Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А.-Р. К. Рамазанов, Полиномы, ортогональные
со знакочувствительным весом, *Матем. заметки*,
1996, том 59, выпуск 5, 737–752

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1768>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 14:29:35

ПОЛИНОМЫ, ОРТОГОНАЛЬНЫЕ СО ЗНАКОЧУВСТВИТЕЛЬНЫМ ВЕСОМ

А.-Р.К. Рамазанов

Ниже построена система несимметрично ортогональных полиномов, изучены свойства коэффициентов Фурье по этой системе и некоторые общие свойства таких полиномов и, как приложение, приводится квадратурная формула Гаусса.

Рассматриваемая задача возникла под влиянием работ последних лет Е. П. Долженко и Е. А. Севастьянова, в частности, [1] и [2].

§ 1. Существование несимметрично ортонормированных систем

Следуя [1], упорядоченную пару $\rho(x) = (\rho_-(x), \rho_+(x))$, $x \in (a, b)$, неотрицательных функций $\rho_-(x)$ и $\rho_+(x)$ назовем *знакочувствительным весом* на (a, b) .

Будем считать, что функции $\rho_-(x)$ и $\rho_+(x)$ интегрируемы на конечном интервале (a, b) , а если (a, b) бесконечен, то существуют конечные интегралы $\int_a^b x^m \rho_{\pm}(x) dx$ ($m = 0, 1, \dots$), причем в обоих случаях для $m(x, \rho) = \min\{\rho_-(x), \rho_+(x)\}$, $x \in (a, b)$, выполняется неравенство

$$\int_a^b m(x, \rho) dx > 0. \quad (1)$$

Пусть $c^+ = \max\{c, 0\}$, $c^- = (-c)^+$, и для функции $f(x)$, $x \in (a, b)$, положим

$$(f, \rho)(x) = f^+(x)\rho_+(x) - f^-(x)\rho_-(x).$$

Тогда, очевидно, произведение $f(x)(f, \rho)(x) \geq 0$.

Класс всех измеримых и почти всюду определенных на (a, b) действительных функций $f(x)$, для которых величина

$$|f|_{\rho} = |f|_{2, \rho} = \left(\int_a^b f(x)(f, \rho)(x) dx \right)^{1/2}$$

конечна, обозначим $L_{2,\rho}(a, b)$.

Легко видеть, что при $\rho_+(x) \equiv \rho_-(x)$ ($x \in (a, b)$) получим класс интегрируемых с квадратом функций (относительно веса $\rho_+(x)$).

Отметим также, что в [3] рассмотрено другое обобщение класса интегрируемых с квадратом функций для знакочувствительного веса.

Приведем некоторые свойства функционала $|\cdot|_\rho$.

Очевидно, $|f|_\rho \geq 0$; $|\lambda f|_\rho = |\lambda| |f|_\rho$ для неотрицательного числа λ ; вообще говоря, $|-f|_\rho \neq |f|_\rho$.

Если $f, g \in L_{2,\rho}(a, b)$, то

$$|f + g|_\rho \leq |f|_\rho + |g|_\rho. \quad (2)$$

Действительно, используя, в частности, неравенство Коши–Буняковского, получим

$$\begin{aligned} |f + g|_\rho^2 &\leq \int_a^b \{ (f^+(x) + g^+(x))^2 \rho_+(x) + (f^-(x) + g^-(x))^2 \rho_-(x) \} dx \\ &\leq |f|_\rho^2 + |g|_\rho^2 + 2 \int_a^b (f^+(x) \sqrt{\rho_+(x)} + f^-(x) \sqrt{\rho_-(x)}) \\ &\quad \times (g^+(x) \sqrt{\rho_+(x)} + g^-(x) \sqrt{\rho_-(x)}) dx \leq (|f|_\rho + |g|_\rho)^2. \end{aligned}$$

Введем понятие (несимметричного) скалярного произведения. Для $f, -f, g \in L_{2,\rho}(a, b)$ скалярным произведением функции $f(x)$ на функцию $g(x)$ относительно знакочувствительного веса $\rho(x)$ назовем величину

$$(f, g)_\rho = \int_a^b f(x) g(x) \rho(x) dx.$$

Легко показать, что, вообще говоря, из $f, g \in L_{2,\rho}(a, b)$ не вытекает конечность последнего интеграла.

Однако, этот интеграл существует всегда, когда $f, -f, g \in L_{2,\rho}(a, b)$.

Действительно, имеет место следующий аналог неравенства Коши–Буняковского в $L_{2,\rho}(a, b)$ в этом случае:

$$|(f, g)_\rho| \leq \max\{|f|_\rho, |-f|_\rho\} |g|_\rho. \quad (3)$$

Для доказательства (3) заметим, что

$$\begin{aligned} |(f, g)_\rho| &\leq \max \left\{ \int_a^b [f^+(x) g^+(x) \rho_+(x) + f^-(x) g^-(x) \rho_-(x)] dx, \right. \\ &\quad \left. \int_a^b [f^-(x) g^+(x) \rho_+(x) + f^+(x) g^-(x) \rho_-(x)] dx \right\}. \end{aligned}$$

Остается оценить каждый из последних интегралов, применив, как и при доказательстве неравенства (2), классическое неравенство Коши–Буняковского для интегралов.

