Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Ю. Игнатьев, О подобии
вольтерровых операторов и операторах преобразования для
интегро-дифференциальных уравнений дробных порядков,
Матем. заметки, 2003, том 73, выпуск 2, 206–216

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm177>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 12:58:27

УДК 517.984

О ПОДОБИИ ВОЛЬТЕРРОВЫХ ОПЕРАТОРОВ И ОПЕРАТОРАХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДРОБНЫХ ПОРЯДКОВ

М. Ю. Игнатьев

Устанавливается подобие некоторых интегральных вольтерровых операторов оператору дробного интегрирования Римана–Лиувилля, а также существование треугольного оператора преобразования для интегро-дифференциальных уравнений дробных порядков. Полученные результаты сохраняют преемственность с аналогичными результатами для случая целых порядков.

Библиография: 7 названий.

В работе рассматриваются вопросы подобия вольтерровых операторов оператору дробного интегрирования Римана–Лиувилля, а также тесно связанные с ними вопросы существования классического треугольного оператора преобразования для интегро-дифференциальных уравнений дробных порядков. Рассмотрим для вещественных $\alpha > 2$ интегральный вольтерров оператор, допускающий представление вида

$$M = J^\alpha + J^{\alpha+1}N, \quad (1)$$

где N – интегральный вольтерров оператор, J^α – оператор дробного интегрирования Римана–Лиувилля

$$J^\alpha f(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(t) dt. \quad (2)$$

Также рассмотрим следующий интегро-дифференциальный оператор дробного порядка с параметрами $\alpha = n - \epsilon$, $n \geq 3$, $\epsilon \in (0, 1)$:

$$\ell y = D^\alpha y + \sum_{k=2}^n p_k(x) D^{\alpha-k} y + P J^\epsilon y, \quad (3)$$

где P – интегральный вольтерров оператор.

Вопросам подобия вольтерровых операторов целым степеням оператора интегрирования посвящено большое количество работ различных авторов; также достаточно полно изучен вопрос о существовании оператора преобразования для дифференциальных и

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 00-01-00741.

интегро-дифференциальных операторов целых порядков ([1]–[4] и др.). Отметим, что в случае дифференциальных операторов высших порядков ($n > 2$) существенным при построении треугольного оператора преобразования является требование аналитичности коэффициентов [5] (соответственно, для подобия вольтеррова оператора n -й степени оператора интегрирования при $n > 2$ существенно требование аналитичности ядра). Случаю нецелых α посвящена работа Маламуда [6].

В настоящей работе используется развитие метода, предложенного в работах [1], [3], [4] и являющегося, в свою очередь, обобщением метода, применявшегося В. А. Марченко при построении оператора преобразования для решений уравнения Штурма–Лиувилля. Предлагаемый метод позволяет ослабить требования, налагавшиеся в [6] на область аналитичности ядра оператора M и коэффициентов оператора (3), и добиться преемственности с результатами, полученными в [3], [4] для случая целых порядков $\alpha = n \in \mathbb{N}$.

Обозначим через D_a четырехугольник в комплексной плоскости с вершинами $\{0, a, a(1 - \omega)^{-1}, a(1 - \omega^{-1})^{-1}\}$, $\omega = \exp(2\pi i/\alpha)$, $V = \{(x, \xi) : x \in [0, 1], \xi \in \overline{D}_{1-x}\}$. Будем говорить, что интегральный вольтерров оператор N является оператором класса A , если он представим в виде

$$Nf(x) = \int_0^x N(x-t, t)f(t) dt, \quad (4)$$

где функция $N(x, \xi)$ определена и непрерывна на V и для любого фиксированного $x \in [0, 1]$ как функция ξ аналитична в области D_{1-x} .

ТЕОРЕМА 1. Пусть M – оператор вида (1), (2), N – вольтерров оператор класса A . Тогда существует вольтерров оператор K класса A такой, что $M = (E + K)J^\alpha(E + K)^{-1}$ в пространствах $C[0, 1]$, $L_p[0, 1]$, $p \geq 1$.

