Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Рыбаков, О сходимости на границе единичного шара сопряженного пространства, *Матем. заметки*, 1996, том 59, выпуск 5, 753–758

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1769>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 13:27:57

О СХОДИМОСТИ НА ГРАНИЦЕ ЕДИНИЧНОГО ШАРА СОПРЯЖЕННОГО ПРОСТРАНСТВА

В. И. Рыбаков

Различными авторами ранее было установлено наличие некоторых свойств у банаховых пространств при выполнении определенных требований к множеству крайних точек единичного шара сопряженного пространства. В заметке устанавливается наличие этих свойств при выполнении требований к меньшему (чем семейство крайних точек) множеству, а именно, требований к множеству точек какой-либо границы единичного шара. Перед формулировками утверждений указываем источники, где имеются результаты, усиление которых предлагается.

Все встречающиеся топологические пространства предполагаются отделимыми. Если X – линейное нормированное пространство, то сопряженное к нему обозначаем X^* (рассматриваем линейные пространства над $\mathbb{R}$ и, не оговаривая особо, бесконечномерные); для $x \in X$, $x^* \in X^*$ значение x^* на x обозначаем через $\langle x^*, x \rangle$ или через $x^*(x)$. Если S какое-либо множество, а F – семейство функций на нем, то $\sigma(S, F)$ – слабейшая из топологий в S , при которых все функции из F непрерывны на S . Топологию $\sigma(X^*, X)$ на X^* (или на каком-либо подмножестве X^*) обозначаем через w^* , а топологию $\sigma(X, X^*)$ на X – через w (называя ее слабой). Топологическое пространство K называют счетно компактным, если каждое его бесконечное подмножество имеет в K предельную точку. Если (S, t) – топологическое пространство и $E \subset S$, то топологию, индуцированную на E из (S, t) , будем также обозначать через t , рассматривая топологическое пространство (E, t) .

Для нормированного пространства X пусть $B(X)$ – замкнутый единичный шар пространства X , $S(X)$ – его единичная сфера (т.е. $S(X) = \{x \in X : \|x\| = 1\}$); для $A \subset X$ через $[A]$ обозначаем замкнутое линейное подпространство в X , порожденное A , а через $\overline{\text{co}}A$ – замкнутую в X выпуклую оболочку A . Если K – подмножество в X^* , то через $\Gamma(K)$ условимся обозначать какую-либо границу K (если она существует), т.е. такое подмножество в K , что для любого $x \in X$ найдется $x_0^* \in \Gamma(K)$, для которого $\langle x_0^*, x \rangle = \sup\{x^*(x), x^* \in K\}$. Например, если K – w^* -компактное выпуклое множество в X^* , то множество крайних точек

K является $\Gamma(K)$, т.е. границей K .

Пусть X – банахово пространство и E – семейство крайних точек множества $B(X^*)$. Обобщая один из результатов Гротендика, в [1] и в [2] было установлено, что всякое ограниченное в X множество, являющееся счетно компактным в топологии $\sigma(X, E)$, будет слабо компактным в X . Нижеследующее утверждение усиливает этот результат работ [1], [2].

ТЕОРЕМА 1. Пусть X – банахово пространство и $\Gamma = \Gamma(B(X^*))$. Если K ограничено в X и пространство $(K, \sigma(X, \Gamma))$ счетно компактно, то K слабо компактно в X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно проверить, что пространство $(X, \sigma(X, \Gamma))$, и тем более $(K, \sigma(X, \Gamma))$, отделимо. Для доказательства теоремы достаточно установить, что всякая последовательность из K содержит слабо сходящуюся подпоследовательность. Возьмем произвольную последовательность $(x_n) \subset K$ (можно считать, что все ее члены попарно различны, так что множество $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ бесконечно) и пусть $Y = [x_n, n \in \mathbb{N}]$, а K_1 – замыкание множества $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ в топологическом пространстве $(K, \sigma(X, \Gamma))$. Из условия теоремы и свойства сохранения счетной компактности при переходе к замкнутому подмножеству, заключаем: $K_1 = (K_1, \sigma(X, \Gamma))$ счетно компактно. Обозначим через φ отображение, являющееся сужением элементов из $B(X^*)$ на Y (т.е. $\varphi: B(X^*) \rightarrow Y^*$), и пусть $T = \varphi(\Gamma)$. Всякий $x \in K_1$ определяет на T функцию f_x , именно: для $t \in T$ $f_x(t) = \langle x, x_t^* \rangle$, где $x_t^* \in \Gamma$ и $t = \varphi(x_t^*)$.