Ясно, что $|f|_\rho = \sqrt{(f, f)_\rho}$, а при $\rho_+(x) \equiv \rho_-(x)$, $x \in (a, b)$, величина $(f, g)_\rho$ представляет собой обычное скалярное произведение в пространстве функций с интегрируемым квадратом (относительно веса $\rho_+(x)$).

Если скалярное произведение $(f, g)_\rho = 0$, то функцию $f \in L_{2,\rho}(a, b)$ назовем ортогональной со знакочувствительным весом $\rho(x)$ (или несимметрично ортогональной с весом $\rho(x)$) к функции $g \in L_{2,\rho}(a, b)$.

В соответствии с этим определением систему функций $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots$ из $L_{2,\rho}(a, b)$ назовем несимметрично ортонормированной или ортонормированной со знакочувствительным весом $\rho(x)$, если при всех $n, m = 0, 1, \dots$ скалярное произведение $(\varphi_n, \varphi_m)_\rho$ равно нулю при $n > m$ и равно единице при $n = m$.

ТЕОРЕМА 1. *Если для знакочувствительного веса $\rho(x) = (\rho_-(x), \rho_+(x))$ выполняется условие (1), то существует единственная последовательность алгебраических полиномов*

$$P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x), \dots, \quad (4)$$

в которой каждый полином $P_n(x)$ имеет степень n и положительный старший коэффициент a_n и которая является несимметрично ортонормированной системой с весом $\rho(x)$ на интервале (a, b) .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как по (1) выполняется

$$\int_a^b \rho_+(x) dx \geq \int_a^b m(x, \rho) dx > 0,$$

то существует положительная константа a_0 такая, что

$$1 = \int_a^b a_0^2 \rho_+(x) dx = \int_a^b a_0 [a_0^+ \rho_+(x) - a_0^- \rho_-(x)] dx.$$

Положим $P_0(x) \equiv a_0$. Тогда легко подобрать $P_1(x) = a_1 x + b_0^{(1)} P_0(x)$ с $a_1 > 0$ из условий $(P_1, P_0)_\rho = 0$, $(P_1, P_1)_\rho = 1$.

Допустив, что $P_0(x), P_1(x), \dots, P_{n-1}(x)$ уже построены, применим лемму 1.1 из [4] и подберем $P_n(x)$ в виде

$$P_n(x) = a_n x^n + \sum_{k=0}^{n-1} b_k^{(n)} P_k(x),$$

используя условия: $a_n > 0$;

$$(P_n, P_m)_\rho = 0, \quad m = 0, 1, \dots, n-1; \quad (P_n, P_n)_\rho = 1.$$

Из первого соотношения получим

$$b_m^{(n)} = -a_n c_m^{(n)}; \quad c_m^{(n)} = (x^n, P_m)_\rho - \sum_{k=0}^{m-1} c_k^{(n)} (P_k, P_m)_\rho, \\ m = 1, 2, \dots, n-1; \quad c_0^{(n)} = (x^n, P_0)_\rho.$$

Остается найти a_n , для чего воспользуемся условием $(P_n, P_n)_\rho = 1$. Легко показать, что при

$$Q(x) = x^n - \sum_{k=0}^{n-1} c_k^{(n)} P_k(x)$$

имеем

$$(P_n, P_n)_\rho = a_n^2 \int_a^b \{[Q^+(x)]^2 \rho_+(x) + [Q^-(x)]^2 \rho_-(x)\} dx \\ \geq a_n^2 \int_a^b \{[Q^+(x)]^2 + [Q^-(x)]^2\} m(x, \rho) dx \\ = a_n^2 \int_a^b Q^2(x) m(x, \rho) dx > 0,$$

где последнее неравенство выполняется по лемме 1.2 из [4] (ввиду условия (1)).

Следовательно, $a_n > 0$ также однозначно определяется.

§ 2. Коэффициенты Фурье

Чтобы определить ряд Фурье функции $f \in L_{2,\rho}(a, b)$ по несимметрично ортогональным полиномам (4), потребуем $-f \in L_{2,\rho}(a, b)$. Тогда можно определить коэффициенты Фурье функции $f(x)$ по системе (4) по следующим формулам:

$$a_0 = a_0(f) = (f, P_0)_\rho, \\ a_n = a_n(f) = (f, P_n)_\rho - \sum_{k=0}^{n-1} a_k(f) (P_k, P_n)_\rho, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5)$$

Заметим, что $-f \in L_{2,\rho}(a, b)$ является, вообще говоря, необходимым условием существования коэффициентов Фурье (5) для произвольно взятой функции $f \in L_{2,\rho}(a, b)$.

Действительно, пусть $f(x) = -1/\sqrt{x}$, $\rho_+(x) = 1/\sqrt{x}$, $\rho_-(x) = x$, $x \in (0, 1)$. Тогда, очевидно, $f \in L_{2,\rho}(0, 1)$, но коэффициент $a_0(f)$ неопределен.

