Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Александрова, Спектральный метод
в асимптотических задачах диффузии со сносом,
Матем. заметки, 1996, том 59, выпуск 5, 768–770

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1771>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 14:15:05

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

СПЕКТРАЛЬНЫЙ МЕТОД В АСИМПТОТИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ ДИФФУЗИИ СО СНОСОМ

И. А. Александрова

1. Рассмотрим уравнение диффузии

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(\mathbf{a}(x)\nabla u) + b(x)\nabla u = 0, \quad (1)$$

в котором $\mathbf{a}(x)$ – гладкая периодическая симметрическая матрица, удовлетворяющая условию эллиптичности

$$l_1|\xi|^2 \leq \mathbf{a}_{ij}(x)\xi_i\xi_j, \quad l_1 > 0, \quad (2)$$

$b(x)$ – гладкое периодическое векторное поле.

Пусть $K(x, y, t)$ – фундаментальное решение уравнения (1), ограниченное на $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ при каждом $t > 0$.

В настоящей заметке рассмотрим ряд асимптотических задач, таких, как усреднение, центральная предельная теорема, стабилизация в терминах поведения фундаментального решения $K(x, y, t)$ при $t \rightarrow \infty$. Используем метод, предложенный В. В. Жиковым в статье [1], где рассмотрено уравнение диффузии без сноса.

Все полученные результаты будут выведены из соответствующей оценки для $K(x, y, t)$, которая основана на сравнении исходного уравнения (1) с некоторым простым уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(\mathbf{a}^0\nabla u) = 0, \quad (3)$$

в котором $\mathbf{a}^0$ – уже постоянная симметрическая положительно определенная матрица. Пусть $K_0(x, y, t)$ – фундаментальное решение этого уравнения

$$K_0(x, y, t) = \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\right)^m \frac{1}{\sqrt{\det \mathbf{a}^0}} \exp\left(\frac{-(x-y)(\mathbf{a}^0)^{-1}(x-y)}{4t}\right), \quad (4)$$

где $\xi \mathbf{a}^0 \xi = \mathbf{a}_{ij}^0 \xi_i \xi_j$ (здесь и далее предполагается суммирование по повторяющимся индексам).

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА. *Найдутся такие постоянная симметрическая положительно определенная матрица $\mathbf{a}^0$, называемая усредненной, и постоянный вектор β , что при $t \geq 1$ справедливы оценки:*

$$|K(x + \beta t, y, t) - p(y)K_0(x, y, t)| \leq Ct^{-(m+1)/2} \quad (\forall x \in \mathbb{R}^m, \quad \forall y \in \mathbb{R}^m), \quad (5)$$

$$\int_{\mathbb{R}^m} |K(x + \beta t, y, t) - p(y)K_0(x, y, t)| dy \leq Ct^{-1/2} \quad (\forall x \in \mathbb{R}^m). \quad (6)$$

Здесь $p(x)$ – периодическое решение уравнения

$$\operatorname{div}(\mathbf{a}(x)\nabla p(x)) + \operatorname{div}(b(x)p(x)) = 0,$$

нормированное условием $\langle p \rangle = 1$, где $\langle \cdot \rangle$ – среднее по ячейке периодичности

$$\square = \left\{ x \in \mathbb{R}^m, |x_j| \leq \frac{1}{2}, j = 1, 2, \dots, m \right\}.$$

Выведем из этой теоремы некоторые следствия.

СЛЕДСТВИЕ 1 (Усреднение). Рассмотрим оператор

$$L_\varepsilon = \frac{\partial}{\partial t} - \operatorname{div}(\mathbf{a}(\varepsilon^{-1}x)\nabla) + \varepsilon^{-1}b(\varepsilon^{-1}x)\nabla.$$

Фундаментальное решение $K_\varepsilon(x, y, t)$ уравнения $L_\varepsilon u = 0$ выражается через $K(x, y, t)$ в следующем виде

$$K_\varepsilon(x, y, t) = \varepsilon^{-m} K(\varepsilon^{-1}x, \varepsilon^{-1}y, \varepsilon^{-2}t).$$

Тогда из оценки (5) получим

$$|K_\varepsilon(x + \varepsilon^{-1}\beta t, y, t) - p(\varepsilon^{-1}y)K_0(x, y, t)| \leq C\varepsilon t^{-(m+1)/2}.$$

С помощью этой оценки можно сделать различные заключения о сходимости решения u^ε задачи Коши $L_\varepsilon u^\varepsilon = 0$, $u^\varepsilon|_{t=0} = \varphi$ к решению u^0 усредненной задачи $L_0 u^0 = 0$, $u^0|_{t=0} = \varphi$. Например, если $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}^m)$, то

