Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Я. Махно, Закон повторного логарифма для решений стохастических уравнений с периодическими коэффициентами, *Матем. заметки*, 1996, том 59, выпуск 5, 771–773

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1772>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 08:36:40

ЗАКОН ПОВТОРНОГО ЛОГАРИФМА ДЛЯ РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

С. Я. Махно

Закон повторного логарифма для последовательностей случайных величин исследовался во многих работах. Для случайных процессов в этом направлении известно немного. Этому закону подчиняется многомерный винеровский процесс [1], решения стохастических уравнений с коэффициентами, сходящимися при $|x| \rightarrow \infty$ к константам с определенной скоростью [2]. В этой заметке рассматриваются решения стохастических уравнений с периодическими коэффициентами и для них устанавливается закон повторного логарифма.

Обозначим через E_d d -мерное евклидово пространство, $(\cdot, \cdot)$ – скалярное произведение его элементов, ∇ – символ градиента. Класс периодических функций $f(t, x)$, имеющих периоды T по t и X по всем x_i , $i = \overline{1, d}$, l раз непрерывно дифференцируемых по t и k раз непрерывно дифференцируемых по $x \in E_d$, обозначим $P_{l,k}(T, X)$. Среднее периодической функции $f(t, x)$ обозначим $\langle f \rangle$. Рассматриваемые случайные процессы определены на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, E – символ математического ожидания.

Пусть $\xi(t)$ – решение стохастического уравнения

$$\xi(t) = x + \int_0^t b(s, \xi(s)) ds + \int_0^t \sigma(s, \xi(s)) dw(s).$$

Здесь $w(t)$ – m -мерный стандартный винеровский процесс, $b(t, x)$ – d -мерная вектор-функция с координатами $b_i(t, x)$, $\sigma(t, x)$ – $d \times m$ -матричная функция с элементами $\sigma_{ij}(t, x)$, $t \in [0, \infty)$, $x \in E_d$. Положим $a(t, x) = \sigma(t, x)\sigma'(t, x)$, где *штрих* означает транспонирование.

Сделаем предположения относительно коэффициентов уравнения.

1. Функции $b_i(t, x) \in P_{1,1}(T, X)$, $a_{ij}(t, x) \in P_{2,2}(T, X)$, $i, j = \overline{1, d}$.
2. Существуют постоянные λ, Λ , $0 < \lambda \leq \Lambda < \infty$, такие, что $\forall \theta \in E_d$

$$\lambda|\theta|^2 \leq (a(t, x)\theta, \theta) \leq \Lambda|\theta|^2.$$

При предположениях 1, 2 существует решение $p(t, x) \in P_{1,2}(T, X)$ уравнения [3]

$$\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (a_{ij}(t, x)p) + \sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} (b_i(t, x)p) = 0, \quad \langle p \rangle = 1.$$

Если $F(t, x) \in P_{1,1}(T, X)$ и $\langle Fp \rangle = 0$, то [3] существует единственное решение $u(t, x) \in P_{1,2}(T, X)$ уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} (a(t, x)\nabla, \nabla)u + (b(t, x), \nabla u) = F(t, x), \quad \langle u \rangle = 0. \quad (1)$$

ЛЕММА. Пусть $g(t, x) \in P_{1,1}(T, X)$ и $\gamma = \langle gp \rangle$. Тогда

$$P \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t g(s, \xi(s)) ds = \gamma \right\} = 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $v(t, x)$ решение уравнения (1) с функцией $F(t, x) = \gamma - g(t, x)$. Применяя к функции $v(t, x)$ и процессу $\xi(t)$ формулу Ито, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \int_0^t g(s, \xi(s)) ds - \gamma \\ = \frac{v(0, x) - v(t, \xi(t))}{t} + \frac{1}{t} \int_0^t \left(\nabla v(s, \xi(s)), \sigma(s, \xi(s)) dw(s) \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Положим

$$\begin{aligned} M &= \sup_{t, x} (a(t, x) \nabla v(t, x), \nabla v(t, x)), \\ \xi_k &= \sup_{t \geq 2^k} \frac{1}{t} \left| \int_0^t \left(\nabla v(s, \xi(s)), \sigma(s, \xi(s)) dw(s) \right) \right|. \end{aligned}$$

Докажем, что ξ_k сходятся по вероятности к нулю при $k \rightarrow \infty$. Имеем, используя неравенство Дуба,

$$\begin{aligned} P\{\xi_k > \varepsilon\} &\leq \sum_{m=k}^{\infty} P\left\{ \sup_{2^k \leq t \leq 2^{k+1}} \left| \int_0^t \left(\nabla v(s, \xi(s)), \sigma(s, \xi(s)) dw(s) \right) \right| > \varepsilon 2^k \right\} \\ &\leq \frac{2M}{\varepsilon^2} \sum_{m=k}^{\infty} \frac{1}{2^m} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Так как ξ_k с вероятностью 1 не возрастают, то

$$P\left\{ \lim_{k \rightarrow \infty} \xi_k = 0 \right\} = 1.$$

Следовательно, второе слагаемое в (2) сходится при $t \rightarrow \infty$ к нулю с вероятностью 1, это же очевидно и для первого слагаемого. Лемма доказана.