Рассмотрим ряд Фурье по полиномам (4) и его частные суммы:

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n(f) P_n(x), \quad (6)$$

$$S_n(x) = S_n(x, f) = \sum_{k=0}^n a_k(f) P_k(x), \quad n = 0, 1, \dots \quad (7)$$

Тогда из (5) для $n = 1, 2, \dots$ следует, что

$$a_n(f) = (f - S_{n-1}, P_n)_\rho.$$

Отметим некоторые свойства коэффициентов Фурье (5).

Если $c_0, c_1, \dots, c_n$ — коэффициенты разложения произвольного алгебраического полинома $P(x)$ степени n ($n = 0, 1, \dots$) по полиномам системы (4) (c_k — коэффициенты при $P_k(x)$), то легко подсчитать, что $c_k = a_k(P)$, $k = 0, 1, \dots, n$.

Более того, если частные суммы $R_n(x)$ ряда вида $\sum_{k=0}^{\infty} c_k P_k(x)$ сходятся к некоторой функции $f \in L_{2,\rho}(a, b)$ по “норме” $|\cdot|_\rho$, как при $\rho(x) = (\rho_-(x), \rho_+(x))$, так и при $\rho(x) = (\rho_+(x), \rho_-(x))$, то необходимо $c_k = a_k(f)$ для каждого $k = 0, 1, \dots$.

Действительно, равенство $c_0 = a_0(f)$ получается, если применить (3) к правой части равенства

$$|a_0(f) - c_0| = \left| \int_a^b [f(x) - R_n(x)](P_0, \rho)(x) dx \right|.$$

Пусть уже показано $c_m = a_m(f)$ при $m = 0, 1, \dots, k-1$ и пусть $n > k$. Тогда, как и выше, требуемое получается из равенств

$$\begin{aligned} & \int_a^b [f(x) - R_n(x)](P_k, \rho)(x) dx \\ &= (f, P_k)_\rho - \sum_{m=0}^{k-1} c_m (P_m, P_k)_\rho - c_k = a_k(f) - c_k. \end{aligned}$$

Аналогичное утверждение имеет место и в случае равномерно сходящихся рядов по системе (4).

Отметим также следующее легко проверяемое свойство.

Пусть $f, -f \in L_{2,\rho}(a, b)$. Для того чтобы $a_0, a_1, \dots, a_n$ были коэффициентами Фурье функции $f(x)$ по системе (4), необходимо и достаточно выполнение при $m = 0, 1, \dots, n$ равенства

$$\int_a^b \left[f(x) - \sum_{k=0}^n a_k P_k(x) \right] (P_m, \rho)(x) dx = 0. \quad (8)$$

Для получения аналогов тождества Бесселя и равенства Парсеваля наряду с коэффициентами Фурье $a_n = a_n(f)$, определяемыми по формулам (5), рассмотрим также следующие:

$$b_n = b_n(f) = \int_a^b (f, \rho)(x) P_n(x) dx, \quad n = 0, 1, \dots. \quad (5')$$

Тогда легко проверить, что для любого набора чисел $c_0, c_1, \dots, c_n$ выполняется равенство

$$\begin{aligned} \int_a^b [f(x) - S_n(x)] \left[(f, \rho)(x) - \sum_{k=0}^n c_k (P_k, \rho)(x) \right] dx \\ = \int_a^b f(x) (f, \rho)(x) dx - \sum_{k=0}^n a_k b_k \end{aligned}$$

или, учитывая свойство (8) коэффициентов $a_k = a_k(f)$, имеем

$$\int_a^b [f(x) - S_n(x)] (f, \rho)(x) dx = \int_a^b f(x) (f, \rho)(x) dx - \sum_{k=0}^n a_k b_k. \quad (9)$$

Следовательно, стремление для данных функции $f(x)$ и веса $\rho(x)$ интеграла в левой части (9) к нулю (при $n \rightarrow \infty$) необходимо и достаточно для выполнения следующего аналога равенства Парсеваля:

$$\int_a^b f(x) (f, \rho)(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n.$$

Заметим, что для $f, -f, g \in L_{2,\rho}(a, b)$ вполне аналогично (9) имеем также равенство

$$\begin{aligned} \int_a^b [f(x) - S_n(x, f)] (g, \rho)(x) dx \\ = \int_a^b f(x) (g, \rho)(x) dx - \sum_{k=0}^n a_k(f) b_k(g). \quad (9') \end{aligned}$$

Желая получить аналог теоремы Ф. Рисса–Э. Фишера, рассмотрим линейное пространство $L_{2,\rho}^*(a, b)$ всех измеримых функций $f(x)$, $x \in (a, b)$, для которых существует конечный интеграл

$$\int_a^b f(x)(g, \rho)(x) dx, \quad g \in L_{2,\rho}(a, b);$$

при этом функции $f(x)$, для которых указанный интеграл равен нулю при всех $g \in L_{2,\rho}(a, b)$, считаем нулевым элементом $L_{2,\rho}^*(a, b)$.

