Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Масол, Асимптотика числа некоторых k -мерных подпространств над конечным полем, *Матем. заметки*, 1996, том 59, выпуск 5, 729–736

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1767>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 13:31:16

АСИМПТОТИКА ЧИСЛА НЕКОТОРЫХ k -МЕРНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ НАД КОНЕЧНЫМ ПОЛЕМ

В. И. Масол

Известно, что общее число $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ различных k -мерных подпространств $V_{k,n}$ n -мерного векторного пространства V_n над конечным полем $\text{GF}(q)$, содержащем q элементов (q – степень простого числа), равно

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \prod_{i=0}^{k-1} \frac{q^{n-i} - 1}{q^{k-i} - 1},$$

где $1 \leq k \leq n$ (см., например, [1, с. 219]). Примем, что $\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = 1$, $n \geq 0$. Весом вектора $v \in V_n$ назовем число отличных от нуля компонент вектора v . Весом k -мерного подпространства $V_{k,n}$ пространства V_n назовем число, равное минимальному весу вектора $v \in V_{k,n}$, отличного от нулевого, $1 \leq k \leq n$. В дальнейшем запись $V_{(k,n|\omega)}$ будет обозначать класс всех отличающихся между собой k -мерных подпространств пространства V_n , каждое из которых имеет вес ω . Для мощности класса $V_{(k,n|\omega)}$ примем запись $\begin{bmatrix} n \\ k \mid \omega \end{bmatrix}$. Очевидно, что

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \sum_{\omega \geq 1} \begin{bmatrix} n \\ k \mid \omega \end{bmatrix}, \quad (1)$$

где $k > 0$. Нас интересует вклад слагаемого $\begin{bmatrix} n \\ k \mid 1 \end{bmatrix}$ в общую сумму в правой части равенства (1) при $n \rightarrow \infty$. Всюду далее параметр m равен $m = n - k$, причем $m \geq 0$.

ТЕОРЕМА 1. Для целых $n \geq k \geq 1$

$$\begin{bmatrix} n \\ k \mid 1 \end{bmatrix} = \sum_{\mu=1}^k (q^m - 1)^{\mu-1} \left(\begin{bmatrix} n-\mu \\ k-\mu \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-\mu \\ k-\mu+1 \mid 1 \end{bmatrix} \right), \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} n \\ k \mid 1 \end{bmatrix} = \sum_{\nu=1}^{m+1} \left(\begin{bmatrix} n-\nu \\ k-1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-\nu \\ k-1 \mid 1 \end{bmatrix} (q^{m+1-\nu} - 1) \right), \quad (3)$$

где $\left[\begin{smallmatrix} d \\ p \end{smallmatrix} \middle| 1 \right] = 0$, если либо $p = 0$, либо $p > d$.

Доказательству теоремы 1 предположим формулировку известного (см., например, [1, с. 219]) алгоритма построения $k \times n$ матрицы B , строки которой являются базисными векторами некоторого подпространства $V_{k,n} \subseteq V_n$.

АЛГОРИТМ. Выбираем k -подмножество $\{r_1, \dots, r_k\}$, $1 \leq r_1 < \dots < r_k \leq n$, множества $\{1, \dots, n\}$. В матрице B образуем единичную $k \times k$ матрицу из столбцов с номерами из $\{r_1, \dots, r_k\}$. В i -й строке матрицы B записываем нуль во все позиции $j > r_i$, $i = \overline{1, k}$. Оставшиеся места матрицы B заполняем элементами поля независимым образом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Анализ алгоритма позволяет заключить, что порождаемая им матрица B , строки которой образуют базис некоторого подпространства из класса $V_{(k,n|1)}$, может быть одного и только одного из следующих трех видов: а) n -й столбец матрицы B состоит из нулей, а оставшиеся $(n-1)$ -мерные строки являются базисными для некоторого подпространства из класса $V_{(k,n-1|1)}$; б) k -я строка матрицы B содержит, по крайней мере, два отличных от нуля элемента поля, причем один из них равен единице и расположен на n -й позиции, а остальные строки – базисные векторы некоторого подпространства из класса $V_{(k-1,n-1|1)}$; в) на позиции с номером (k, n) в матрице B находится единица, остальные элементы k -й строки равны нулю, а строки $(k-1) \times (n-1)$ подматрицы матрицы B порождают некоторое $(k-1)$ -мерное подпространство пространства V_{n-1} .