Пусть функция $y(x, \lambda)$ – решение следующей задачи Коши:

$$\ell y = \lambda y, \quad (5)$$

$$D^{\alpha-k}y|_{x=0} = \delta_{k,n}, \quad k = 1, \dots, n, \quad (6)$$

где ℓ – оператор вида (3), $\tilde{y}(x, \lambda)$ – решение “простейшей” задачи Коши:

$$D^\alpha \tilde{y} = \lambda \tilde{y}, \quad (7)$$

$$D^{\alpha-k}\tilde{y}|_{x=0} = \delta_{k,n}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (8)$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть коэффициенты интегро-дифференциального оператора (3) аналитичны в D_1 , функции $p_k^{(n-k)}(\xi)$, $k = 2, \dots, n$, непрерывны в $\overline{D}_1$, P – вольтерров оператор класса A . Тогда для $y(x, \lambda)$ справедливо представление

$$y(x, \lambda) = (E + K)\tilde{y}(x, \lambda) = \tilde{y}(x, \lambda) + \int_0^x K(x-t, t)\tilde{y}(t, \lambda) dt, \quad (9)$$

где K – вольтерров оператор класса A .

Прежде чем приступать к доказательству теорем 1, 2, установим ряд вспомогательных утверждений. Всюду далее $\alpha \notin \mathbb{N}$; $m := [\alpha/2]$.

Введем в рассмотрение функцию

$$\varphi(z, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n\alpha} \lambda^n}{\Gamma(n\alpha + 1)} \quad (10)$$

(здесь и далее $z^\alpha = |z|^\alpha \exp(i\alpha \arg z)$, $\arg z \in (-\pi, \pi]$).

ЛЕММА 1. Функция $\varphi(z, \lambda)$ обладает следующими свойствами:

1) при $x > 0$

$$\varphi(x, \lambda) = (E - \lambda J^\alpha)^{-1} \mathbf{1}; \quad (11)$$

2) для любых $x > 0, j = -m, \dots, m$

$$\varphi(x\omega^j, \lambda) = \varphi(x, \lambda); \quad (12)$$

3) для любых $x > 0, y > 0$

$$\varphi(x, \lambda)\varphi(y, \lambda) = \frac{1}{\alpha} \sum_{j=-m}^m \varphi(x + \omega^j y, \lambda) + \int_0^x g(x-t, y)\varphi(t, \lambda) dt + \int_0^y g(y-t, x)\varphi(t, \lambda) dt, \quad (13)$$

где

$$g(x, y) = -\frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \frac{x^{\alpha-1} y^\alpha}{x^{2\alpha} - 2x^\alpha y^\alpha \cos \alpha \pi + y^{2\alpha}}. \quad (14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Свойства 1), 2) следуют непосредственно из определения (10) функции $\varphi(x, \lambda)$. Докажем свойство 3). Заметим, прежде всего, что обе части равенства (13) – целые функции по λ , поэтому достаточно установить его справедливость для положительных λ .

Для доказательства равенства (13) воспользуемся аппаратом двумерного преобразования Лапласа. Условимся, что запись

$$f(x, y) \overset{x, y}{\div} F(p, q)$$

означает, что функция $F(p, q)$ является двумерным преобразованием Лапласа функции $f(x, y)$:

$$F(p, q) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} f(x, y) \exp(-px - qy) dx dy,$$

записи

$$f(x, y) \overset{x}{\div} F(p, y), \quad f(x, y) \overset{y}{\div} F(x, q)$$

означают соответственно

$$F(p, y) = \int_0^{+\infty} f(x, y) \exp(-px) dx, \quad F(x, q) = \int_0^{+\infty} f(x, y) \exp(-qy) dy.$$

С учетом известных теорем единственности для преобразования Лапласа (см., например, [7, с. 22]) достаточно доказать равенство двумерных изображений правой и левой частей (13) для $p > \lambda^{1/\alpha}, q > \lambda^{1/\alpha}, p \neq q$.

Итак, всюду далее, если не оговорено противное, предполагаем, что $\lambda > 0, p > \lambda^{1/\alpha}, q > \lambda^{1/\alpha}, p \neq q$.

Перейдем к подсчету изображений правой и левой частей (13).