Для $f \in L_{2,\rho}^*(a, b)$ введем норму, полагая

$$\|f\|_\rho = \sup \left| \int_a^b f(x)(g, \rho)(x) dx \right|,$$

где супремум берется по всем $g \in L_{2,\rho}(a, b)$ таким, что $|g|_\rho \leq 1$.

Покажем, что $\|f\|_\rho < \infty$ для любой $f \in L_{2,\rho}^*(a, b)$.

Допустим, что $\|f\|_\rho = \infty$ для некоторой такой функции. Тогда, очевидно, выполняется хотя бы одно из равенств

$$\sup \int_a^b |f(x)|g^\pm(x)\rho_\pm(x) dx = \infty,$$

где супремум берется по всем $g \in L_{2,\rho}(a, b)$ с $|g|_\rho \leq 1$.

Пусть, например, выполняется равенство со знаком '+'. Тогда существует последовательность $g_k \in L_{2,\rho}(a, b)$ с $|g_k|_\rho \leq 1$ такая, что

$$\int_a^b |f(x)|g_k^+(x)\rho_+(x) dx \geq 2^k, \quad k = 1, 2, \dots$$

Рассмотрим неотрицательные функции

$$G_n(x) = \sum_{k=1}^n 2^{-k} g_k^+(x), \quad n = 1, 2, \dots$$

Тогда, очевидно,

$$|G_n|_\rho = \int_a^b G_n^2(x)\rho_+(x) dx < 1.$$

К возрастающей последовательности функций $G_n^2(x)\rho_+(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) и функции $g^2(x)\rho_+(x)$, где $g(x) = \sum_{k=1}^\infty 2^{-k} g_k^+(x)$, применим теорему Б. Леви о предельном переходе в интегралах, что дает $|g|_\rho \leq 1$.

С другой стороны, при $n = 1, 2, \dots$ имеем

$$\int_a^b |f(x)|G_n^+(x)\rho_+(x) dx \geq n,$$

и снова по теореме Б. Леви $\int_a^b |f(x)|g(x)\rho_+(x) dx = \infty$, что противоречит $f \in L_{2,\rho}^*(a, b)$.

Следующая лемма устанавливает связь между $|f|_\rho$, $\|f\|_\rho$ и величиной

$$\|f\|_\rho = \sup \int_a^b |f(x)(g, \rho)(x)| dx,$$

где супремум берется по всем $g \in L_{2,\rho}(a, b)$ с $|g|_\rho \leq 1$.

ЛЕММА. Если $\pm f \in L_{2,\rho}(a, b)$, то $f \in L_{2,\rho}^*(a, b)$ и выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \|f\|_\rho &= \max\{|f|_\rho, |-f|_\rho\}, \\ \|f\|_\rho &\leq \|f\|_\rho \leq |f|_\rho + |-f|_\rho \leq 2\|f\|_\rho. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первая часть леммы и неравенство

$$\|f\|_\rho \leq \max\{|f|_\rho, |-f|_\rho\}$$

непосредственно следуют из (3). Пусть теперь $|f|_\rho \neq 0$. Тогда $|f|/|f|_\rho = 1$. Поэтому

$$\|f\|_\rho \geq \int_a^b f(x) \left(\frac{f}{|f|_\rho}, \rho \right) (x) dx = |f|_\rho.$$

Аналогично, $|-f|_\rho \leq \|-f\|_\rho = \|f\|_\rho$.

Случаи $|f|_\rho = 0$ и $|-f|_\rho = 0$ очевидны, а поэтому требуемое в лемме равенство доказано.

Во втором соотношении крайние неравенства очевидны, докажем средние. Для $\pm f, g \in L_{2,\rho}(a, b)$ имеем

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x)(g, \rho)(x)| dx &\leq \int_a^b |f^+(x)g^+(x)\rho_+(x) + f^-(x)g^-(x)\rho_-(x)| dx \\ &\quad + \int_a^b |f^+(x)g^-(x)\rho_-(x) + f^-(x)g^+(x)\rho_+(x)| dx \\ &\leq \int_a^b (f^+(x)\sqrt{\rho_+(x)} + f^-(x)\sqrt{\rho_-(x)}) \\ &\quad \times (g^+(x)\sqrt{\rho_+(x)} + g^-(x)\sqrt{\rho_-(x)}) dx \\ &\quad + \int_a^b (f^-(x)\sqrt{\rho_+(x)} + f^+(x)\sqrt{\rho_-(x)}) \\ &\quad \times (g^+(x)\sqrt{\rho_+(x)} + g^-(x)\sqrt{\rho_-(x)}) dx. \end{aligned}$$

Остается воспользоваться классическим неравенством Коши–Буняковского для интегралов и перейти к супремумам при $|g|_\rho \leq 1$.

