Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. П. Филатов, Вычисление пределов максимальных средних, *Матем. заметки*, 1996, том 59, выпуск 5, 759–767

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1770>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 12:55:47

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ МАКСИМАЛЬНЫХ СРЕДНИХ

О. П. Филатов

1. При построении усредненных дифференциальных включений [1], [2] приходится вычислять конечные пределы, например, следующего вида

$$M_f(\omega_1, \omega_2) = \lim_{\Delta \rightarrow \infty} \sup_{\gamma} \frac{1}{\Delta} \int_0^{\Delta} f(\gamma(t)) dt, \quad (1)$$

где $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, а точная верхняя граница средних вычисляется по всем решениям (в смысле Каратеодори) дифференциального включения

$$\dot{\gamma} \in [\omega_1, \omega_2], \quad \gamma(0) = \gamma_0, \quad (2)$$

где $0 < \omega_1 \leq \omega_2$. Для гладких периодических функций в [3] был предложен метод, удобный для вычисления таких пределов. Данная заметка преследует две цели. Во-первых, обоснование метода для класса $\mathcal{F}$ локально интегрируемых (по Лебегу) функций f с нулевым средним, $M_f(1, 1) = 0$. Во-вторых, доказательство существования пределов вида (1) для почти периодических функций.

2. Для формулировки основного результата нам потребуется функция $\lambda_f(\gamma_0, T, c) = \lambda(A_f(\gamma_0, T, c))$, определяющая меру Лебега $\lambda(\cdot)$ множества $A_f(\gamma_0, T, c) = \{\gamma \in [\gamma_0, \gamma_0 + T] : f(\gamma) \geq c\}$ при $T > 0, c \in \mathbb{R}$ (начальное условие γ_0 для краткости часто будем опускать), а также интеграл

$$I_f(T, c) = \int_{A_f(T, c)} f(\gamma) d\gamma = c\lambda_f(T, c) + \int_c^{+\infty} \lambda_f(T, \tau) d\tau. \quad (3)$$

Кроме того, пусть

$$\varphi_f(k, T, c) = \frac{(k-1)\bar{I}_f(T, c)}{1 + (k-1)\bar{\lambda}_f(T, c)}, \quad \Phi_f(k) = \lim_{T \rightarrow \infty} \sup_{c \geq 0} \varphi_f(k, T, c),$$

где $k = \omega_2/\omega_1, \bar{\lambda}_f = \lambda_f/T, \bar{I}_f = I_f/T$.

ТЕОРЕМА 1. Для любой функции $f \in \mathcal{F}$ предел (1) существует одновременно с пределом $\Phi_f(k)$ и они совпадают,

$$M_f(\omega_1, \omega_2) = \Phi_f(k). \quad (4)$$

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $f \in \mathcal{F}$ и существует равномерно по $c \geq 0$ предел $\varphi_f(k, \infty, c) = \lim_{T \rightarrow \infty} \varphi_f(k, T, c)$. Тогда существует предел (1), при этом

$$M_f(\omega_1, \omega_2) = \sup_{c \geq 0} \varphi_f(k, \infty, c). \quad (5)$$

Заметим, что (5) следует из (4), поскольку при нахождении предела $\Phi_f(k)$ в условиях следствия можно переставить местами операции предельного перехода и вычисления точной верхней границы. В частности, если существуют равномерно по $c \geq 0$ пределы $\bar{I}_f(c) = \lim_{T \rightarrow \infty} \bar{I}_f(T, c)$, $\bar{\lambda}_f(c) = \lim_{T \rightarrow \infty} \bar{\lambda}_f(T, c)$, то (5) принимает вид

$$M_f(\omega_1, \omega_2) = \sup_{c \geq 0} \frac{(k-1)\bar{I}_f(c)}{1 + (k-1)\bar{\lambda}_f(c)}. \quad (6)$$

Этот случай всегда реализуется для τ -периодических функций ($\bar{I}_f(c) = I_f(\tau, c)/\tau$, $\bar{\lambda}_f(c) = \lambda_f(\tau, c)/\tau$), но и не только для них. Например, если функция $f \in \mathcal{F}$ представляет последовательность прямоугольных импульсов одинаковой высоты h и существует среднее $2s$ от $|f|$, то по формуле (6) получим

$$M_f(\omega_1, \omega_2) = \frac{(k-1)s}{1 + (k-1)s/h}.$$

На основании следующей теоремы равенство (4) имеет место для практически важного класса почти периодических функций с нулевым средним (если среднее отлично от 0, то необходимо выполнить замену $f \rightarrow f - M_f(1, 1)$).