1. Хорошо известно, что $|\varphi(z, \lambda)| < C \exp(\lambda^{1/\alpha} |z|)$, $\lambda > 0$, и при $\operatorname{Re} p > \lambda^{1/\alpha}$

$$\int_0^{+\infty} \varphi(x, \lambda) \exp(-px) dx = \frac{p^{\alpha-1}}{p^\alpha - \lambda}, \quad (15)$$

откуда

$$\varphi(x, \lambda) \varphi(y, \lambda) \stackrel{x, y}{\div} \frac{p^{\alpha-1}}{p^\alpha - \lambda} \frac{q^{\alpha-1}}{q^\alpha - \lambda}. \quad (16)$$

Далее, из [7, формула (2.36), с. 58]

$$\varphi(x + sy, \lambda) \stackrel{x, y}{\div} \frac{1}{sp - q} \left(\frac{sq^{\alpha-1}}{q^\alpha - \lambda s^\alpha} - \frac{p^{\alpha-1}}{p^\alpha - \lambda} \right), \quad s > 0. \quad (17)$$

Зафиксируем p, q такие, что $p > \lambda^{1/\alpha}$, $q > \lambda^{1/\alpha}$, $p \neq q$. Тогда правая часть равенства (17) – аналитическая функция по s в некоторой (односвязной) области вида

$$\{|\arg s| < \pi, |s| \in (1 - \delta, 1 + \delta)\}.$$

С другой стороны, в силу оценки $|\varphi(z, \lambda)| < C \exp(\lambda^{1/\alpha}|z|)$, $\lambda > 0$, интеграл

$$\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \varphi(x + sy, \lambda) \exp(-px - qy) dx dy$$

представляет собой аналитическую по s функцию в области $\{|\arg s| < \pi, |s| < q\lambda^{-1/\alpha}\}$. Поэтому равенство (17) для любых фиксированных $\lambda > 0$, $p > \lambda^{1/\alpha}$, $q > \lambda^{1/\alpha}$, $p \neq q$ справедливо в некоторой области $\{|\arg s| < \pi, |s| \in (1 - \delta, 1 + \delta)\}$, в частности, при $s = \omega^j$, $j = -m, \dots, m$. Таким образом,

$$\varphi(x + \omega^j y, \lambda) \stackrel{x, y}{\div} \frac{1}{p - q\omega^{-j}} \frac{q^{\alpha-1}}{q^\alpha - \lambda} - \frac{1}{p\omega^j - q} \frac{p^{\alpha-1}}{p^\alpha - \lambda}. \quad (18)$$

2. Введем функцию

$$\varphi_1(x, \rho) = \varphi(x, \rho^\alpha) - \frac{1}{\alpha} \sum_{j=-m}^m \exp(\rho \omega^j x).$$

Применяя формулу обращения преобразования Лапласа, получим из (15) после смены контура интегрирования и применения теоремы о вычетах:

$$\varphi(x, \rho^\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^*} \frac{p^{\alpha-1}}{p^\alpha - \rho^\alpha} \exp(px) dp + \frac{1}{\alpha} \sum_{j=-m}^m \exp(\rho \omega^j x),$$

где

$$C^* = \{p = t \exp(-i\pi), t \in (+\infty, \epsilon]\} \cup \{p = \epsilon \exp(i\gamma), \gamma \in (-\pi, \pi)\} \\ \cup \{p = t \exp(i\pi), t \in [\epsilon, +\infty)\}.$$

Откуда

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, \rho) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C^*} \frac{p^{\alpha-1}}{p^\alpha - \rho^\alpha} \exp(px) dp = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^*} \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha - 1} \exp(\rho s x) ds \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha - 1} \right) \bigg|_{s=\tau \exp(i\pi)}^{s=\tau \exp(-i\pi)} \exp(-\rho \tau x) d\tau. \end{aligned}$$

После подсчета разности значений на верхнем и нижнем берегах разреза получим

$$\varphi_1(x, \rho) = -\frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\tau^{\alpha-1}}{\tau^{2\alpha} - 2\tau^\alpha \cos(\alpha\pi) + 1} \exp(-\rho\tau x) d\tau.$$