Нетрудно проверить, что число подпространств, удовлетворяющих а), равно $\left[\begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \middle| 1 \right]$, б) – $\left[\begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \middle| 1 \right](q^m - 1)$, в) – $\left[\begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right]$. Суммируя числа, найденные в а), б) и в), получаем

$$\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \middle| 1 \right] = \left[\begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \middle| 1 \right] + \left[\begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right] + \left[\begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \middle| 1 \right](q^m - 1). \quad (4)$$

Применяя (4), находим для $m \geq 1$

$$\begin{aligned} \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \middle| 1 \right] &= \left[\begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \middle| 1 \right] + \left[\begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right] + (q^m - 1) \\ &\quad \times \left(\left[\begin{smallmatrix} n-2 \\ k-1 \end{smallmatrix} \middle| 1 \right] + \left[\begin{smallmatrix} n-2 \\ k-2 \end{smallmatrix} \right] + (q^m - 1) \left[\begin{smallmatrix} n-2 \\ k-2 \end{smallmatrix} \middle| 1 \right] \right) = \dots \\ &= \sum_{\mu=1}^k \left(\left[\begin{smallmatrix} n-\mu \\ k-\mu+1 \end{smallmatrix} \middle| 1 \right] + \left[\begin{smallmatrix} n-\mu \\ k-\mu \end{smallmatrix} \right] \right) (q^m - 1)^{\mu-1}. \end{aligned} \quad (5)$$

Равенства (5) и $\left[\begin{smallmatrix} n \\ n \end{smallmatrix} \middle| 1 \right] = 1$ доказывают (2). Аналогичным образом, с помощью (4) можно проверить (3). Теорема 1 доказана.

Обозначим

$$P(n, k) = \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \middle| 1 \right] / \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right], \quad 1 \leq k \leq n.$$

ТЕОРЕМА 2. Если

$$m = o(\ln k), \quad n \rightarrow \infty, \quad (6)$$

то

$$P(n, k) \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty; \quad (7)$$

если при $n \rightarrow \infty$

$$k = xq^m(1 + o(1)), \quad (8)$$

где x — фиксированное положительное число, то

$$P(n, k) \rightarrow 1 - e^{-x}, \quad n \rightarrow \infty; \quad (9)$$

если

$$k = o(q^m), \quad n \rightarrow \infty, \quad (10)$$

то

$$P(n, k) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (11)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Теорема 2 может быть проинтерпретирована следующим образом. Если n и k незначительно отличаются между собой, например, на величину, не превосходящую $o(\ln k)$, т.е. $n - k \ll \ln k$, то асимптотически при $n \rightarrow \infty$ все k -мерные подпространства n -мерного пространства над полем $\text{GF}(q)$ обладают весом, равным 1. Если n отличается от k на величину порядка $\ln k$, то имеет место экспоненциальное поведение числа $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}^{-1}$ при $n \rightarrow \infty$. Наконец, если $n \gg k + \ln k$, то асимптотически при $n \rightarrow \infty$ все k -мерные подпространства n -мерного пространства над $\text{GF}(q)$ обладают весом, большим или равным 2.

Доказательству теоремы 2 предположим следующие леммы.

ЛЕММА 1. Пусть $0 \leq k \leq n$; тогда

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = q^{mk} \prod_{s=1}^m (q^s - q^{-k})(q^s - 1)^{-1}. \quad (12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЭТОЙ ЛЕММЫ МОЖНО НАЙТИ, НАПРИМЕР, В [1, с. 49].

ЛЕММА 2. Для целых неотрицательных k и t

$$q^k \sum_{s=1}^t (q^{k+s} - 1)^{-1} \leq (1 - q^{-t})(q - 1)^{-1}(1 - q^{-k-1})^{-1}. \quad (13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно заметить, что

$$q^k \sum_{s=1}^t (q^{k+s} - 1)^{-1} \leq (q - q^{-k})^{-1} \sum_{s=1}^t q^{-s+1}$$

и воспользоваться формулой суммы членов конечной геометрической прогрессии.