Проведем следующие построения. Обозначим $\lambda_i = \langle b_i p \rangle$, λ – вектор с координатами λ_i , $i = \overline{1, d}$, $u_i(t, x)$ – решения уравнения (1) при $F(t, x) = \lambda_i - b_i(t, x)$,

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{ij}(t, x) &= \sigma_{ij}(t, x) + \sum_{l=1}^d \sigma_{lj}(t, x) \frac{\partial u_l}{\partial x_i}, \quad i = \overline{1, d}, \quad j = \overline{1, m}, \\ h_{ij}(t, x) &= (\hat{\sigma}(t, x) \hat{\sigma}'(t, x))_{ij}, \quad H_{ij} = \langle h_{ij} p \rangle, \quad i, j = \overline{1, d}, \end{aligned}$$

H – матрица с элементами H_{ij} , $\text{Sp } H$ – след матрицы H .

ТЕОРЕМА. Пусть выполнены условия 1, 2. Справедливы следующие утверждения:

- 1) $P\left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\xi_i(t) - \lambda_i t}{\sqrt{2H_{ii} t \ln \ln t}} = 1 \right\} = 1, \quad i = \overline{1, d};$
- 2) $P\left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\xi_i(t) - \lambda_i t}{\sqrt{2H_{ii} t \ln \ln t}} = -1 \right\} = 1, \quad i = \overline{1, d};$
- 3) $P\left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|\xi(t) - \lambda t|}{\sqrt{2 \text{Sp } H t \ln \ln t}} = 1 \right\} = 1.$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим к функции $u_i(t, x)$ и процессу $\xi(t)$ формулу Ито. Имеем

$$\int_0^t b_i(s, \xi(s)) ds = \lambda_i t + u_i(0, x) - u_i(t, \xi(t)) + \int_0^t \left(\nabla u_i(s, \xi(s)), \sigma(s, \xi(s)) dw(s) \right).$$

Поэтому

$$\xi_i(t) - \lambda_i t = x_i + u_i(0, x) - u_i(t, \xi(t)) + \int_0^t \left(\hat{\sigma}(s, \xi(s)) dw(s) \right)_i. \quad (3)$$

Обозначим

$$\begin{aligned} \mu_i(t) &= \int_0^t \sum_{j=1}^m \hat{\sigma}_{ij}(s, \xi(s)) dw_j(s), \\ \tau_i(t) &= \int_0^t h_{ii}(s, \xi(s)) ds. \end{aligned}$$

При сделанных предположениях $\tau_i(t) \uparrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$ с вероятностью 1. Согласно [4, теорема 1.3.4] процесс $\mu_i(\nu_i(t)) = \tilde{w}_i(t)$ при каждом $i = \overline{1, d}$ является винеровским, $\nu_i(t)$ – обратная к $\tau_i(t)$ функция. Следовательно, $\mu_i(t) = \tilde{w}_i(\tau_i(t))$. Так как в силу леммы с вероятностью 1

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\tau_i(t) \ln \ln \tau_i(t)}{t \ln \ln t} = H_{ii},$$

то, используя закон повторного логарифма для винеровского процесса [1], получим

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{\mu_i(t)}{\sqrt{2t \ln \ln t}} = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{\tilde{w}_i(\tau_i(t))}{\sqrt{2\tau_i(t) \ln \ln \tau_i(t)}} \sqrt{\frac{2\tau_i(t) \ln \ln \tau_i(t)}{2t \ln \ln t}} = H_{ii}^{1/2}.$$

Аналогично,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mu_i(t)}{\sqrt{2t \ln \ln t}} = -H_{ii}^{1/2}.$$

Из (4), (5) и (3) следуют утверждения 1), 2) теоремы. Утверждение 3) есть следствие первых двух. Теорема доказана.

Институт прикладной математики и механики
АН Украины

Поступило
15.03.94

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Скороход А. В. Случайные процессы с независимыми приращениями. М.: Наука, 1964.
2. Fridman A. // Trans. Amer. Math. Soc. 1972. V. 170. P. 359–384.
3. Bensoussan A., Lions J. L., Papanicolaou G. Asymptotic analysis for periodic structures. Amsterdam: North Holland Publ., 1978.
4. Гихман И. И., Скороход А. В. Теория случайных процессов. Т. 3. М.: Наука, 1975.