Сначала установим, что из (x_n) можно выделить подпоследовательность, сходящуюся в каждой точке из T . Предположим противное. Тогда существует подпоследовательность (x'_n) последовательности (x_n) , непустое счетное подмножество $L \subset T$ и вещественные числа r, δ с $\delta > 0$, так что для любого открытого U в $(B(Y^*), w^*)$ с $U \cap L \neq \emptyset$ найдутся $t_1, t_2 \in U \cap L$ с $f(t_1) < r$ и $f(t_2) > r + \delta$, где $f(t) = \lim_n \langle x'_n, t \rangle$, $t \in L$ [3, теорема 3]. Пусть $z \in K_1$ предельная точка множества $\{x'_n, n \in \mathbb{N}\}$ и $Z = [z \cup Y]$. Z сепарабельно, а z – непрерывная функция на компактном множестве $(B(Z^*), w^*)$. Если T_1 – совокупность сужений элементов из Γ на Z , а φ_1 – отображение, являющееся сужением элементов из T_1 на Y (тогда $\varphi_1(T_1) = \varphi(\Gamma)$), то для каждого $t \in L$ выберем элемент $v_t \in T_1$, для которого $\varphi_1(v_t) = t$. Положим $V = \{v_t, t \in L\}$, очевидно, $z(v_t) = f(t)$, $t \in L$. Обозначим

$$A_n = \{v \in V : x'_n(v) < r\} \cap \{v : z(v) < r\},$$

$$B_n = \{v \in V : x'_n(v) > r + \delta\} \cap \{v : z(v) > r + \delta\}.$$

Из построения V, L и свойств функций x'_n, z, f имеем: существует такое бесконечное подмножество $\mathbb{N}_1$ в $\mathbb{N}$, что для каждого $n \in \mathbb{N}_1$

$$\bigcap \{\varepsilon_i B_i : i \in \mathbb{N}_1, i \leq n\} \neq \emptyset \quad (*)$$

при любом выборе ε_i , принимающих значения 0 или 1, где $0 \cdot B_i = A_i$, $1 \cdot B_i = B_i$, (свойство $(*)$ можно установить индукцией по n). Если $\overline{A_i}, \overline{B_i}$ – замыкание в $(B(Z^*), w^*)$ соответственно A_i, B_i , то для всякого $\Delta = (\varepsilon_i) \in \{0; 1\}^{\mathbb{N}_1}$ существует $z_\Delta^* \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}_1} \varepsilon_i \overline{B_i}$, где $0 \cdot \overline{B_i} = \overline{A_i}$, $1 \cdot \overline{B_i} = \overline{B_i}$; при этом для $\Delta_1, \Delta_2 \in \{0; 1\}^{\mathbb{N}_1}$, $\Delta_1 \neq \Delta_2$, выполняется неравенство $|z(z_{\Delta_1}^*) - z(z_{\Delta_2}^*)| \geq \delta$. В таком случае метризуемое пространство $(B(Z^*), w^*)$ (расстояние ρ можно определить, например, равенством

$$\rho(z_1^*, z_2^*) = |z(z_1^*) - z(z_2^*)| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |x_n(z_1^*) - x_n(z_2^*)|, \quad z_1^*, z_2^* \in B(Z^*)$$

несепарабельно, что противоречит компактности $(B(Z^*), w^*)$. Это доказывает, что из последовательности (x_n) можно выделить подпоследовательность (y_n) , сходящуюся на T .