ЛЕММА 3. Для целых неотрицательных s и t

$$\left[\begin{matrix} t+s \\ s+1 \end{matrix} \middle| 1 \right] \leq (t+s)q^{ts}. \quad (14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $t = 0$, то (14) очевидно. Пусть $t \geq 1$. Обозначим через Q левую часть неравенства (14). Покажем, что для $s - t \geq 1$

$$Q < q^{ts} \left(\frac{e}{q} \right)^2 < (t+s)q^{ts}. \quad (15)$$

Поскольку $Q \leq \left[\begin{matrix} t+s \\ s+1 \end{matrix} \right]$, то используя (12), находим

$$Q \leq q^{(t-1)(s+1)} \prod_{\rho=1}^{t-1} \left(1 + \frac{1 - q^{-s-1}}{q^\rho - 1} \right).$$

Отсюда получаем в силу условия $s - t \geq 1$ и оценки $1 + z < e^z$, $z \neq 0$,

$$Q < q^{ts-2} \exp \left\{ \sum_{\rho=1}^{t-1} (q^\rho - 1)^{-1} \right\}.$$

Применяя к правой части последнего неравенства соотношение (13), имеем

$$Q < q^{ts-2} \exp \{ q(q-1)^{-2} (1 - q^{-t+1}) \},$$

и так как $q(q-1)^{-2} (1 - q^{-t+1}) < 2$, то $Q < q^{ts} (e/q)^2$. Для завершения доказательства (15) достаточно заметить, что при $t \geq 1$ и $s - t \geq 1$ $(e/q)^2 < t + s$.

Покажем, что (14) выполняется при $t \geq s$. Для $t \in \{1, 2, 3\}$ неравенство (14) легко проверить с помощью соотношения (4) и известного равенства $\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] = \left[\begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right] + q^k \left[\begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right]$ (см., например, [1, с. 49]). Для $t \geq 4$ и $s \in \{0, 1\}$ оценка (14) следует из того, что $\left[\begin{matrix} t \\ 1 \end{matrix} \middle| 1 \right] = t$ и с учетом (3)

$$\left[\begin{matrix} t+1 \\ 2 \end{matrix} \middle| 1 \right] = (q-1)^{-1} (t+1) (q^t - 2^{-1} t (q-1) - 1) \leq (t+1) q^t.$$

Пусть $t \geq 4$, $s \geq 2$ и $t \geq s$. Для доказательства (14) воспользуемся методом математической индукции по параметру $s \geq 1$. Выше была установлена оценка (14) для $s = 1$. Индукционный шаг от $s - 1$ к s можно обосновать следующим образом. В силу (3) получаем

$$Q = \sum_{\nu=1}^t \left(\left[\begin{matrix} t+s-\nu \\ s \end{matrix} \right] + (q^{t-\nu} - 1) \left[\begin{matrix} t+s-\nu \\ s \end{matrix} \middle| 1 \right] \right). \quad (16)$$

Используя соотношения (15), (16) и предположение индукции, находим

$$Q \leq \sum_{\nu=1}^t \left(\begin{bmatrix} t+s-\nu \\ s \end{bmatrix} + (t+s-\nu)q^{s(t+1-\nu)-1} \right). \quad (17)$$

Нетрудно проверить неравенство

$$\sum_{\nu=1}^t (t+s-\nu)q^{s(t+1-\nu)-1} \leq (t+s-1)q^{s(t+1)-1}(q^s-1)^{-1}. \quad (18)$$

Далее покажем, что

$$\sum_{\nu=1}^t \begin{bmatrix} t+s-\nu \\ s \end{bmatrix} < q^{ts}e^2(q^s-1)^{-1}. \quad (19)$$

Действительно, с помощью (12) и (13) получаем, что

$$\sum_{\nu=1}^t \begin{bmatrix} t+s-\nu \\ s \end{bmatrix} \leq q^{ts} \sum_{\nu=1}^t q^{-s\nu} \exp\{(1-q^{-s})q(1-q^{-t+\nu})(q-1)^{-2}\},$$

но, поскольку $(1-q^{-s})q(1-q^{-t+\nu})(q-1)^{-2} < 2$, то

$$\sum_{\nu=1}^t \begin{bmatrix} t+s-\nu \\ s \end{bmatrix} < q^{ts}e^2 \sum_{\nu=1}^t q^{-s\nu};$$

отсюда непосредственно следует (19).