ТЕОРЕМА 2. Для любой почти периодической функции f предел (1) существует равномерно по $\gamma_0 \in \mathbb{R}$.

3. Далее, измеримую функцию $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ называем ступенчатой, если на любом отрезке она принимает конечное число значений. При этом, если отрезок представим в виде объединения промежутков, на каждом из которых функция постоянная, то такую функцию называем простой ступенчатой. Ниже мы будем использовать известное представление неубывающей по c функции $\lambda_f(j, 1, c)$ (j – целое) на отрезке $[-b, b]$, $b > 0$, в виде суммы

$$\lambda_f(j, 1, c) = \Lambda_f(j, 1, c) + h_f(j, 1, c) \quad (7)$$

непрерывной по $c \in [-b, b]$ невозрастающей функции Λ_f и функции скачков $h_f = \sum_{c_s < c} h_s$, где $c_1, c_2, \dots$ – точки разрыва функции λ_f , $h_s = f(c_s + 0) - f(c_s - 0)$ – скачек.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Равенство (4) обосновывается последовательно для гладких, простых ступенчатых, ступенчатых и, наконец, локально интегрируемых функций. Следующие леммы служат основой данной схемы рассуждений.

ЛЕММА 1. Пусть $f \in \mathcal{F}$. Тогда $\forall K > 0$ существует локально ограниченная функция $g \in \mathcal{F}$ такая, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(\gamma) - g(\gamma)| d\gamma \leq K, \quad (8)$$

и для любых $\gamma_0, c \in \mathbb{R}$, $T > 0$ выполняются неравенства

$$|\lambda_f(T, c) - \lambda_g(T, c)| \leq K, \quad |I_f(T, c) - I_g(T, c)| \leq K. \quad (9)$$

Если же локально интегрируемая функция g удовлетворяет оценкам (8), (9) при некотором K , то $g \in \mathcal{F}$ и справедливы равенства

$$M_f(\omega_1, \omega_2) = M_g(\omega_1, \omega_2), \quad \Phi_f(k) = \Phi_g(k) \quad (10)$$

при условии существования соответствующих пределов для одной из функций.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Требуемая локально ограниченная функция получается из f “срезкой” на каждом из промежутков $(j, j + 1]$, $j = 0, \pm 1, \dots$, достаточно большой константой. Первое равенство в (10) следует из (8), так как $\omega_1 > 0$. Второе вытекает из (9), поскольку

$$|\varphi_f(k, T, c) - \varphi_g(k, T, c)| \leq K_1/T$$

с постоянной K_1 , не зависящей от T и c , при условии существования одного из пределов $\Phi_f(k)$, $\Phi_g(k)$.

Равенства (10) далее понимаются с обычной оговоркой о существовании одного из пределов.

ЛЕММА 2. Для любой простой ступенчатой функции $f \in \mathcal{F}$ существует гладкая функция $g \in C^\infty \cap \mathcal{F}$, для которой выполняются соотношения (10).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 1 достаточно построить функцию g с оценками (8), (9). Для этого функцию $f(\gamma)$ в окрестности каждой точки разрыва a заменяем сверткой

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \omega_\varepsilon(x - \gamma) f(x) dx$$

при достаточно малом $\varepsilon = \varepsilon(a)$, где усредняющая бесконечно дифференцируемая функция $\omega_\varepsilon \geq 0$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \omega_\varepsilon(x) dx = 1, \quad \text{supp } \omega_\varepsilon = [-\varepsilon, \varepsilon].$$