Наконец, произведя замену переменной $\tau x = t$, получим окончательно

$$\varphi_1(x, \rho) = \int_0^{+\infty} g(t, x) \exp(-\rho t) dt, \quad (19)$$

где $g(t, x)$ – функция, определяемая равенством (14). Далее, из (19), в частности, следует, что интеграл Лапласа (по x) для $\varphi_1(x, \rho)$ сходится абсолютно при любом $p > 0$, и, таким образом, с учетом (15) для любого $p > 0$ имеем

$$\int_0^{+\infty} \varphi_1(x, \rho) \exp(-px) dx = \frac{p^{\alpha-1}}{p^\alpha - \rho^\alpha} - \frac{1}{\alpha} \sum_{j=-m}^m \frac{1}{p - \rho\omega^j}. \quad (20)$$

Из (19), (20) имеем

$$\begin{aligned} & g(x, y) \stackrel{x}{\div} \varphi_1(y, p), \quad p > 0, \\ \varphi_1(y, p) \stackrel{y}{\div} & \frac{q^{\alpha-1}}{q^\alpha - p^\alpha} - \frac{1}{\alpha} \sum_{j=-m}^m \frac{1}{q - p\omega^j}, \quad p > 0, \quad q > 0, \end{aligned}$$

откуда

$$g(x, y) \stackrel{x, y}{\div} \frac{q^{\alpha-1}}{q^\alpha - p^\alpha} - \frac{1}{\alpha} \sum_{j=-m}^m \frac{1}{q - p\omega^j}, \quad p > 0, \quad q > 0.$$

3) Согласно теореме о свертке [7, теорема 13, с. 37]

$$\begin{aligned} & \int_0^x g(x-t, y) \varphi(t, \lambda) dt + \int_0^y g(y-t, x) \varphi(t, \lambda) dt \\ & \stackrel{x, y}{\div} \left(\frac{q^{\alpha-1}}{q^\alpha - p^\alpha} - \frac{1}{\alpha} \sum_{j=-m}^m \frac{1}{q - p\omega^j} \right) \frac{p^{\alpha-1}}{p^\alpha - \lambda} + \left(\frac{p^{\alpha-1}}{p^\alpha - q^\alpha} - \frac{1}{\alpha} \sum_{j=-m}^m \frac{1}{p - q\omega^j} \right) \frac{q^{\alpha-1}}{q^\alpha - \lambda}. \end{aligned} \quad (21)$$

Утверждение леммы следует теперь непосредственно из (16), (18), (21). Лемма доказана.

Рассмотрим, далее, оператор

$$\Phi_\lambda f(x) := \int_0^x \varphi(x-t, \lambda) f(t) dt. \quad (22)$$

ЛЕММА 2. Пусть для функции $f(x, \lambda)$ справедливо представление

$$f(x, \lambda) = F\varphi(x, \lambda) = \int_0^x F(x-t, t)\varphi(t, \lambda) dt,$$

где F – вольтерров оператор класса A . Тогда для функции $h = \Phi_\lambda f$ справедливо представление

$$h(x, \lambda) = H\varphi(x, \lambda) = \int_0^x H(x-t, t)\varphi(t, \lambda) dt,$$

где H – вольтерров оператор класса A с ядром

$$H(x, \xi) = \tilde{H}(x) + \hat{H}(x, \xi) + \sum_{j=-m}^m H_j(x, \xi), \quad (23)$$

$$\tilde{H}(x) = \int_0^x dt \int_0^t g(x-t, t-\tau)F(\tau, t-\tau) d\tau, \quad (24)$$

$$\hat{H}(x, \xi) = \int_0^x dt \int_0^t g(t-\tau, x-t)F(\tau, t-\tau+\xi) d\tau, \quad (25)$$

$$\alpha H_j(x, \xi) = \frac{\omega^j}{1-\omega^j} \int_0^x F\left(\tau, \xi + \frac{x-\tau}{1-\omega^j}\right) d\tau - \frac{1}{1-\omega^j} \int_0^x F\left(\tau, \frac{x-\tau}{1-\omega^j}\right) d\tau, \quad j \neq 0, \quad (26)$$

$$\alpha H_0(x, \xi) = \int_0^\xi F(x, t) dt. \quad (27)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned} h(x, \lambda) &= \int_0^x \varphi(x-t, \lambda) dt \int_0^t F(t-\tau, \tau)\varphi(\tau, \lambda) d\tau \\ &= \int_0^x \int_0^t F(\tau, t-\tau)\varphi(x-t, \lambda)\varphi(t-\tau, \lambda) d\tau dt. \end{aligned}$$

