассматриваемом случае искомая система приближается интегрируемыми уравнениями в квази-нормальной форме. Для доказательства грубости уединенных волн для полной системы уравнений, как правило, используются подходящие

версии теоремы о неявной функции. В данном случае применяется теорема о неявной функции для оператора, действующего в банаховом пространстве экспоненциально убывающих функций.

1. Одномерные движения холодной квазинейтральной плазмы описываются системой уравнений [8]

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial(nu)}{\partial x} &= 0, \quad \frac{du}{dt} + n^{-1} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{B_y^2 + B_z^2}{2} \right] = 0, \\ \frac{dv}{dt} - n^{-1} B_x \frac{\partial B_y}{\partial x} &= -R_e^{-1} \frac{d}{dt} \left(n^{-1} \frac{\partial B_z}{\partial x} \right), \\ \frac{dw}{dt} - n^{-1} B_x \frac{\partial B_z}{\partial x} &= R_e^{-1} \frac{d}{dt} \left(n^{-1} \frac{\partial B_y}{\partial x} \right), \\ \frac{dB_y}{dt} - B_x \frac{\partial v}{\partial x} + B_y \frac{\partial u}{\partial x} &= R_i^{-1} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{dw}{dt} \right), \\ \frac{dB_z}{dt} - B_x \frac{\partial w}{\partial x} + B_z \frac{\partial u}{\partial x} &= -R_i^{-1} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{dv}{dt} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

($d/dt \equiv \partial/\partial t + u\partial/\partial x$), где независимая переменная x , плотность числа частиц n , напряженность магнитного поля $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$ и скорость ионов $\mathbf{v} = (u, v, w)$ *обезразмерены* при помощи характерной длины l , плотности невозмущенной плазмы n_0 , невозмущенного магнитного поля $\mathbf{B}_0$ и альфвеновской скорости $V_A = |\mathbf{B}_0|/\sqrt{4\pi n_0(m_i + m_e)}$, m_i, m_e — соответственно массы иона и электрона. Параметры дисперсии R_i и R_e даются формулами $R_i = \omega_{ic}/\omega_0$, $R_e = \omega_{ec}/\omega_0$, где ω_{ic} — ионная, ω_{ec} — электронная циклотронные частоты, а $\omega_0 = V_A/l$ — характерная частота явления. Одномерные движения холодной плазмы характеризуются тем, что компонента B_x вектора напряженности магнитного поля остается постоянной в течение всего времени движения. Переменные $n, u, v, w, B_x, B_y, B_z$ в состоянии покоя имеют значения 1, 0, 0, 0, $\cos \varphi$, $\sin \varphi$, 0 соответственно. Здесь φ — угол наклона вектора магнитного поля к направлению движения, совпадающему с осью x . Дисперсионная кривая в данном случае состоит из двух ветвей и при малых волновых числах k (больших длинах волн) фазовые скорости $V_\Phi^\pm(k)$ имеют вид [8], [9]

$$\begin{aligned} V_\Phi^+ &= 1 - \frac{1}{2R_i R_e} \left\{ 1 - \left(\sqrt{\frac{R_e}{R_i}} - \sqrt{\frac{R_i}{R_e}} \right)^2 \operatorname{ctg}^2 \varphi \right\} k^2 + \dots, \\ V_\Phi^- &= \cos \varphi \left[1 - \frac{1}{2R_i R_e} \left\{ 1 + \left(\sqrt{\frac{R_e}{R_i}} - \sqrt{\frac{R_i}{R_e}} \right)^2 \operatorname{ctg}^2 \varphi \right\} k^2 + \dots \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

Скорость $V_\Phi^+(k)$ соответствует магнитозвуковой волне, а $V_\Phi^-(k)$ — альфвеновской волне. В пределе $k \rightarrow 0$ из (3) получим $V_\Phi^+ = V_\Phi^+(0) = 1$,