ЛЕММА 3. Для любой ступенчатой функции $f \in \mathcal{F}$ существует простая ступенчатая функция $g \in \mathcal{F}$, для которой выполняются равенства (10).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для промежутка $(j, j+1]$, $j = 0, \pm 1, \dots$, существует целое $N = N(j)$, определяющее число попарно непересекающихся множеств $B_1, B_2, \dots, B_N$, объединение которых составляет весь промежуток, а функция f постоянная на каждом из множеств, $f|_{B_i} = f_i$. Измеримое множество B_i аппроксимируем открытым множеством $U_i \subset (j, j+1]$, состоящим из конечного числа попарно непересекающихся интервалов, так, чтобы выполнялись оценки

$$|\lambda(B_i) - \lambda(U_i)| < \frac{\varepsilon_j}{8N^2}, \quad \lambda\left(\frac{U_i}{B_i}\right) < \frac{\varepsilon_j}{8N^2} \quad (11)$$

при любом $i = 1, 2, \dots, N$, где $\varepsilon_j > 0$ выбирается так, чтобы

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} (1 + b_j) \varepsilon_j < 1, \quad b_j = \max_{j < \gamma \leq j+1} |f(\gamma)|.$$

Множество $V_i = U_i \setminus \bigcup_{s \neq i} U_s$ состоит из конечного числа попарно непересекающихся промежутков. На основании (11) нетрудно получить следующую оценку

$$|\lambda(B_i) - \lambda(V_i)| < \frac{\varepsilon_j}{2N}. \quad (12)$$

Отсюда для меры множества $V_{N+1} = (j, j+1] \setminus \bigcup_{i=1}^N V_i$ получим

$$\lambda(V_{N+1}) < \frac{\varepsilon_j}{2}. \quad (13)$$

Теперь определим простую ступенчатую функцию g на всей оси, полагая ее равной f в точках множеств V_i , $i \neq N+1$. На каждом множестве V_{N+1} полагаем $g = f_{N+1} = 0$. По построению на множестве $V_i \cap B_i$ функции f и g совпадают, поэтому

$$\int_j^{j+1} |f(\gamma) - g(\gamma)| d\gamma = \sum_{i=1}^N \int_{V_i \setminus B_i} |f(\gamma) - g(\gamma)| d\gamma + \int_{V_{N+1}} |f(\gamma)| d\gamma.$$

Поскольку $V_i \setminus B_i \subset U_i \setminus B_i$, то с учетом (11), (13) отсюда следует оценка

$$\int_j^{j+1} |f(\gamma) - g(\gamma)| d\gamma < N \frac{\varepsilon_j}{8N^2} 2b_j + \frac{\varepsilon_j}{2} b_j < \varepsilon_j b_j,$$

а значит выполняется (8) при $K = 1$. Из (12), (13) получим первую из оценок (9), поскольку

$$|\lambda_f(j, 1, c) - \lambda_g(j, 1, c)| \leq \sum_{f_i \geq c} |\lambda(V_i) - \lambda(B_i)| + \lambda(V_{N+1}) < \varepsilon_j.$$

Отсюда, согласно (3), следует вторая из оценок (9), так как

$$|I_f(j, 1, c) - I_g(j, 1, c)| \leq b_j \varepsilon_j + 2\varepsilon_j b_j = 3\varepsilon_j b_j.$$

Таким образом, по лемме 1 выполняются равенства (10).

ЛЕММА 4. *Для любой функции $f \in \mathcal{F}$ существует ступенчатая функция $g \in \mathcal{F}$, для которой выполняются соотношения (10).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 1 функцию f можно считать ограниченной на любом промежутке $(j, j+1]$, $j = 0, \pm 1, \dots$, $|f| < b = b(j)$. Для целого $n = n(j) > 1/\varepsilon_j$, где ε_j из доказательства леммы 3, составим множество $A_j \subset [-b, b]$ из точек вида $-b + ib/n$, $i = 0, 1, \dots, 2n$, и первых $p = p(j)$ точек разрыва функции $\lambda_f(j, 1, c)$ при $c \in [-b, b]$, где целое p выбирается так, чтобы (см. (7))

$$\sum_{s \geq p+1} |h_s| < \frac{\varepsilon_j}{2}. \quad (14)$$

Все точки множества A_i перенумеруем в порядке возрастания, $A_j = \{a_1, a_2, \dots\}$, и положим

$$B_i = \{\gamma \in (j, j+1] : a_i \leq f(\gamma) < a_{i+1}\}.$$

Теперь определим ступенчатую функцию g на всей оси, полагая ее равной a_i в точках множества B_i . Тогда будет выполнено (8) при $K = 1$, так как