Пусть, как и выше, $a_k(f)$ и $b_k(g)$ ($k = 0, 1, \dots$) определяются для $f \in L_{2,\rho}^*(a, b)$ и $g \in L_{2,\rho}(a, b)$ по равенствам (5) и (5'). Так как для полиномов из системы (4) выполняется равенство $|P_k|_\rho = 1$ при $k = 0, 1, \dots$, то коэффициенты Фурье $a_k(f)$ ($k = 0, 1, \dots$) определены для любой функции $f \in L_{2,\rho}^*(a, b)$.

Ниже вес $\rho(x) = (\rho_-(x), \rho_+(x))$, $x \in (a, b)$, назовем стандартным, если для любой $f \in L_{2,\rho}^*(a, b)$ имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \sum_{k=n}^{\infty} a_k(f) b_k(g) = 0, \quad (10)$$

где супремум берется по всем $g \in L_{2,\rho}(a, b)$ с $|g|_\rho \leq 1$.

Заметим, что при $\rho_+(x) \equiv \rho_-(x)$, $x \in (a, b)$, вес $\rho(x)$ является стандартным. В этом случае система (4) представляет собой ортонормированную систему полиномов с весом $\rho_+(x)$, $x \in (a, b)$, причем для $k = 0, 1, \dots$ имеем

$$a_k := a_k(f) = \int_a^b f(x) P_k(x) \rho_+(x) dx, \quad b_k := b_k(g) = a_k(g).$$

Поэтому, применив неравенство Коши–Буняковского для рядов, имеем

$$\left| \sum_{k=n}^{\infty} a_k b_k \right| \leq \left(\sum_{k=n}^{\infty} a_k^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=n}^{\infty} b_k^2 \right)^{1/2}.$$

Остается воспользоваться имеющими место в этом случае сходимостью ряда $a_0^2 + a_1^2 + \dots$ и неравенством Бесселя:

$$\sum_{k=n}^{\infty} b_k^2 \leq \left(\int_a^b g^2(x) \rho_+(x) dx \right)^{1/2} = |g|_\rho \leq 1.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $P_0(x), P_1(x), \dots$ – несимметрично ортонормированная система со знакочувствительным весом $\rho(x) = (\rho_-(x), \rho_+(x))$, $x \in (a, b)$. Если для числовой последовательности $c_0, c_1, \dots$ выполняется соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \left| \sum_{k=n}^{\infty} c_k b_k(g) \right| = 0, \quad (11)$$

где супремум берется по всем $g \in L_{2,\rho}(a, b)$ с $|g|_\rho \leq 1$, то существует функция $f \in L_{2,\rho}^*(a, b)$ такая, что $a_k(f) = c_k$ ($k = 0, 1, \dots$), причем

$$\int_a^b f(x)(g, \rho)(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(f) b_k(g)$$

для любой $g \in L_{2,\rho}(a, b)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $S_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k P_k(x)$, $n = 0, 1, \dots$. Тогда для натуральных $n \geq m$ и любой $g \in L_{2,\rho}(a, b)$ с $|g|_\rho \leq 1$ имеем

$$\int_a^b (S_n(x) - S_m(x))(g, \rho)(x) dx = \sum_{k=m+1}^n c_k b_k(g).$$

Отсюда и из условия теоремы легко следует, что $\|S_n - S_m\|_\rho \rightarrow 0$ при $n, m \rightarrow \infty$, и по лемме $\|S_n - S_m\|_\rho \rightarrow 0$ при $n, m \rightarrow \infty$.

Следовательно, для любой $g \in L_{2,\rho}(a, b)$ с $|g|_\rho \leq 1$ получим

$$\int_a^b |(S_n(x) - S_m(x))(g, \rho)(x)| dx \rightarrow 0 \quad (n, m \rightarrow \infty).$$

Теперь по аналогии с доказательством полноты пространства суммируемых функций (см., например, [6]) показываем, что существует $f \in L_{2,\rho}^*(a, b)$, для которой $\|S_n - f\|_\rho \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, а следовательно, по лемме $\|S_n - f\|_\rho \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Остается показать равенства $a_k(f) = c_k$, $k = 0, 1, \dots$, что непосредственно следует из неравенства

$$|a_k(f) - c_k| \leq \|f - S_n\|_\rho \quad (n > k),$$

которое легко получить по индукции, используя формулы (5) и равенства $|P_k|_\rho = 1$, $k = 0, 1, \dots$.

Итак, доказано, что $S_n(x) = S_n(x, f)$, $n = 0, 1, \dots$. Тогда, взяв для любой $g \in L_{2,\rho}(a, b)$ с $|g|_\rho > 0$ (случай $|g|_\rho = 0$ очевиден) функцию $G(x) = g(x)/|g|_\rho$, легко показать, что

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)(G, \rho)(x) dx - \sum_{k=0}^n a_k(f) b_k(G) \\ = \int_a^b [f(x) - S_n(x, f)](G, \rho)(x) dx, \quad n = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Остается перейти к модулям обеих частей этого равенства, затем в правой части взять супремум по всем $G \in L_{2,\rho}(a, b)$ с $|G|_\rho \leq 1$ и учесть $\|f - S_n\|_\rho \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$).