$V_{\Phi}^{-} = V_{\Phi}^{-}(0) = \cos \varphi$. Далее будут рассматриваться бегущие волны, скорость которых мало отличается от скорости магнитозвуковых волн бесконечной длины, т.е. нас будут интересовать решения уравнений (2) типа бегущей волны, распространяющейся со скоростью $V = 1 + \mu/2$, где μ — малый параметр. Решения уравнений (2), соответствующие бегущим волнам, зависят только от $\xi = x - Vt$ и описываются системой, полученной однократным интегрированием из (2). При этом плотность n и x -компонента скорости алгебраически зависят от остальных неизвестных функций:

$$n^{-1} = 1 - \frac{1}{2V^2}(\hat{B}_y^2 + 2_0B_y\hat{B}_y + B_z^2),$$

$$u = \frac{1}{2V}(\hat{B}_y^2 + 2_0B_y\hat{B}_y + B_z^2), \quad \hat{B}_y = B_y - _0B_y, \quad _0B_y = \sin \varphi.$$

Константы интегрирования выбираются таким образом, чтобы невозмущенное состояние являлось решением получившихся уравнений, которые, следовательно, имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{v} &= -R_i B_z - \frac{R_i \cos \varphi}{V} n w, \\ \dot{w} &= \frac{R_i \cos \varphi}{V} n v + R_i \hat{B}_y + R_i \sin \varphi n (n^{-1} - 1), \\ \dot{\hat{B}}_y &= R_e n w + \frac{R_e \cos \varphi}{V} n B_z, \quad \dot{B}_z = -R_e n v - \frac{R_e \cos \varphi}{V} n \hat{B}_y. \end{aligned} \quad (4)$$

Вблизи $V = V_{\Phi}^{+}$ система (4) может быть представлена в форме (1), где $\mathbf{w} = (v, w, \hat{B}_y, B_z)^t$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -R_i \cos \varphi & 0 & -R_i \\ R_i \cos \varphi & 0 & R_i \cos^2 \varphi & 0 \\ 0 & R_e & 0 & R_e \cos \varphi \\ -R_e & 0 & -R_e \cos \varphi & 0 \end{pmatrix}$$

и с точностью до членов порядка $(|\mu \mathbf{w}| + |\mathbf{w}|^2)$ включительно

$$F = \begin{pmatrix} \frac{\mu}{2} R_i \cos \varphi w - R_i \cos \varphi \sin \varphi w \hat{B}_y \\ -\frac{\mu}{2} R_i \cos \varphi v + \mu R_i \sin^2 \varphi \hat{B}_y + \frac{R_i}{2} \sin 2\varphi v \hat{B}_y \\ -\frac{R_i}{2} \sin \varphi (\hat{B}_y^2 + B_z^2) - R_i \sin^3 \varphi \hat{B}_y^2 \\ -\frac{\mu}{2} R_e \cos \varphi B_z + R_e \cos \varphi \sin \varphi \hat{B}_y B_z + R_e \sin \varphi w \hat{B}_y \\ \frac{\mu}{2} R_e \cos \varphi \hat{B}_y - R_e \sin \varphi v \hat{B}_y - R_e \cos \varphi \sin \varphi \hat{B}_y^2 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Заметим, что правая часть (4) антикоммутирует с изометрией

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

т.е. $AR = -RA$ и $F(\mu, R\mathbf{w}) = -RF(\mu, \mathbf{w})$. Это означает, что система (4) является обратимой, т.е. среди ее решений находятся решения с четными v и $\hat{B}_y$ и нечетными w и B_z . Такие решения будем называть также обратимыми. Собственные значения λ матрицы A удовлетворяют уравнению

$$\lambda^2 \left[\lambda^2 - R_i R_e \cos^2 \varphi \left(\operatorname{tg}^2 \varphi - \left(\sqrt{\frac{R_e}{R_i}} - \sqrt{\frac{R_i}{R_e}} \right)^2 \right) \right] = 0. \quad (6)$$

В настоящей работе уделено внимание лишь случаю $\varphi > \varphi_c$, где $\operatorname{tg}^2 \varphi_c = (\sqrt{R_e/R_i} - \sqrt{R_i/R_e})^2$. По поводу более интересного случая $\varphi < \varphi_c$ ограничимся лишь несколькими замечаниями в конце статьи. Критический угол φ_c разделяет две области (в пространстве параметров) качественно различного поведения ограниченных решений (4) малой амплитуды и так или иначе возникает при выводе модельных уравнений (см., например, [9]). При $\varphi > \varphi_c$ уравнение (6) имеет три корня, один из которых (ноль кратности два) лежит на мнимой оси. Заметим, что $|F(\mu, \mathbf{w})| \leq c(|\mu| \cdot |\mathbf{w}| + |\mathbf{w}|^2)$ для $\mathbf{w}$ достаточно близких к нулю. Пусть $\mathbf{w} = \mathbf{w}_0 + \mathbf{w}_1$, где $\mathbf{w}_0 \in E_0$, а $\mathbf{w}_1 \in E_h$ и, аналогично, для F_0 и F_1 . Система уравнений (4) имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{w}}_0 &= A_0 \mathbf{w}_0 + F_0(\mu, \mathbf{w}_0 + \mathbf{w}_1), \\ \dot{\mathbf{w}}_1 &= A_1 \mathbf{w}_1 + F_1(\mu, \mathbf{w}_0 + \mathbf{w}_1), \end{aligned} \quad (7)$$