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(\gamma) - g(\gamma)| d\gamma < \sum_j \int_j^{j+1} |f(\gamma) - g(\gamma)| d\gamma < \sum_j \varepsilon_j < 1.$$

Можно считать число $n(j)$ настолько большим, что неравенство $|c_1 - c_2| \leq 1/n(j)$, $c_1, c_2 \in [-b, b]$, влечет оценку

$$|\Lambda_f(j, 1, c_1) - \Lambda_f(j, 1, c_2)| < \frac{\varepsilon_j}{2} \quad (15)$$

для функции Λ_f из (7) в силу ее равномерной непрерывности. При $c \in (a_i, a_{i+1})$ выполняется равенство $\lambda_g(j, 1, c) = \lambda_f(j, 1, a_{i+1})$, поэтому из (7), (14), (15) получим, что $|\lambda_f(j, 1, c) - \lambda_g(j, 1, c)| < \varepsilon_j$, тем более при $0 \leq \xi \leq 1$ $|\lambda_f(j, \xi, c) - \lambda_g(j, \xi, c)| < \varepsilon_j$. Поэтому выполняется первое из неравенств (9) при $K = 1$. Второе обосновывается как и в лемме 3. Теперь из леммы 1 следуют равенства (10).

Из лемм 2–4 вытекает, что теорему 1 достаточно доказать только для гладких функций.

ЛЕММА 5. Теорема 1 справедлива для любой функции $f \in \mathcal{F} \cap C^\infty(\mathbb{R})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На основании принципа максимума Понтрягина, как и в [3], устанавливаем, что при фиксированном $\Delta > 0$ для задачи со свободным концом

$$S(\gamma, \Delta) = \int_0^\Delta f(\gamma(t)) dt \rightarrow \sup, \\ \dot{\gamma} = u, \quad u \in [\omega_1, \omega_2], \quad \gamma(0) = \gamma_0,$$

управление u необходимо выбирается по правилу

$$u(t) = \begin{cases} \omega_1 & \text{при } p(t) \leq 0, \\ \omega_2 & \text{при } p(t) > 0, \end{cases}$$

где $p(t)$ – решение дифференциального уравнения

$$\dot{p} = -\frac{df(\gamma(t))}{d\gamma}, \quad p(\Delta) = 0.$$

Пусть $\omega(\gamma) = u(t(\gamma))$, где $t(\gamma)$ – функция, обратная к $\gamma(t)$. Положим $\varphi(\gamma) = p(t(\gamma))$. Тогда

$$\omega(\gamma) = \begin{cases} \omega_1 & \text{при } \varphi(\gamma) \leq 0, \\ \omega_2 & \text{при } \varphi(\gamma) > 0. \end{cases}$$

Для непрерывной функции φ множество

$$\{\gamma \in [\gamma_0, \gamma(\Delta)] : \varphi(\gamma) > 0\}$$

распадается на более чем счетное множество попарно непересекающихся интервалов и, возможно, двух промежутков. Вместе со смежными промежутками это дает разложение отрезка $[\gamma_0, \gamma(\Delta)] = \bigcup_{j \geq 0} A_j$ на попарно непересекающиеся промежутки A_j , где принято $A_0 = [\gamma_0, \gamma_1]$ при некотором $\gamma_1 \geq \gamma_0$. На концах любого промежутка A_j при $j \geq 1$ функция φ обращается в 0, а во внутренних точках промежутка либо $\varphi > 0$, либо $\varphi \leq 0$. Покажем, что на концах любого промежутка A_j , $j \geq 1$, функция f принимает значение $f(\gamma_1)$. Действительно,

$$\frac{df}{d\gamma} = -\omega(\gamma) \frac{d\varphi}{d\gamma}. \quad (16)$$

Отсюда

$$f(\gamma) = f(\gamma_1) - \int_{\gamma_1}^{\gamma} \omega(\gamma) \left(\frac{d\varphi}{d\gamma} \right) d\gamma.$$

Поэтому если $a_j \leq b_j$ — границы промежутка A_j , то

$$f(b_j) = f(\gamma_1) - \sum_{b_i \leq b_j} \int_{A_i} \omega(\gamma) \left(\frac{d\varphi}{d\gamma} \right) d\gamma = f(\gamma_1),$$