Оценки (17)–(19) позволяют заключить, что

$$Q < q^{ts}((t+s)q^{s-1}(q^s-1)^{-1} - q^{-1} + (e^2 - q^{-1})(q^s-1)^{-1}). \quad (20)$$

Несложно убедиться, что правая часть соотношения (20) не превосходит $(t+s)q^{ts}$ для $t \geq 4$ и $s \geq 2$. Лемма 3 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. С помощью (2) находим для $m \geq 1$

$$P(n, k) = S_1 + S_2 + S_3, \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{\mu=1}^{k-m} \left[\begin{matrix} n-\mu \\ k-\mu+1 \end{matrix} \middle| 1 \right] (q^m-1)^{\mu-1} / \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}, \\ S_2 &= \sum_{\mu=1}^{k-m} \begin{bmatrix} n-\mu \\ k-\mu \end{bmatrix} (q^m-1)^{\mu-1} / \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}, \\ S_3 &= \sum_{\nu=0}^{m-1} \left(\begin{bmatrix} m+\nu \\ \nu \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m+\nu \\ \nu+1 \end{bmatrix} \middle| 1 \right) (q^m-1)^{k-\nu-1} / \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Используя лемму 1, получаем

$$S_1 \leq q^{-k} \sum_{\mu=1}^{k-m} (q - q^{-m+1})^{\mu-1}; \quad (22)$$

с помощью (12) устанавливаем неравенство

$$S_2 \leq 1 - (1 - q^{-m})^{k-m}; \quad (23)$$

применяя лемму 3, приходим к оценке

$$S_3 \leq \sum_{\nu=0}^{m-1} \left((m+\nu)q^{m\nu} + \left[\begin{matrix} m+\nu \\ \nu \end{matrix} \right] \right) (q^m - 1)^{k-\nu-1} / \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right],$$

откуда с учетом леммы 1 следует, что

$$S_3 \leq (1 - q^{-m})^{k-1} \sum_{\nu=0}^{m-1} (m+\nu+1)q^{m(\nu-1)}(q^m - 1)^{-\nu}. \quad (24)$$

Условие (10), равенство (21) и оценки (22)–(24) приводят к (11). Условие (8), равенство (21) и (22)–(24) дают при $n \rightarrow \infty$

$$P(n, k) \leq 1 - e^{-x}. \quad (25)$$

Покажем, что в условиях теоремы 2

$$\begin{aligned} P(n, k) &\geq 1 - (1 - q^{-m})^k - (1 - q^{-m})(q - 1)^{-1}(q^{k+1} - 1)^{-1} \\ &\quad \times q^{2-m} \sum_{\mu=1}^k (q - q^{-m+1})^{\mu-1}. \end{aligned} \quad (26)$$

Действительно, соотношения (2) и (12) дают

$$\begin{aligned} P(n, k) &\geq \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]^{-1} \sum_{\mu=1}^k \left[\begin{matrix} n-\mu \\ k-\mu \end{matrix} \right] (q^m - 1)^{\mu-1} \\ &= q^{-m} \sum_{\mu=1}^k (1 - q^{-m})^{\mu-1} \prod_{s=1}^m (1 - (q^\mu - 1)(q^{k+s} - 1)^{-1}). \end{aligned} \quad (27)$$

Соотношение (27) и неравенство

$$\prod_{i=1}^m (1 - \gamma_i) \geq 1 - \sum_{i=1}^m \gamma_i,$$

где $0 < \gamma_i < 1$, $i = \overline{1, m}$, позволяют перейти к оценке

$$P(n, k) \geq 1 - (1 - q^{-m})^k - q^{-m+1} \sum_{s=1}^m (q^{k+s} - 1)^{-1} \sum_{\mu=1}^k (q - q^{-m})^{\mu-1}. \quad (28)$$

С помощью (13) и (28) получаем

$$P(n, k) \geq 1 - (1 - q^{-m})^k - (1 - q^{-m})(q - 1)^{-1}(1 - q^{-k-1})^{-1} q^{-k-m+1} \sum_{\mu=1}^k (q - q^{-m})^{\mu-1},$$

что равносильно, очевидно, (26).