где $A_0 = A|_{E_0}$, $A_1 = A|_{E_h}$. Кроме того, очевидно, что существуют окрестности нуля $U'_0 \subset E_0$, $U'_1 \subset E_h$ и Λ точки $\mu = 0$ такие, что

$$F = (F_0, F_1)^t \in C^k(\Lambda \times U'_0 \times U'_1, E_0 \times E_h), \quad F(0, 0), \partial_{\mathbf{w}} F(0, 0) = 0.$$

Воспользуемся далее следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 1 (о центральном многообразии [2]). *Существуют окрестности нуля $U_0 \subset U'_0 \subset E_0$, $U_1 \subset U'_1 \subset E_h$, окрестность $\Lambda_0 \subset \Lambda$ точки $\mu = 0$ и функция*

$$h = h(\mu, \mathbf{w}_0) \in C^{k-1}(\Lambda_0 \times U_0, U_1),$$

обладающая следующими свойствами:

– *множество*

$$M = \{\mathbf{w}_0, h(\mu, \mathbf{w}_0) \in E_0 \times E_h \mid \mathbf{w}_0 \in U_0\}$$

- является локальным интегральным многообразием (7)
 с $\mu \in \Lambda_0$;
 – каждое решение (7) с $\mu \in \Lambda_0$, $\mathbf{w}_0(\xi), \mathbf{w}_1(\xi) \in U_0 \times U_1$ для всех $\xi \in \mathbb{R}$ принадлежит M ;
 – $h(0, 0) = \partial_{\mathbf{w}_0} h(0, 0) = 0$;
 – если $R_0: E_0 \rightarrow E_0$ и $R_1: E_h \rightarrow E_h$ являются линейными изометриями такими, что $F_j(\mu, R_0 \mathbf{w}_0, R_1 \mathbf{w}_1) = -R_j F_j(\mu, \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1)$, $A_j R_j = -R_j A_j$, $j = 0, 1$, тогда $h(\mu, R_0 \mathbf{w}_0) = R_1 h(\mu, \mathbf{w}_1)$.

Из теоремы 1 следует редукция системы (7) для решений, остающихся в $U_0 \times U_1$ для всех $\xi \in \mathbb{R}$. Эти решения удовлетворяют уравнениям

$$\dot{\mathbf{w}}_0 = A_0 \mathbf{w}_0 + f_0(\mu, \mathbf{w}_0), \quad (8)$$

где $f_0(\mu, \mathbf{w}_0) = F_0(\mu, \mathbf{w}_0 + h(\mu, \mathbf{w}_0))$. Более того, решения (8) обратимы по отношению к матрице R_0 : $R = R_0 \oplus R_1$, $R_0: E_0 \rightarrow E_0$. В рассматриваемом случае $\varphi > \varphi_c$ размерность E_0 (а значит, и центрального многообразия) равна двум. Собственный и присоединенный векторы A , соответствующие $\lambda = 0$, имеют вид

$$\phi_0 = \begin{pmatrix} -\cos \varphi \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \phi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ R_e^{-1} - R_i^{-1} \cos^2 \varphi \\ 0 \\ (R_i^{-1} - R_e^{-1}) \cos \varphi \end{pmatrix},$$

$A_0 \phi_0 = 0$, $A_0 \phi_1 = \phi_0$, $R_0 \phi_0 = \phi_0$, $R_0 \phi_1 = -\phi_1$, а значит,

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Для $\mathbf{w}_0 \in E_0$

$$\mathbf{w}_0 = \begin{pmatrix} v \\ w \\ \tilde{B}_y \\ B_z \end{pmatrix} = a_0 \phi_0 + a_1 \phi_1.$$

Легко заметить, что $h(\mu, \mathbf{w}_0) = O(\mu|\mathbf{w}_0| + |\mathbf{w}_0|^2)$, а значит, $f_0 = F_0(\mu, \mathbf{w}_0) + o(\mu|\mathbf{w}_0| + |\mathbf{w}_0|^2)$. Таким образом, члены порядка $\mu|\mathbf{w}_0| + |\mathbf{w}_0|^2$ могут быть получены, полагая $h = 0$.