Применяя лемму 1, получим

$$h(x, \lambda) = \tilde{h}(x, \lambda) + \hat{h}(x, \lambda) + \frac{1}{\alpha} \sum_{j=-m}^m h_j(x, \lambda), \quad (28)$$

$$\tilde{h}(x, \lambda) = \int_0^x dt \int_0^t d\tau \int_0^{x-t} F(\tau, t-\tau)g(x-t-\xi, t-\tau)\varphi(\xi, \lambda) d\xi, \quad (29)$$

$$\hat{h}(x, \lambda) = \int_0^x dt \int_0^t d\tau \int_0^{t-\tau} F(\tau, t-\tau)g(t-\tau-\xi, x-t)\varphi(\xi, \lambda) d\xi, \quad (30)$$

$$h_j(x, \lambda) = \int_0^x dt \int_0^t F(\tau, t-\tau)\varphi(x-t+\omega^j(t-\tau), \lambda) d\tau. \quad (31)$$

Из (29) после замены переменной $t \rightarrow x-t$ и смены порядка интегрирования получим

$$\begin{aligned} \tilde{h}(x, \lambda) &= \int_0^x \varphi(\xi, \lambda) d\xi \int_\xi^x dt \int_0^{x-t} F(\tau, x-t-\tau)g(t-\xi, x-t-\tau) d\tau \\ &= \int_0^x \tilde{H}_0(x, \xi)\varphi(\xi, \lambda) d\xi, \end{aligned} \quad (32)$$

причем

$$\begin{aligned}\tilde{H}(x) &:= \tilde{H}_0(x + \xi, \xi) = \int_{\xi}^{\xi+x} dt \int_0^{\xi+x-t} F(\tau, x + \xi - t - \tau) g(t - \xi, x + \xi - t - \tau) d\tau \\ &= \int_0^x dt \int_0^t g(x - t, t - \tau) F(\tau, t - \tau) d\tau.\end{aligned}\quad (33)$$

Аналогично из (30) после замены $\tau \rightarrow t - \tau$ и смены порядка интегрирования получаем

$$\hat{h}(x, \lambda) = \int_0^x \varphi(\xi, \lambda) d\xi \int_{\xi}^x dt \int_{\xi}^t F(t - \tau, \tau) g(\tau - \xi, x - t) d\tau = \int_0^x \hat{H}_0(x, \xi) \varphi(\xi, \lambda) d\xi, \quad (34)$$

$$\begin{aligned}\hat{H}(x, \xi) &:= \hat{H}_0(x + \xi, \xi) = \int_{\xi}^{\xi+x} dt \int_{\xi}^t F(t - \tau, \tau) g(\tau - \xi, x + \xi - t) d\tau \\ &= \int_0^x dt \int_{\xi}^{\xi+x} F(t - \tau + \xi, \tau) g(\tau - \xi, x - t) d\tau \\ &= \int_0^x dt \int_0^t F(\tau, t - \tau + \xi) g(t - \tau, x - t) d\tau.\end{aligned}\quad (35)$$

Далее, из (31) при $j \neq 0$ после смены порядка интегрирования и замен переменных $t \rightarrow \xi = x - t + \omega^j(t - \tau)$, $\tau \rightarrow x - \tau$ получим

$$h_j(x, \lambda) = \frac{1}{1 - \omega^j} \int_0^x d\tau \int_{\tau}^{\omega^j \tau} F\left(x - \tau, \frac{\tau - \xi}{1 - \omega^j}\right) \varphi(\xi, \lambda) d\xi.$$