поскольку функция $\omega(\gamma)$ постоянная во внутренних точках промежутка A_j , а на концах промежутка $\varphi(a_j) = \varphi(b_j) = 0$. Таким образом, правило выбора управления $\omega(\gamma)$ можно сформулировать с явным использованием функции f , как это следует из (16),

$$\omega(\gamma) = \begin{cases} \omega_1 & \text{при } f(\gamma) \geq c, \\ \omega_2 & \text{при } f(\gamma) < c, \end{cases} \quad (17)$$

где $c = f(\gamma_1)$. Отсюда вытекает, что оптимальное решение $\gamma = \gamma(t)$, $0 \leq t \leq \Delta$, принадлежит множеству решений Γ_{Δ} задачи (2), каждое из которых определяется следующим образом. Для произвольного $c \in \mathbb{R}$ строится функция $\omega(\gamma)$ (17), а затем на отрезке $[0, \Delta]$,

$$\Delta = \int_{\gamma_0}^{\gamma_0+T} \frac{d\gamma}{\omega(\gamma)}, \quad T = T(\Delta), \quad (18)$$

неявно задается решение задачи (2) $\gamma = \gamma(t)$ уравнением

$$t = \int_{\gamma_0}^{\gamma} \frac{d\gamma}{\omega(\gamma)}.$$

Для произвольного решения $\gamma \in \Gamma_{\Delta}$ преобразуем среднее $S(\gamma, \Delta)/\Delta$. Имеем

$$S(\gamma, \Delta) = \int_{\gamma_0}^{\gamma(\Delta)} \frac{f(\gamma) d\gamma}{\omega(\gamma)} = \int_{\{f(\gamma) \geq c\}} + \int_{\{f(\gamma) < c\}}. \quad (19)$$

Положим $T = \gamma(\Delta) - \gamma_0$. Поскольку функция f имеет нулевое среднее, то правая часть (19) в силу (17) равна $I_f(T, c)\tau + \varepsilon(T, \gamma_0)T$, где $\tau = 1/\omega_1 - 1/\omega_2$, $\varepsilon(T, \gamma_0) \rightarrow 0$ при $T \rightarrow \infty$. Аналогично, разбивая интеграл (18) на два по тем же множествам, что и (19), убеждаемся, что $\Delta = \lambda_f(T, c)\tau + T/\omega_2$. Таким образом,

$$\frac{S(\gamma, \Delta)}{\Delta} = \varphi_f(k, T, c) + \eta, \quad \eta = \frac{\omega_2 \varepsilon(T, \gamma_0)}{1 + (k-1)\bar{\lambda}_f(T, c)}.$$

Так как $\eta \rightarrow 0$ при $\Delta \rightarrow \infty$ равномерно по $c \in \mathbb{R}$, то

$$\lim_{\Delta \rightarrow \infty} \sup_{\gamma \in \Gamma_{\Delta}} \frac{S(\gamma, \Delta)}{\Delta} = \lim_{T \rightarrow \infty} \sup_{c \in \mathbb{R}} \varphi_f(k, T, c). \quad (20)$$

Далее, поскольку при $c \leq 0$ $\bar{I}_f(T, c) \leq \bar{I}_f(0, c)$ и в то же время $\bar{\lambda}_f(T, c) \geq \bar{\lambda}_f(T, 0)$, то в правой части равенства (20) достаточно перебрать только значения $c \geq 0$.

Остается заметить, что функционал $l(\gamma) = S(\gamma, \Delta)/\Delta$, определенный на множестве Q_{Δ} всех решений задачи (2), при $0 \leq t \leq \Delta$ достигает своего максимального значения, поскольку множество Q_{Δ} является компактом в равномерной метрике [4, теорема 6, с. 216], а функционал $l(\gamma)$ непрерывен в этой метрике. Теорема 1 доказана.