Наконец, в левой части заменив $G(x)$ на $g(x)/|g|_\rho$, получим требуемое в теореме равенство.

Теорема 2 доказана.

Заметим, что существует только одна функция в $L_{2,\rho}^*(a, b)$, удовлетворяющая обоим условиям теоремы 2.

Действительно, для двух таких функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имели бы $a_k(f_1) = a_k(f_2)$ ($k = 0, 1, \dots$), а поэтому из аналога равенства Парсеваля для любой $g \in L_{2,\rho}(a, b)$ получили бы

$$\int_a^b [f_1(x) - f_2(x)](g, \rho)(x) dx = 0.$$

§ 3. О полноте и замкнутости системы

Пусть $P_0(x), P_1(x), \dots$ является несимметрично ортонормированной системой с весом $\rho(x) = (\rho_-(x), \rho_+(x)), x \in (a, b)$.

Эту систему назовем замкнутой относительно $L_{2,\rho}^*(a, b)$, если для любых $f \in L_{2,\rho}^*(a, b)$ и $g \in L_{2,\rho}(a, b)$ выполняется равенство

$$\int_a^b f(x)(g, \rho)(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(f) b_k(g),$$

где $a_k(f)$ и $b_k(g)$ определяются по формулам (5) и (5').

Систему $P_0(x), P_1(x), \dots$ назовем полной относительно $L_{2,\rho}^*(a, b)$, если его нулевым элементом является любая $\varphi \in L_{2,\rho}^*(a, b)$, для которой имеет место хотя бы одно из следующих двух условий:

- i) $\int_a^b \varphi(x)(P_k, \rho)(x) dx = 0$ при всех $k = 0, 1, \dots$;
- ii) $\pm \varphi \in L_{2,\rho}(a, b)$ и при некотором целом неотрицательном n предыдущее равенство выполняется для $k = 0, 1, \dots, n-1$, а для $k = n, n+1, \dots$ выполняются равенства

$$\int_a^b P_k(x)(\pm \varphi, \rho)(x) dx = 0.$$

Отметим некоторые свойства полных и замкнутых относительно $L_{2,\rho}^*(a, b)$ систем.

I. Чтобы для любой функции $f \in L_{2,\rho}^*(a, b)$ ряд Фурье сходиллся к ней по норме $L_{2,\rho}^*(a, b)$, необходимо и достаточно выполнение одновременно двух условий:

- а) вес $\rho(x)$ является стандартным;
- б) система $P_0(x), P_1(x), \dots$ является замкнутой.

Это свойство легко следует из аналога тождества Бесселя (9').

II. Если система $P_0(x), P_1(x), \dots$ замкнутая, то она является полной.

Действительно, если для $\varphi \in L_{2,\rho}^*(a, b)$ выполнено условие i) из определения полной системы, то по индукции можно показать, что все коэффициенты Фурье $a_k(\varphi) = 0, k = 0, 1, \dots$. Остается для $\varphi(x)$ и произвольной $g \in L_{2,\rho}(a, b)$ воспользоваться определением замкнутой системы.

Если же выполнено условие ii), то при некотором целом неотрицательном n имеем $a_k(\varphi) = 0$ для $k = 0, 1, \dots, n-1$ и $b_k(\varphi) = 0$ для $k = n, n+1, \dots$.

Отсюда, из определения замкнутой системы и $\varphi \in L_{2,\rho}(a, b)$ получим

$$|\varphi|_{\rho}^2 = \int_a^b \varphi(x)(\varphi, \rho)(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(\varphi) b_k(\varphi) = 0.$$

Аналогично, $|\varphi|_\rho = 0$.

По лемме из § 2 $\|\varphi\|_\rho = 0$, откуда легко следует, что $\varphi(x)$ нулевой элемент $L_{2,\rho}^*(a, b)$.

III. Если система $P_0(x), P_1(x), \dots$ со стандартным весом $\rho(x)$ полная, то она является замкнутой.

Допустим, что (ср. [6, с. 170]) существуют $f \in L_{2,\rho}^*(a, b)$ и $G \in L_{2,\rho}(a, b)$, для которых

$$\int_a^b f(x)(G, \rho)(x) dx \neq \sum_{k=0}^{\infty} a_k(f)b_k(G).$$

Так как вес стандартный, то коэффициенты $a_k(f)$, $k = 0, 1, \dots$, удовлетворяют условию теоремы 2, по которой существует такая функция $F \in L_{2,\rho}^*(a, b)$, что $a_k(F) = a_k(f)$ ($k = 0, 1, \dots$) и, в частности,

$$\int_a^b F(x)(G, \rho)(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(f)b_k(G).$$

Из $a_k(F - f) = 0$ ($k = 0, 1, \dots$), применив индукцию, для $k = 0, 1, \dots$ получим

$$\int_a^b (F(x) - f(x))(P_k, \rho)(x) dx = 0,$$

и в силу полноты системы для любой $g \in L_{2,\rho}(a, b)$ имеем

$$\int_a^b (F(x) - f(x))(g, \rho)(x) dx = 0,$$

что, очевидно, невозможно при $g(x) = G(x)$.