Итак, для всякого $t \in T$ существует $\lim_n y_n(t)$, тогда существует $\lim_n y_n(x^*)$ для любого $x^* \in \Gamma$, т.е. (y_n) является последовательностью Коши в пространстве K_1 . Вследствие счетной компактности K_1 , найдется элемент $y \in K_1$, являющийся предельной точкой для $\{y_n, n \in \mathbb{N}\}$, а так как (y_n) – последовательность Коши в K_1 , то (y_n) сходится к y в K_1 . Следовательно, $\lim_n y_n(x^*) = y(x^*)$ при любом $x^* \in \Gamma$. Согласно [4, следствие 11], (y_n) слабо сходится в X к $y \in K_1 \subset K$. Это доказывает теорему.

Нижеследующее утверждение является усилением результатов, полученных в [5, теорема 9], [6, III.3]. Напомним некоторые понятия и обозначения. Топологическое пространство T называют счетно определенным, если существует такое компактное пространство K , содержащее T в качестве подпространства, и такое счетное семейство компактов $\{F_n, n \in \mathbb{N}\}$ в K , что для всякого $t \in T \cap \{F_n, t \in F_n\}$ содержится в T [7], [8, IV.9.2]. Если X – нормированное пространство и E счетно определенное подпространство в (E, w) , то говорим, что E слабо счетно определено в X . Для топологического пространства E через $C_p(E)$ обозначаем пространство всех вещественных непрерывных функций на E , наделенное топологией поточечной сходимости на E . Определение пространства Асплунда см., например, в [9].

ТЕОРЕМА 2. Пусть X – банахово пространство, K – w^* -компактное выпуклое множество в X^* и $\Gamma(K)$ содержится в слабо счетно определенном подмножестве пространства X^* . Тогда $K = \overline{\text{co}}\Gamma(K)$. Если при этом $K = B(X^*)$, то X – пространство Асплунда.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть E – слабо счетно определенное в X^* множество, для которого $\Gamma(K) \subset E$. Множество $B(X^{**})$ можно рассматривать как подмножество F в $C_p(E)$ (с отждествлением некоторых элементов из $B(X^{**})$, если точки из E не разделяют элементы из $B(X^{**})$). В пространстве $C_p(E)$ множество F является компактом типа $\mathcal{E}_2$ ($\equiv$ компакты Гулько) [7, 3.7]. Напомним, что в компакте типа $\mathcal{E}_2$ всякая точка, принадлежащая замыканию какого-либо множества, является пределом последовательности точек этого множества (см. [7, 6.4] либо [8, III.6.2]). Тогда равенство $K = \overline{\text{co}}\Gamma(K)$ следует из [6, 1.2].

Если $K = B(X^*)$, то (так как $\overline{\text{co}}\Gamma(K) = B(X^*)$ и $\Gamma(K) \subset E$) замыкание в X^* линейной оболочки слабо счетно определенного множества E совпадает с X^* . В таком случае X^* – слабо счетно определенное (или WCD) банахово пространство (см. [7, 3.6] либо [8, IV.2.10]). Тогда X^* обладает свойством Радона–Никодима [7, комментарии после теоремы 6.1] и, следовательно, X – пространство Асплунда [9, с. 210].

Ниже (теорема 3) будет получено усиление результата [10, следствие теоремы 1] и в качестве следствий получим утверждения, являющиеся развитием известных результатов (например, [11, теорема 1]).

Последовательность $(x_n, n \in \mathbb{N})$ элементов банахова пространства X называется базисной, если она является базисом в $[x_n, n \in \mathbb{N}]$. Условие, что нормированное пространство Y изоморфно подпространству пространства X , записываем $Y \hookrightarrow X$.

ЛЕММА. Пусть последовательность (x_n) ограничена в банаховом пространстве X , отграничена от нуля (т.е. $\inf\{\|x_n\|, n \in \mathbb{N}\} > 0$), и $\Gamma = \Gamma(B(X^*))$. Если $x_n \rightarrow 0$ в $(X, \sigma(X, \Gamma))$, то из (x_n) можно выделить базисную подпоследовательность.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду $\sigma(X, \Gamma)$ -сходимости ограниченной последовательности (x_n) , из [4, следствие 1] выводим, что $x_n \rightarrow 0$ в (X, w) (т.е. (x_n) слабо сходится к нулю). Тогда, согласно [12, с. 42], из (x_n) можно выделить базисную подпоследовательность.