Из неравенств (26) и $1 \geq P(n, k)$ следует, что при выполнении условия (6) имеет место (7). Используя (25) и (26), убеждаемся (с учетом условия (8)) в справедливости (9). Теорема 2 доказана.

ТЕОРЕМА 3. *Условие*

$$\frac{q^m - (q - 1)t - 1}{q - 1} < k, \quad (29)$$

где $1 \leq k \leq n$, является необходимым и достаточным для того, чтобы выполнялось равенство

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] = \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \middle| 1 \right] + \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \middle| 2 \right]. \quad (30)$$

Доказательству теоремы 3 предпошлим следующие леммы.

ЛЕММА 4. Пусть строки $k \times t$ ($k \geq 1$, $t \geq 2$) матрицы B' , состоящей из элементов поля $\text{GF}(q)$, удовлетворяют условиям:

- (у₁) каждая строка матрицы B' имеет вес $\omega \geq 2$;
- (у₂) любые две строки матрицы B' являются линейно независимыми над полем $\text{GF}(q)$.

Тогда $k \leq (q^m - (q - 1)t - 1)/(q - 1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Максимальное число отличающихся между собой t -мерных строк, каждая из которых имеет вес $\omega \geq 2$, равно, очевидно, $q^m - (q - 1)t - 1$. Нетрудно видеть, что среди указанных $q^m - (q - 1)t - 1$ строк максимальное число строк, удовлетворяющих условию (у₂), равно $(q^m - (q - 1)t - 1)/(q - 1)$. Лемма 4 доказана.

ЛЕММА 5. Пусть $t \geq 2$ и

$$1 \leq k \leq \frac{q^m - (q - 1)t - 1}{q - 1}. \quad (31)$$

Тогда существует число ω , $\omega \geq 3$, такое, что $V_{(k, n|\omega)} \neq \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим $k \times n$ матрицу B , в которой столбцы с номерами $m+1, m+2, \dots, n$ образуют единичную $k \times k$ матрицу, а столбцы с номерами $1, 2, \dots, m$ образуют матрицу, которую обозначим B' . Строки матрицы B' будем заполнять таким образом, чтобы выполнялись условия (y_1) и (y_2) . В силу леммы 4 максимальное число строк, которое можно заполнить указанным образом, равно $(q^m - (q-1)m - 1)/(q-1)$. Отсюда с учетом (31) получаем, что все строки матрицы B' могут удовлетворять условиям (y_1) и (y_2) . Далее, очевидно, что построенная согласно алгоритму $k \times n$ матрица B с $k \times m$ матрицей B' , m -мерные строки которой удовлетворяют условиям (y_1) и (y_2) , состоит из n -мерных базисных векторов одного из подпространств, принадлежащего классу $V_{(k, n|\omega)}$ для некоторого $\omega \geq 3$. Лемма 5 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Для $m \in \{0, 1\}$ теорему 3 легко установить с помощью алгоритма. Для $m \geq 2$ обоснование необходимости (достаточности) условия (29) нетрудно осуществить, используя лемму 5 (лемму 4). Теорема 3 доказана.

Теоремы 2 и 3 позволяют для некоторых значений k получить оценку величины $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \middle| 2 \right]$, а именно, справедлива

ТЕОРЕМА 4. Если выполняется условие (6), то при $n \rightarrow \infty$ для $\omega \in \{2, 3, \dots, n\}$ $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \middle| \omega \right] / \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] \rightarrow 0$; если $k = y(q^m - (q-1)m)$, где y — фиксированное число, $(q-1)^{-1} \leq y < \infty$, то при $n \rightarrow \infty$

$$\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \middle| 2 \right] / \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] \rightarrow e^{-y}.$$

Киевский государственный университет
им. Т. Г. Шевченко

Поступило
09.08.93
Исправленный вариант
14.04.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Эндрюс Г. Теория разбиений. М.: Наука, 1982.