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Воспользуемся теоремой 1 из [5]. Пусть

$$J_{\Delta}(t_0, \gamma_0) = \bigcup_{\gamma} I_{\Delta}(t_0, \gamma_0, \gamma), \quad I_{\Delta} = \frac{1}{\Delta} \int_{t_0}^{t_0+\Delta} f(\gamma(t)) dt,$$

где объединение берется по всем решениям $\gamma \in Q_{\Delta}(t_0, \gamma_0)$ Включения (2) с начальным условием $\gamma(t_0) = \gamma_0$, t_0, γ_0 – произвольные числа. Поскольку включение (2) автономное, то в указанной теореме достаточно проверить следующее условие:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \Delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall b_1, b_2 \in \mathbb{R} \quad \forall \gamma_1 \in Q_{\Delta}(0, b_1) \quad \exists \gamma_2 \in Q_{\Delta}(0, b_2) \\ |I_{\Delta}(0, b_1, \gamma_1) - I_{\Delta}(0, b_2, \gamma_2)| \leq \varepsilon$$

при всех $\Delta \geq \Delta(\varepsilon)$. Если это условие выполнено (другие условия для почти периодической функции f выполняются автоматически), то существует отрезок $[m, M]$, для которого

$$\lim_{\Delta \rightarrow \infty} \alpha(J_{\Delta}(t_0, \gamma_0), [m, M]) = 0$$

равномерно по $t_0, \gamma_0 \in \mathbb{R}$, где $\alpha(\cdot, \cdot)$ – отклонение по Хаусдорфу для множеств из $\mathbb{R}$. Очевидно, что в этом случае предел (1) совпадает с числом M . Осталось проверить основное условие. Для этого по числу $\varepsilon > 0$, согласно свойству почти периодических функций [6, с. 368], найдем число $l = l(\varepsilon)$ такое, что любой отрезок длины не менее l содержит $\varepsilon/2$ – почти период функции f . В таком случае существует число $t_{\varepsilon} \in [0, l/\omega_2]$, что

число $\gamma_\varepsilon = b_2 + \omega_2 t_\varepsilon$ в сумме с $(-b_1)$ дает $\varepsilon/2$ — почти период T_ε функции f , $T_\varepsilon = \gamma_\varepsilon - b_1$. Теперь по произвольному решению $\gamma_1(t)$, $\gamma_1(0) = b_1$ включения (2) определим решение $\gamma_2 \in Q_\Delta(0, b_2)$ следующим образом:

$$\gamma_2(t) = \begin{cases} b_2 + \omega_2 t & \text{при } 0 \leq t \leq t_\varepsilon, \\ T_\varepsilon + \gamma_1(t - t_\varepsilon) & \text{при } t \geq t_\varepsilon. \end{cases}$$

Поскольку $|f(T_\varepsilon + \gamma_1(t)) - f(\gamma_1(t))| < \varepsilon/2$ при любом t , то после очевидных выкладок получим оценку интегралов

$$|I_\Delta(0, b_1, \gamma_1) - I_\Delta(0, b_2, \gamma_2)| \leq \frac{3Kl(\varepsilon)}{\omega_2 \Delta} + \frac{\varepsilon}{2},$$

где $K = \sup_{\gamma \in \mathbb{R}} |f(\gamma)|$. Поэтому в указанном условии можно принять $\Delta(\varepsilon) = 6Kl(\varepsilon)/\varepsilon\omega_2$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из доказательства теоремы 2 следует, что условие $\omega_1 > 0$ является излишним. Достаточно потребовать, чтобы выполнялось требование $[\omega_1, \omega_2] \neq \{0\}$.

Самарский государственный университет

Поступило

03.11.94

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Филатов О. П., Хапаев М. М. О взаимной ε -аппроксимации решений системы дифференциальных включений и усредненного включения // Матем. заметки. 1990. Т. 47. № 5. С. 127–134.
- [2] Филатов О. П., Хапаев М. М. Усреднение дифференциальных включений с “быстрыми” и “медленными” переменными // Матем. заметки. 1990. Т. 47. № 6. С. 102–109.
- [3] Филатов О. П. Об оценках опорных функций усредненных дифференциальных включений // Матем. заметки. 1991. Т. 50. № 3. С. 135–142.
- [4] Благодатских В. И., Филиппов А. Ф. Дифференциальные включения и оптимальное управление // Тр. МИАН. 1985. Т. 169. С. 194–252.
- [5] Филатов О. П. О существовании усредненного дифференциального включения // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25. № 12. С. 2118–2127.
- [6] Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.