ТЕОРЕМА 3. Для того, чтобы банахово пространство X не содержало подпространства, изоморфного c_0 , необходимо и достаточно, чтобы всякий ряд $\sum_n x_n$, для которого

$$\sum_n |\langle x^*, x_n \rangle| < \infty, \quad x^* \in \Gamma = \Gamma(B(X^*)), \quad (1)$$

был сходящимся.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если существует изоморфное вложение $j: c_0 \rightarrow X$, то ряд $\sum_n j(u_n)$, где (u_n) – естественный базис в c_0 , будет обладать свойством, что $\sum |\langle j(u_n), x^* \rangle| < \infty$ для всякого $x^* \in X^*$ (а не только для

x^* из какой-либо границы множества $B(X^*)$), однако, этот ряд не будет сходящимся.

Докажем обратное утверждение. Пусть существует ряд $\sum_n x_n$, $x_n \in X$, не являющийся сходящимся, но такой, что (1) выполнено. Установим, что $c_0 \hookrightarrow X$. Можно считать, что $\|x_n\| = 1$, $n \in \mathbb{N}$. Действительно, из условия следует: найдутся такое $\varepsilon > 0$ и такие натуральные числа k_n, p_n ($k_n + p_n < k_{n+1}$), что $z_n = \sum_{i=k_n}^{k_n+p_n} x_i$ удовлетворяют неравенству $\|z_n\| > \varepsilon$, $n \in \mathbb{N}$; если положим $y_n = z_n / \|z_n\|$, то $\|y_n\| = 1$ и $\sum |\langle x^*, y_n \rangle| < \infty$, $x^* \in \Gamma$.

Из условия (1) выводим: для каждого $x^* \in \Gamma$ $\langle x^*, x_n \rangle \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Выделим из (x_n) базисную подпоследовательность (согласно лемме), которую обозначим через (y_n) . Пусть $Y = [y_n, n \in \mathbb{N}]$. (y_n) является базисом в Y , тогда (так как $y_n \in S(X)$) если $y = \sum_n \alpha_n y_n$, то $(\alpha_n) \in c_0$ для каждого $y \in Y$.

Определим отображение $T: Y \rightarrow c_0$ условием: если $y = \sum \alpha_n y_n \in Y$, то $Ty = (\alpha_n)$. T – линейное вложение. Если обратное отображение T^{-1} непрерывно, то $TY = c_0$ и T является изоморфизмом, значит Y – подпространство в X , изоморфное c_0 .

Пусть T^{-1} не является ограниченным. Рассмотрим сопряженное к T отображение $T^*: \ell_1 \rightarrow Y^*$ и обозначим через (e_n) естественный базис в ℓ_1 . Положим $\varphi: X^* \rightarrow Y^*$ сужение элементов из X^* на Y , тогда $\varphi(\Gamma)$ – граница для $B(Y^*)$. Если $y^* \in \varphi(\Gamma)$ и $\langle y^*, y_n \rangle = \gamma_n$, то, ввиду (1), $\sum |\gamma_n| < \infty$. Рассматривая $v = (\gamma_n)$ как элемент в ℓ_1 , вследствие $T^*v \in Y^*$ и $\langle T^*v, y_n \rangle = \langle v, Ty_n \rangle = \gamma_n$, заключаем: $y^* = T^*v$ (ибо точки $\{y_n, n \in \mathbb{N}\}$ разделяют элементы из Y^*). Итак, $T^*\ell_1$ содержит множество $\varphi(\Gamma)$, являющееся границей для $B(Y^*)$. Тогда $c_0 \hookrightarrow Y$ [13, теорема 2], следовательно, $c_0 \hookrightarrow X$. Теорема доказана.