IV. Если система $P_0(x), P_1(x), \dots$ со стандартным весом $\rho(x)$ полная, то для любой функции $f \in L_{2,\rho}^*(a, b)$ ее коэффициенты Фурье $a_k(f) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

Действительно, из формул (5) для $n = 1, 2, \dots$ следует, что $a_n(f) = (f - S_{n-1}, P_n)_\rho$, где $S_{n-1}(x) = S_{n-1}(x, f)$. Отсюда, так как $|P_n|_\rho = 1$, имеем $|a_n(f)| \leq \|f - S_{n-1}\|_\rho$. Остается воспользоваться свойствами III и I.

§ 4. О сопряженной несимметрично ортонормированной системе полиномов

Систему функций $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots$ из $L_{2,\rho}(a, b)$ назовем сопряженной несимметрично ортонормированной системой со знакочувствительным весом $\rho(x) = (\rho_-(x), \rho_+(x))$, $x \in (a, b)$, если $(\varphi_n, \varphi_m)_\rho = 0$ при $n < m$ и $(\varphi_n, \varphi_n)_\rho = 1$ ($n, m = 0, 1, \dots$).

ТЕОРЕМА 1'. Если для $\rho(x) = (\rho_-(x), \rho_+(x))$, $x \in (a, b)$, выполняется условие (1), то существует единственная последовательность алгебраических полиномов

$$Q_0(x), Q_1(x), \dots, Q_n(x), \dots \quad (12)$$

с положительными старшими коэффициентами, $\deg Q_n = n$ ($n = 0, 1, \dots$), которая образует сопряженную несимметрично ортонормированную систему с весом $\rho(x)$ на (a, b) .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству теоремы 1, причем $Q_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) следует выбрать в виде

$$Q_n(x) = a_n(x^n - b_0 Q_0(x) - b_1 Q_1(x) - \dots - b_{n-1} Q_{n-1}(x)),$$

используя условия: $a_n > 0$;

$$(Q_k, Q_n)_\rho = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1; \quad (Q_n, Q_n)_\rho = 1.$$

Пусть

$$\begin{aligned} E_1 &= \{x \in (a, b) \mid Q_n(x) \geq 0\}, \quad E_2 = (a, b) \setminus E_1; \\ a_{km} &= \int_{E_1} Q_k(x) Q_m(x) \rho_+(x) dx + \int_{E_2} Q_k(x) Q_m(x) \rho_-(x) dx, \\ k, m &= 0, 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Для определения $b_0, b_1, \dots, b_{n-1}$ получится система линейных алгебраических уравнений, у которой при выполнении условия (1) главный определитель (аналог определителя Грама)

$$\det[a_{km}]_{k,m=0}^{n-1} \neq 0.$$

Действительно, в противном случае легко показать, что существует нетривиальный набор чисел $b_0, b_1, \dots, b_{n-1}$, для которого

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{m=0}^{n-1} a_{km} b_k b_m = 0,$$

чего не может быть, так как при выполнении условия (1) левая часть последнего равенства больше нуля, ибо ее можно представить в виде

$$\begin{aligned} &\int_{E_1} (b_0 Q_0(x) + b_1 Q_1(x) + \dots + b_{n-1} Q_{n-1}(x))^2 \rho_+(x) dx \\ &+ \int_{E_2} (b_0 Q_0(x) + b_1 Q_1(x) + \dots + b_{n-1} Q_{n-1}(x))^2 \rho_-(x) dx. \end{aligned}$$

Отметим, что по аналогии с рядом Фурье по системе (4) можно определить ряд Фурье по системе (12) для любой $f \in L_{2,\rho}(a, b)$ следующим образом

$$(f, \rho)(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n(Q_n, \rho)(x),$$

где

$$c_0 = c_0(f) = \int_a^b (f, \rho)(x) Q_0(x) dx,$$

$$c_n = c_n(f) = \int_a^b (f, \rho)(x) Q_n(x) dx - \sum_{k=0}^{n-1} c_k \int_a^b (Q_k, \rho)(x) Q_n(x) dx,$$

$n = 1, 2, \dots$.

Систему (12) ниже будем называть сопряженной (с системой (4)) несимметрично ортонормированной системой полиномов.

Переходя к аналогам свойств нулей ортогональных полиномов, заметим, что каждый полином $P_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) из системы (4) имеет хотя бы один нуль на (a, b) . Это следует из равенства

$$\int_a^b P_n(x)(P_0, \rho)(x) dx = 0 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Для сопряженной системы (12) имеет место утверждение, вполне аналогичное свойству нулей ортогональных полиномов.

ТЕОРЕМА 3. Если вес $\rho(x) = (\rho_-(x), \rho_+(x))$ удовлетворяет условию (1), то каждый полином $Q_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) из сопряженной несимметрично ортонормированной системы (12) имеет n различных нулей на интервале (a, b) .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала покажем, что каждый полином $Q_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) имеет хотя бы один нуль на (a, b) .