Оператор, сопряженный оператору A , дается матрицей

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & R_i \cos \varphi & 0 & -R_e \\ -R_i \cos \varphi & 0 & R_e & 0 \\ 0 & R_i \cos^2 \varphi & 0 & -R_e \cos \varphi \\ -R_i & 0 & R_e \cos \varphi & 0 \end{pmatrix},$$

а его присоединенный и собственный векторы имеют вид

$$\psi_0 = R_i^{-1} \Delta^{-1} \begin{pmatrix} (R_i^{-1} - R_e^{-1}) \cos \varphi \\ 0 \\ R_i R_e^{-1} (R_1^{-1} - R_e^{-1} \cos^2 \varphi) \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\psi_1 = R_i^{-1} \Delta^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ R_i R_e^{-1} \cos \varphi \end{pmatrix},$$

где $\Delta = R_e^{-1} R_i^{-1} \cos^2 \varphi (\operatorname{tg}^2 \varphi - \operatorname{tg}^2 \varphi_c)$. Уравнение (8) в базисе ϕ_0, ϕ_1 принимает форму

$$\dot{\mathbf{a}} = A_0 \mathbf{a} + g_0(\mu, \mathbf{a}), \quad (9)$$

где $\mathbf{a} = (a_0, a_1)^t$ и $g_0 = O(\mu|\mathbf{a}| + |\mathbf{a}|^2)$ имеет компоненты $\langle F, \psi_j \rangle$, $j = 0, 1$, F – вектор с компонентами (5), а $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает обычное скалярное произведение в $\mathbb{R}^4$. С точностью до членов второго порядка малости

$$\langle F, \psi_0 \rangle = \Delta^{-1} (\mu r_1 a_1 + r_2 a_0 a_1),$$

$$\langle F, \psi_1 \rangle = \Delta^{-1} \left(\mu a_0 - \frac{3}{2} \sin \varphi a_0^2 - \frac{1}{2} r_3 a_1^2 \right),$$

где

$$r_1 = -\frac{1}{2} \cos^2 \varphi (1 + \cos^2 \varphi) (R_e^{-1} - R_i^{-1})^2,$$

$$r_2 = R_e^{-1} R_i^{-1} \sin \varphi \cos^4 \varphi (\operatorname{tg}^4 \varphi + \operatorname{tg}^2 \varphi_c),$$

$$r_3 = (R_e^{-1} - R_i^{-1})^2 \cos^2 \varphi \sin \varphi.$$

Уравнения (9), таким образом, принимают вид

$$\dot{a}_0 = a_1 + \Delta^{-1} (\mu r_1 a_1 + r_2 a_0 a_1) + o(\mu|\mathbf{a}| + |\mathbf{a}|^2),$$

$$\dot{a}_1 = \Delta^{-1} \left(\mu a_0 - \frac{3}{2} \sin \varphi a_0^2 - \frac{1}{2} r_3 a_1^2 \right) + o(\mu|\mathbf{a}| + |\mathbf{a}|^2). \quad (10)$$

2. Квази-нормальная форма уравнения (10) (с точностью до членов порядка 2 включительно) имеет вид [2]

$$\dot{\alpha}_0 = \alpha_1, \quad \dot{\alpha}_1 = \frac{1}{\Delta} \left(\mu \alpha_0 - \frac{3}{2} \sin \varphi \alpha_0^2 \right).$$

Производя масштабные преобразования $\alpha_0 = \mu \sin^{-1} \varphi \beta_0(y)$, $\alpha_1 = \mu \nu \beta_1(y)$, $y = \nu \xi$, $\nu = |\mu|^{1/2} \Delta^{-1/2}$, получим

$$\partial_y \beta_0 = \beta_1, \quad \partial_y \beta_1 = \operatorname{sgn}(\mu) \left(\beta_0 - \frac{3}{2} \beta_0^2 \right). \quad (11)$$

Уравнения (11) для $\mu > 0$ имеют решения следующих типов:

- i) уединенные волны ($H = 0$): $\beta_0 = ch^{-2} y/2$;
- ii) периодические волны.