В силу аналитических свойств функции $F(x, \xi)$ подынтегральная функция во внутреннем интеграле аналитична в треугольнике с вершинами $\{0, \tau, \omega^j \tau\}$ и непрерывна в его замыкании. Поэтому

$$\begin{aligned}h_j(x, \lambda) &= \frac{1}{1 - \omega^j} \int_0^x d\tau \int_0^{\omega^j \tau} F\left(x - \tau, \frac{\tau - s}{1 - \omega^j}\right) \varphi(s, \lambda) ds \\ &\quad - \frac{1}{1 - \omega^j} \int_0^x d\tau \int_0^{\tau} F\left(x - \tau, \frac{\tau - \xi}{1 - \omega^j}\right) \varphi(\xi, \lambda) d\xi.\end{aligned}$$

Выполнив в первом интеграле замену $s = \xi \omega^j$ и воспользовавшись (12), получим

$$h_j(x, \lambda) = \int_0^x \tilde{H}_j(x, \xi) \varphi(\xi, \lambda) d\xi, \quad (36)$$

$$\tilde{H}_j(x, \xi) = \frac{\omega^j}{1 - \omega^j} \int_{\xi}^x F\left(x - \tau, \frac{\tau - \xi \omega^j}{1 - \omega^j}\right) d\tau - \frac{1}{1 - \omega^j} \int_{\xi}^x F\left(x - \tau, \frac{\tau - \xi}{1 - \omega^j}\right) d\tau. \quad (37)$$

Далее,

$$\begin{aligned}\alpha H_j(x, \xi) &:= \tilde{H}_j(x + \xi, \xi) \\ &= \frac{\omega^j}{1 - \omega^j} \int_{\xi}^{x+\xi} F\left(x + \xi - \tau, \frac{\tau - \xi \omega^j}{1 - \omega^j}\right) d\tau \\ &\quad - \frac{1}{1 - \omega^j} \int_{\xi}^{x+\xi} F\left(x + \xi - \tau, \frac{\tau - \xi}{1 - \omega^j}\right) d\tau \\ &= \frac{\omega^j}{1 - \omega^j} \int_0^x F\left(\tau, \xi + \frac{x - \tau}{1 - \omega^j}\right) d\tau - \frac{1}{1 - \omega^j} \int_0^x F\left(\tau, \frac{x - \tau}{1 - \omega^j}\right) d\tau.\end{aligned}\quad (38)$$

Наконец, непосредственным подсчетом легко проверяется, что

$$h_0(x, \lambda) = \int_0^x H_0(x - \xi, \xi) \varphi(\xi, \lambda) d\xi, \quad H_0(x, \xi) = \int_0^x F(x, t) dt. \quad (39)$$

Указанное в лемме представление получается теперь объединением равенств (28)–(39). Требуемые аналитические свойства функций $H_j(x, \xi)$ устанавливаются аналогично [2], аналитические свойства функции $\hat{H}(x, \xi)$ следуют из аналитических свойств функции $F(x, \xi)$, представления (25) и очевидного включения $t - \tau + D_{1-t} \subseteq D_{1-\tau}$, $\tau \in [0, t]$. Лемма доказана.

Следующее утверждение легко проверить непосредственным подсчетом.

ЛЕММА 3. Пусть N_1, N_2 – вольтерровы операторы класса A . Тогда оператор $N_{2,1} = N_2 N_1$ – также оператор класса A :

$$N_{2,1}f(x) = \int_0^x N_{2,1}(x - t, t) f(t) dt,$$

где

$$N_{2,1}(x, \xi) = \int_0^x N_2(x - \tau, \xi + \tau) N_1(\tau, \xi) d\tau.$$

Далее, если N – вольтерров оператор класса A , то $(E + N)^{-1} = E + N_1$, где N_1 – также вольтерров оператор класса A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Введем в рассмотрение функцию

$$y(x, \lambda) = (E - \lambda M)^{-1} 1.$$

Используя (1), (11), и учитывая, что, как следует из (22),

$$J + \lambda(E - \lambda J^\alpha)^{-1} J^{\alpha+1} = J(E - \lambda J^\alpha)^{-1} = \Phi_\lambda,$$