Действительно, пусть, например, $Q_n(x) > 0$, $x \in (a, b)$. Тогда из (1) имеем

$$\int_a^b (Q_n, \rho)(x) dx \geq \int_a^b Q_n(x) m(x, \rho) dx > 0,$$

что противоречит равенству $(Q_0, Q_n)_\rho = 0$.

Пусть $Q_n(x)$ имеет k нулей $x_1, x_2, \dots, x_k$ на (a, b) , и допустим, что $k < n$. Тогда, представив полином $Q(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_k)$ в виде $Q(x) = c_0 Q_0(x) + c_1 Q_1(x) + \cdots + c_k Q_k(x)$, по свойству полиномов $Q_k(x)$ получим

$$J_1 = \int_a^b Q(x)(Q_n, \rho)(x) dx = 0.$$

С другой стороны, этот же интеграл равен

$$J_1 = \int_a^b Q(x)Q_n(x)\rho(x, Q_n) dx,$$

где $\rho(x, Q_n) = \rho_+(x) \operatorname{sign} Q_n^+(x) + \rho_-(x) \operatorname{sign} Q_n^-(x)$, а произведение $Q(x)Q_n(x)$ сохраняет свой знак на (a, b) , причем, используя свойство (1) веса $\rho(x)$, имеем: если $Q(x)Q_n(x) \geq 0$, то

$$J_1 \geq \int_a^b Q(x)Q_n(x)m(x, \rho) dx > 0;$$

если же $Q(x)Q_n(x) \leq 0$, то $J_1 < 0$.

Следовательно, $k = n$.

Если допустить, что $Q_n(x)$ имеет кратный нуль x_0 , то, рассмотрев полином $R(x) = Q_n(x)(x - x_0)^{-2}$ степени $n - 2$, получим

$$J_2 = \int_a^b R(x)(Q_n, \rho)(x) dx = 0.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} J_2 &= \int_a^b Q_n^2(x)(x - x_0)^{-2}\rho(x, Q_n) dx \\ &\geq \int_a^b Q_n^2(x)(x - x_0)^{-2}m(x, \rho) dx > 0. \end{aligned}$$

Как приложение теоремы 3 получим аналог классической квадратурной формулы Гаусса.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $Q_0(x), Q_1(x), \dots$ — сопряженная несимметрично ортонормированная система полиномов с весом $\rho(x) = (\rho_-(x), \rho_+(x))$ на интервале (a, b) и пусть $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ — нули полинома $Q_n(x)$ для данного $n = 1, 2, \dots$. Тогда существуют неотрицательные числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ такие, что для любого полинома $Q(x)$ степени не выше $2n - 1$ имеет место равенство

$$\int_a^b Q(x)\rho(x, Q_n) dx = \sum_{k=1}^n \lambda_k Q(x_k), \quad (13)$$

где $\rho(x, Q_n) = \rho_+(x) \operatorname{sign} Q_n^+(x) + \rho_-(x) \operatorname{sign} Q_n^-(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству теоремы 3.4.1 из [5]. Укажем лишь значения коэффициентов:

$$\lambda_k = \int_a^b \frac{(Q_n, \rho)(x)}{Q'_n(x_k)(x - x_k)} dx.$$

Из (13) при $k = 1, 2, \dots, n$ непосредственно следует, что

$$\lambda_k = \int_a^b \left[\frac{Q_n(x)}{Q'_n(x_k)(x - x_k)} \right]^2 \rho(x, Q_n) dx,$$

а следовательно, $\lambda_k \geq 0$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Далее, если числа x_k и λ_k ($k = 1, 2, \dots, n$) те же, что и в теореме 4, то для любой, например, непрерывной на $[a, b]$ функции $f(x)$ имеем

$$\int_a^b f(x) \rho(x, Q_n) dx = \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k) + R(f),$$

причем остаточный член $R(f)$ можно найти, используя стандартные рассуждения, если $f(x)$ является $2n$ раз дифференцируемой на $[a, b]$; в этом случае для $\omega(x) = (x - x_1) \cdots (x - x_n)$ и некоторой точки $t \in (a, b)$ выполняется равенство

$$R(f) = \frac{1}{(2n)!} f^{(2n)}(t) \int_a^b \omega^2(x) \rho(x, Q_n) dx.$$

Дагестанский государственный университет

Поступило

29.12.94

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Долженко Е. П., Севастьянов Е. А. Знакочувствительные аппроксимации. Пространство знакочувствительных весов. Жесткость и свобода системы // Докл. РАН. 1993. Т. 332. № 6. С. 686–689.
- [2] Долженко Е. П., Севастьянов Е. А. Знакочувствительные аппроксимации. Вопросы единственности и устойчивости // Докл. РАН. 1993. Т. 333. № 1. С. 5–7.
- [3] Бабенко В. Ф. Несимметричные приближения в пространствах суммируемых функций // УМН. 1982. Т. 34. № 4. С. 409–420.
- [4] Суетин П. К. Классические ортогональные полиномы. М.: Наука, 1976.
- [5] Сегё Г. Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962.
- [6] Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974.