Для $-4/27 < h < 0$ (где $H = \operatorname{sgn} \mu \mu^2 \nu^2 \sin^{-2} \varphi h$) решениями (11) являются периодические орбиты, параметризованные периодом и фазовым сдвигом.

Для $\mu < 0$ уравнения (11) также обладают периодическими решениями (когда $0 < h < 4/27$).

3. Для потока на центральном многообразии (10) имеет место факт грубости солитоноподобных решений относительно возмущений высшего порядка по амплитуде. Доказательство соответствующего утверждения, сформулированного ниже в виде теоремы 2, дано, например, в [6], где система, аналогичная (10), возникает при рассмотрении капиллярно-гравитационных волн на поверхности идеальной жидкости конечной глубины. В настоящей работе приводится более простое доказательство теоремы 2.

ТЕОРЕМА 2 (о грубости солитоноподобных решений). *Предположим $\alpha^* = (\alpha_0^*, \alpha_1^*)$ соответствует солитоноподобному решению уравнений (11). Тогда для достаточно малых $\mu_0, \mu \in (0, \mu_0)$, существует семейство солитоноподобных решений $\mathbf{a} = (a_0, a_1)(\mu)$ полной системы (10). Справедливы оценки*

$$|\mathbf{a} - \alpha^*| \leq c_0 \mu^2 \exp(-\sigma|y|),$$

где c_0 зависит только от $\mu_0, \sigma < 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обратимость уравнений (10) по отношению к R_0 означает, что мы можем ограничиться рассмотрением лишь таких решений, у которых a_0 (или α_0) – четная функция. Запишем уравнения (10) в виде

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_0 &= \alpha_1 + r_0(\mu, \alpha_0, \alpha_1), \\ \dot{\alpha}_1 &= \Delta^{-1} \left(\mu \alpha_0 - \frac{3}{2} \sin \varphi \alpha_0^2 \right) + r_1(\mu, \alpha_0, \alpha_1), \end{aligned} \quad (12)$$

где $|r_0| \leq c|\mu|^s$ для любого s и нечетна по α_1 (в свете сказанного выше нечетна по y), а $r_1(\mu, \alpha_0, \alpha_1) = O(\mu^2)$ четна по α_1 (а значит, по y). Пользуясь изложенными свойствами, r_0 и r_1 мы можем положить $r_0 = \alpha_1 \hat{r}_0$ и заменить α_1 на $\alpha_1(1 + \hat{r}_0)$. Очевидно, это эквивалентно $r_0 = 0$ (при этом упомянутая замена дает вклад в r_1 , сохраняющий его четность). Уравнения (12), таким образом, после масштабного преобразования могут быть переписаны в виде

$$F = \ddot{\beta}_0 - \beta_0 + \frac{3}{2} \beta_0^2 + r(\mu, \beta_0, \dot{\beta}_0) = 0, \quad (13)$$

где r – по-прежнему четная функция от y . Определим далее банаховы пространства

$$C_{\sigma,j}^e = \left\{ \beta_0 \in C^j(\mathbb{R}), \sup_y \exp(\sigma|y|) |\beta_0^{(m)}| < \infty, m \leq j, \beta_0(y) = \beta_0(-y) \right\},$$

$$j = 0, 1, 2.$$

Очевидно, что $\beta_0^* = \text{ch}^{-2}(y/2)$ принадлежит $C_{1,2}^e$. Пусть $F: C_{\sigma,2}^e \rightarrow C_{\sigma,0}^e$, где $\sigma < 1$. Из теоремы о неявной функции будет следовать существование и единственность $\beta_0(\mu) \in C_{\sigma,2}^e$, для $\mu \in (0, \mu_0]$, удовлетворяющего уравнению (13), если оператор

$$L = \frac{\partial F}{\partial \beta_0}(0, \beta_0^*): C_{\sigma,2}^e \rightarrow C_{\sigma,0}^e$$

имеет ограниченный обратный. Доказательство первой части утверждения теоремы, таким образом, сводится к проверке этого факта. Легко видеть, что

$$L = \frac{d^2}{dx^2} - 1 + 3\beta_0^*$$

и обратимость L эквивалентна существованию и единственности решения уравнения

$$Lu = g \quad (14)$$

для любого $g \in C_{\sigma,0}^e$. Последнее можно усмотреть из следующих соображений.