получим следующее представление:

$$y = (E + (J - \Phi_\lambda)N)^{-1} \varphi = (E + JN)^{-1} (E - \Phi_\lambda N (E + JN)^{-1})^{-1} \varphi.$$

Определим

$$y_1(x, \lambda) := (E + JN)y(x, \lambda), \quad N_1 := N(E + JN)^{-1}.$$

В силу леммы 3 N_1 – интегральный вольтерров оператор класса A . Далее имеем

$$y_1(x, \lambda) = (E - \Phi_\lambda N_1)^{-1} \varphi(x, \lambda) = \varphi(x, \lambda) + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x, \lambda), \quad (40)$$

где

$$\varphi_1 = \Phi_\lambda N_1 \varphi, \quad \varphi_{n+1} = \Phi_\lambda N_1 \varphi_n.$$

Используя последовательно леммы 2, 3, получим следующие представления:

$$\varphi_n(x, \lambda) = K_n \varphi(x, \lambda) = \int_0^x K_n(x-t, t) \varphi(t, \lambda) dt, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (41)$$

$$\begin{aligned} K_n(x, \xi) = & \int_0^x dt \int_0^t g(x-t, t-\tau) N_n(\tau, t-\tau) d\tau \\ & + \int_0^x dt \int_0^t g(t-\tau, x-t) N_n(\tau, t-\tau+\xi) d\tau + \frac{1}{\alpha} \int_0^\xi N_n(x, t) dt \\ & + \frac{1}{\alpha} \sum_{0 < |j| \leq m} \left[\frac{\omega^j}{1-\omega^j} \int_0^x N_n\left(\tau, \xi + \frac{x-\tau}{1-\omega^j}\right) d\tau \right. \\ & \left. - \frac{1}{1-\omega^j} \int_0^x N_n\left(\tau, \frac{x-\tau}{1-\omega^j}\right) d\tau \right], \end{aligned} \quad (42)$$

$$N_{n+1}(x, \xi) = \int_0^x N_1(x-\tau, \xi+\tau) K_n(\tau, \xi) d\tau, \quad (43)$$

K_n – вольтерровы операторы класса A . Далее, из (42) следует

$$|K_n(x, \xi)| \leq C \max\{|N_n(\tau, \zeta)| : \tau \in [0, x], \zeta \in \overline{D}_{1-\tau}\}, \quad (44)$$

где

$$C = 2 \int_0^1 \int_0^1 |g(x, t)| dt dx + \frac{4m+1}{\alpha|1-\omega|}.$$

Объединив (44) и (43), получим по индукции

$$|N_n(x, \xi)| \leq C^{n-1} C_1^n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}, \quad |K_n(x, \xi)| \leq C^n C_1^n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}, \quad (45)$$

где $C_1 = \max\{|N_1(x, \xi)| : (x, \xi) \in V\}$. Определим

$$K_0(x, \xi) := \sum_{n=1}^{\infty} K_n(x, \xi). \quad (46)$$

В силу оценок (45) ряд в правой части (46) сходится абсолютно и равномерно на V , определяемая им функция $K_0(x, \xi)$ обладает теми же свойствами, что и $N(x, \xi)$. Из (40), (41), (46) следует

$$y_1(x, \lambda) = \varphi(x, \lambda) + \int_0^x K_0(x-t, t) \varphi(t, \lambda) dt,$$

откуда, в свою очередь, с учетом определения функции $y_1(x, \lambda)$ получается представление

$$y(x, \lambda) = \varphi(x, \lambda) + K \varphi(x, \lambda) = \varphi(x, \lambda) + \int_0^x K(x-t, t) \varphi(t, \lambda) dt,$$

откуда с учетом определения функций $y(x, \lambda)$, $\varphi(x, \lambda)$ далее следует

$$M^n 1 = (E + K)(J^\alpha)^n 1, \quad M(E + K) \frac{x^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)} = (E + K) J^\alpha \frac{x^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)}.$$