Подмножество $E \subset B(X^*)$ называется *нормирующим*, если

$$\inf \{ \sup \{ |x^*(x)|, x^* \in E \}, x \in S(X) \} > 0.$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть X – банахово пространство. Если $\Gamma = \Gamma(B(X^*))$ может быть покрыто счетным числом $\{H_n\}$ ненормирующих множеств ($H_1 \subset H_2 \subset \dots$), то $c_0 \hookrightarrow X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдется $x_n \in S(X)$ такой, что $\sup \{ |x^*(x_n)|, x^* \in H_n \} < 1/2^n$. Тогда (так как для любого $x^* \in \Gamma$ существует номер n_0 , что $x^* \in H_n$ при $n \geq n_0$) $\sum |\langle x^*, x_n \rangle| < \infty$ при любом $x^* \in \Gamma$. Из теоремы 3 заключаем: $c_0 \hookrightarrow X$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть X – банахово пространство. Если $\Gamma = \Gamma(B(X^*))$ может быть покрыто счетным числом компактных множеств, то всякое замкнутое линейное подпространство в X содержит подпространство, изоморфное c_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала установим, что если Z – нормированное пространство (бесконечномерное) и K – компактное в $B(Z^*)$ множество, то K не является нормирующим. Действительно, в противном случае w^* -замыкание множества $F = \overline{\text{co}}(-K \cup K)$ содержало бы шар $\{x^* \in X^* : \|x^*\| \leq r\}$ для некоторого $r > 0$. Множество F , являясь компактным в Z^* , будет и w^* -компактным и, следовательно, w^* -замкнуто. Тогда пространство Z^* имеет компактную окрестность нуля, что возможно лишь в случае, когда Z^* конечномерно, чего по условию нет. Итак, K – ненормирующее множество.

Пусть $K_n, n \in \mathbb{N}$, компактные в X^* множества такие, что $\Gamma \subset \bigcup_n K_n$ и Y – линейное замкнутое бесконечномерное подпространство пространства X . Если $\varphi: X^* \rightarrow Y^*$ – отображение сужения, то множество $\varphi(\Gamma)$ является границей для $B(Y^*)$, множества $F_n = \varphi(K_n)$ – компактны в Y^* и $\varphi(\Gamma) \subset \bigcup_n F_n$. Из предыдущей части доказательства и следствия 1 заключаем: $c_0 \hookrightarrow Y$.

Тульский государственный
педагогический университет

Поступило
10.05.94

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Bourgain J., Talagrand M. Compacite extreme // Proc. Amer. Math. Soc. 1980. V. 80. P. 68–70.
- [2] Khurana S.S. Point-wise compactness on extreme points // Proc. Amer. Math. Soc. 1981. V. 83. №2. P. 347–348.
- [3] Rosenthal H. Point-wise compact subsets of the first Baire class, with some applications to Banach space theory // Var. Publ. Ser. Math. Inst. Aarhus Univ. 1975. №24. P. 176–187.
- [4] Simons S. A convergence theorem with boundary // Pacific J. Math. 1972. V. 40. P. 703–708.
- [5] Saab E. Extreme points, separability and weak K -analiticity in dual Banach spaces // J. London Math. Soc. 1981. V. 23. P. 165–170.
- [6] Grodefroy G. Boundaries of a convex set and interpolation sets // Math. Ann. 1987. V. 277. P. 173–184.
- [7] Talagrand M. Espaces de Banach faiblement K -analitiques // Ann. Math. 1979. V. 110. №3. P. 407–438.
- [8] Архангельский А. В. Топологические пространства функций. М.: Изд-во МГУ, 1989.
- [9] Giles J.R. Convex analysis with application in the differentiation of convex functions. London: Pitman, 1982.
- [10] Elton J. Extremely weakly unconditionally convergent series // Israel J. Math. 1981. V. 40. №3, 4. P. 255–258.
- [11] Фонф В. П. Слабо экстремальные свойства банаховых пространств // Матем. заметки. 1989. Т. 45. №6. С. 83–91.
- [12] Diestel J. Sequences and series in Banach spaces. New York: Springer Verlag, 1984.
- [13] Фонф В. П. Множества суперпервой категории в банаховых пространствах // Функцион. анализ и его прилож. 1991. Т. 25. №4. С. 66–69.