i) Однородное уравнение $Lu = 0$ не имеет решений в $C_{\sigma,2}^e$. В самом деле, решение $u_1 = \partial_y \beta_0^*$ – нечетная функция, а линейно независимое с ним $u_2 = au_1 + bu_1 \int u_1^{-2}(y)dy$ – четная (если константы a и b выбираются из условий $u_2(0) = 1, u_2' = 0$), но возрастающая функция. Следовательно, решение (14) единственно, если существует.

ii) Искомое решение (14) дается формулой

$$u = u_2 \int_y^\infty u_1 g dy + u_1 \int_0^y u_2 g dy. \quad (15)$$

Кроме того, из (15) следует, что $\|u\|_{C_{\sigma,2}^e} \leq C\|g\|_{C_{\sigma,0}^e}$.

Первая часть утверждения теоремы 2, таким образом, доказана. Запишем далее решение β_0 уравнения (12) в виде $\beta_0 = \beta_0^* + \hat{\beta}_0$. $\hat{\beta}_0$ удовлетворяют уравнению $L\hat{\beta}_0 = G(\mu, \hat{\beta}_0)$, где $G = O(\mu, \hat{\beta}_0^2)$ – четная функция y , а, значит, $\|\hat{\beta}_0\|_{C_{\sigma,2}^e} \leq \|L^{-1}\| \cdot \|G(\mu, \hat{\beta}_0)\|_{C_{\sigma,0}^e}$, откуда немедленно следует второе утверждение теоремы.

В заключение отметим, что в случае $\varphi < \varphi_c$ система (4) обладает более многочисленным набором решений, среди которых находятся быстроосциллирующие периодические волны (рябь), периодические волны, скомбинированные из медленно- и быстроосциллирующих волн, квазипериодические волны, а также уединенные волны (гомоклинические решения) с незатухающими быстроосциллирующими хвостами. Подробный анализ

этого случая, а также альфвеновской ветви ($V_{\Phi}^{-} = \cos \varphi$) будет опубликован.

Математический институт
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило
17.05.94
Исправленный вариант
10.06.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Плисс В. А. Принцип редукции в теории устойчивости движения // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1964. Т. 28. С. 1297–1324.
- [2] Iooss G., Adelmeyer M. Topics in bifurcation theory and applications. World Scientific, 1992.
- [3] Kirchgässner K. Wave solutions of reversible systems and applications // J. Diff. Equat. 1982. V. 45. P. 113–127.
- [4] Mielke A. Reduction of quasilinear elliptic equations in cylindrical domains with applications // Math. Meth. Appl. Sci. 1988. V. 10. P. 51–66.
- [5] Mielke A. Normal hyperbolicity of center manifolds and Saint-Venant's principle // Arch. Rat. Mech. Anal. 1990. V. 110. P. 353–372.
- [6] Iooss G., Kirchgässner K. Water waves for small surface tension: an approach via normal form // Proc. Royal Soc. Edinburgh. 1992. V. 122A. P. 267–299.
- [7] Saffman P. G. On hydromagnetic waves of finite amplitude in a cold plasma // J. Fluid Mech. 1961. V. 11. P. 552–566.
- [8] Kakutani T., Ono H., Tanuiti T., Wei C.-C. Reductive perturbation method in nonlinear wave propagation. II. Application to hydromagnetic waves in cold plasma // J. Phys. Soc. Japan. 1968. V. 24. P. 1159–1166.
- [9] Kakutani T., Ono H. Weak non-linear hydromagnetic waves in a cold collision-free plasma // J. Phys. Soc. Japan. 1969. V. 26. P. 1305–1318.
- [10] Ильичев А. Т. О существовании семейства солитоноподобных решений уравнения Кавахары // Матем. заметки. 1992. Т. 52. С. 42–50.
- [11] Il'ichev A. T., Semenov A. Yu. Stability of solitary waves in dispersive media described by a fifth order evolution equation // Theoret. Comput. Fluid Dynamics. 1992. V. 3. P. 307–326.
- [12] Маслов В. П., Омелянов Г. А. Взаимодействие коротких волн в слабо дисперсионной плазме. I // Укр. матем. ж. 1987. Т. 39. С. 464–472.