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |u^\varepsilon(x + \varepsilon^{-1}\beta t, t) - p(\varepsilon^{-1}y)u^0(x, y, t)| = 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R}^m, \quad t \geq 0).$$

СЛЕДСТВИЕ 2 (Равностабилизация). Пусть $u(x, t)$, $u^0(x, t)$ – решения следующих задач Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(\mathbf{a}(x)\nabla u) + b(x)\nabla u = 0, \quad u|_{t=0} = f \in L^\infty(\mathbb{R}^m),$$

$$\frac{\partial u^0}{\partial t} - \operatorname{div}(\mathbf{a}^0\nabla u^0) = 0, \quad u^0|_{t=0} = pf.$$

Тогда из оценки (6) при $t \geq 1$ получаем

$$|u(x + \beta t, t) - u^0(x, t)| \leq Ct^{-1/2} \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^m)}.$$

Таким образом, справедлива теорема о близости:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |u(x + \beta t, t) - u^0(x, t)| = 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R}^m).$$

СЛЕДСТВИЕ 3 (Центральная предельная теорема). Обозначим через ξ^t случайную величину с плотностью распределения $K(x, y, t)$ (y – параметр). Случайная величина $(\xi^t - y - \beta t)t^{-1/2}$ имеет плотность распределения

$$\rho(x, t) = t^{m/2} K(x\sqrt{t} + y + \beta t, y, t).$$

Тогда из оценки (5) имеем

$$|\rho(x, t) - p(x\sqrt{t} + y)K_0(x, 0, 1)| \leq \frac{C}{\sqrt{t}}.$$

2. Доказательство оценки (5) теоремы основано на исследовании оператора

$$A(k) = -e^{-ikx} \left(\operatorname{div}(\mathbf{a}(x) \nabla e^{ikx}) - b(x) \nabla e^{ikx} \right), \quad k \in \mathbb{R}^m, \quad i = \sqrt{-1},$$

и функции Грина $G(k, x, y, t)$ периодической задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -A(k)u, \quad u|_{t=0} = u^0.$$

Оператор $A(k)$ является m -секториальным и для его резольвенты справедлива оценка

$$\|(A - \xi)^{-1}\| \leq \frac{M}{|\xi|} \quad \text{при} \quad |\arg(\xi)| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}.$$

Используя эту оценку и представление оператора $e^{-A(k)t}$ в виде контурного интеграла от резольвенты $(A - \xi)^{-1}$, находим асимптотику для функции Грина:

$$G(k, x, y, t) = \varphi_0(k, x) \varphi_0^*(k, y) e^{-\lambda_0(k)t} + O(\exp(-c_0 t))$$

в $L_2(\square)$, где $\lambda_0(k)$, $\varphi_0(k, x)$ соответственно первое собственное значение и первый собственный вектор оператора $A(k)$; $\varphi_0^*(k, x)$ — первый собственный вектор сопряженного оператора.

Фундаментальное решение $K(x, y, t)$ уравнения (1) выражается через функцию Грина с помощью блоховского представления

$$(2\pi)^m K(x, y, t) = \int_{\square^*} e^{ik(x-y)} G(k, x, y, t) dk,$$

в котором $\square^* = \{k \in \mathbb{R}^m, |k_j| \leq \pi\}$ — сопряженная к $\square$ ячейка.

В результате имеем

$$(2\pi)^m K(x, y, t) = \int_{\square^*} e^{ik(x-y)} e^{-\lambda_0(k)t} \varphi_0(k, x) \varphi_0^*(k, y) dk + O(\exp(-c_0 t)),$$

$c_0 > 0$, и для получения первой основной оценки достаточно асимптотического разложения

$$\begin{aligned} \varphi_0(k, x) &= 1 + O(k), \quad \varphi_0^*(k, x) = p(x) + o(k^2), \\ \lambda_0(k) &= ik\beta + k\mathbf{a}^0 k + o(|k^3|) \end{aligned} \quad \text{при} \quad k \rightarrow 0.$$

3. Вторая основная оценка (6) является комбинацией первой основной оценки (5) и так называемой оценки Нэша–Аронсона, которая формулируется следующим образом.

ЛЕММА. Пусть $K(x, y, t)$ — фундаментальное решение уравнения (1). Тогда справедлива следующая оценка

$$0 \leq K(x + \beta t, y, t) \leq C t^{-m/2} \exp\left(\frac{-C_0(x-y)^2}{t}\right).$$

Владимирский государственный
педагогический университет

Поступило
12.09.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жиков В. В. // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25. № 1. С. 44–50.