В силу полноты в пространствах $C[0, 1]$, $L_p[0, 1]$ системы функций $\{x^{n\alpha}/\Gamma(n\alpha + 1)\}_{n=0}^{\infty}$ заключаем, что в каждом из этих пространств выполнено равенство $(E + K)J^\alpha = M(E + K)$. Теорема 1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Перепишем ℓy в виде

$$\ell y = D^\alpha y + \sum_{k=2}^n D^{n-k} (q_k(x) J^\epsilon y) + P J^\epsilon y,$$

где

$$q_k(x) = \sum_{j=2}^k (-1)^{(k-j)} C_{n-j}^{k-j} p_j^{(k-j)}(x).$$

Вычитая (7) из (5), получим

$$D^\alpha (y - \tilde{y}) - \lambda (y - \tilde{y}) = - \sum_{k=2}^n D^{n-k} (q_k(x) J^\epsilon y) - P J^\epsilon y,$$

откуда с учетом начальных условий (6), (8) имеем

$$\begin{aligned} y - \tilde{y} &= -(E - \lambda J^\alpha)^{-1} J^\alpha \left(\sum_{k=2}^n D^{n-k} (q_k(x) J^\epsilon y) - P J^\epsilon y \right) \\ &= -\Phi_\lambda J^{\alpha-1} \left(\sum_{k=2}^n D^{n-k} (q_k(x) J^\epsilon y) - P J^\epsilon y \right). \end{aligned}$$

Окончательно, с учетом начальных условий (6) получается следующее интегральное уравнение относительно $y(x, \lambda)$:

$$y = \tilde{y} - \Phi_\lambda N J^\epsilon y, \quad (47)$$

где

$$N = \sum_{k=2}^n J^{k-1-\epsilon} q_k(x) E + J^{\alpha-1} P.$$

В силу аналитических свойств коэффициентов $p_k(\xi)$ N – вольтерров оператор класса A . Решая уравнение (47) методом последовательных приближений, получим

$$y = \tilde{y} + \sum_{j=1}^{\infty} y_j,$$

где

$$y_1 = -\Phi_\lambda N J^\epsilon \tilde{y} = -\Phi_\lambda N \varphi, \quad y_{j+1} = -\Phi_\lambda N J^\epsilon y_j.$$

(Было учтено, что, как нетрудно видеть, $\varphi = J^\epsilon \tilde{y}$.)

Рассуждая, как при доказательстве теоремы 1, получим для $y(x, \lambda)$ интегральное представление

$$y = \tilde{y} + K_0 \varphi,$$

где K_0 – вольтерров оператор класса A . Воспользовавшись еще раз тем, что $\varphi = J^\epsilon \tilde{y}$, и положив $K = K_0 J^\epsilon$, получим для $y(x, \lambda)$ требуемое представление (9). Теорема 2 доказана.

В заключение автор хотел бы выразить благодарность О.В. Седину за постановку задачи и полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Сахнович Л. А. О приведении вольтерровых операторов к простейшему виду и обратных задачах // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1957. Т. 21. № 2. С. 235–262.
- [2] Сахнович Л. А. Обратная задача для дифференциальных операторов порядка $n > 2$ с аналитическими коэффициентами // Матем. сб. 1958. Т. 46. № 1. С. 61–76.
- [3] Хачатрян И. Г. Об операторах преобразования для дифференциальных уравнений высших порядков // Изв. АН АрмССР. Сер. матем. 1978. Т. 13. № 3. С. 215–238.
- [4] Седин О. В. О подобии вольтеррова оператора n -й степени оператору интегрирования // Линейные операторы в функциональных пространствах. Грозный, 1989.
- [5] Мацаев В. И. О существовании оператора преобразования для дифференциальных операторов высших порядков // Докл. АН СССР. 1960. Т. 130. № 3. С. 499–502.
- [6] Маламуд М. М. Подобие вольтерровых операторов и смежные вопросы теории дифференциальных уравнений дробных порядков // Тр. ММО. 1994. Т. 55. С. 73–148.
- [7] Диткин В. А., Прудников А. П. Операционное исчисление по двум переменным и его приложения. М.: Физматгиз, 1958.

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского
E-mail: ignatievmu@info.sgu.ru

Поступило
10.10.2000