Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. М. Минеева, Об устойчивости решения одной
краевой задачи гидродинамики, *Матем. замет-*
ки, 1996, том 59, выпуск 5, 774–776

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1773>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 06:02:44

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ГИДРОДИНАМИКИ

О. М. Минеева

Уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \left(\alpha \frac{\partial^5 u}{\partial x^4 \partial t} + k \frac{\partial u}{\partial t} + 2\beta U(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right) + \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + U^2(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial^2 U(t)}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0 \quad (1)$$

с краевыми условиями

$$u(0, t) = u(1, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) = 0 \quad (2)$$

описывает колебания трубопровода с закрепленными концами, находящегося в вязкой среде и несущего поток несжимаемой жидкости [1].

При постоянной скорости вытекающей жидкости $U(t)$, устойчивость нулевого решения была исследована в [2]–[6], а для случая, когда эта скорость имеет вид $U(t) = v_0(1 + \sigma \cos \omega t)$, $\sigma > 0$, $\omega > 0$, задача (1), (2) была исследована в [1], [7]. В работе [1] получены формулы, описывающие область неустойчивости с точностью до малых величин. В работе [7] доказано, что устойчивость нулевого решения будет иметь место при $v_0 \in [0, 2\pi]$ для каждого $\omega > 0$ и $\sigma \in (0, \sigma_0)$, $\sigma_0 = \sigma_0(v_0, \omega)$ без указания конкретного вида $\sigma(v_0, \omega)$.

Цель настоящей работы – установление абстрактного результата, позволяющего исследовать устойчивость нулевого решения задачи (1), (2) в зависимости от скорости вытекающей жидкости $U(t)$.

Рассмотрим в гильбертовом пространстве H операторное уравнение

$$\ddot{u}(t)(B_1(t) + B_2(t))\dot{u}(t) + (A_1(t) + A_2(t))u(t) = 0 \quad (3)$$

с начальными условиями

$$u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = u_1. \quad (4)$$

Относительно операторов $A_1(t)$, $A_2(t)$, $B_1(t)$, $B_2(t)$ будем предполагать, что они определены на некоторой постоянной области определения $D_0 \subset H$ и обладают следующими свойствами:

- 1) $A_1(t)$ самосопряжен, сильно непрерывен по t , $B_1(t)$ – симметрический, $A_2(t)$, $B_2(t)$ – кососимметрические;
- 2) $\exists p > 0$ такое, что $\forall t$ $|A_1(t)| \geq pI$;
- 3) $\exists b_1 > 0$ такое, что $\forall t$ $B_1(t) \geq b_1 I$;
- 4) пусть $\forall t$ $D_0 \subset D'_t$, где D'_t – область определения оператора $\dot{A}(t)$,

$$\dot{A}(t)v = s - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{A(t + \Delta t) - A(t)}{\Delta t} v.$$

Решением задачи (3), (4) будем называть дважды дифференцируемую функцию $u(t)$ такую, что при каждом t : $u(t) \in D_0$, $\dot{u}(t) \in D(A_1^{1/2})$, удовлетворяющую (3), (4). В пространстве дифференцируемых функций со значениями в D_0 рассмотрим

норму $\|u(t)\|_1 = \sqrt{(\dot{u}(t), \dot{u}(t)) + (|A(t)|u(t), u(t))}$. Нулевое решение (3), (4) назовем устойчивым, если существует такая константа $C > 0$, что для любого решения $u(t)$ задачи (3), (4) выполнено неравенство $\|u(t)\|_1 \leq C\|u(0)\|_1$. В противном случае, т.е. если для любой константы $C > 0$ найдется такое решение (3), (4), что при некотором t_0 имеет место: $\|u(t_0)\|_1 \geq C\|u(0)\|_1$, нулевое решение (3), (4) будем называть неустойчивым.

В случае, когда при некоторых константах C, k любое решение (3), (4) удовлетворяет неравенству $\|u(t)\|_1 \leq Ce^{-kt}\|u(0)\|_1$, нулевое решение будем называть экспоненциально устойчивым.

Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА. Пусть найдутся строго положительные числа η, ρ, θ, s и $\varepsilon < 1/\sqrt{\rho}$, удовлетворяющие неравенству

$$b_1\rho + 2\varepsilon + \theta + \eta + s \leq 2b_1, \quad (5)$$

такие, что

$$\dot{A}_1(t) \leq (2\varepsilon + s)A_1(t) + \frac{1}{\theta}A_2^2(t) - \frac{\varepsilon^2}{\rho}B_1(t) + \frac{\varepsilon^2}{\eta}B_2^2(t). \quad (6)$$

Тогда если оператор $A_1(t)$ положителен при всех значениях $t > 0$, то нулевое решение задачи (3), (4) экспоненциально устойчиво; если же найдется элемент $\varphi_0 \in D_0$ такой, что $(A_1(0)\varphi_0, \varphi_0) < 0$, то нулевое решение неустойчиво. Если же найдутся строго положительные числа η, ρ, θ и $\varepsilon < 1/\sqrt{\rho}$ такие, что неравенства (5), (6) выполнены при $s = 0$, то в предположении $A_1(t) > 0$ для всех $t > 0$ нулевое решение (3), (4) является устойчивым (но, возможно, не экспоненциально устойчивым).

Эта теорема следующим образом может быть применена к задаче (1), (2).

В пространстве дважды дифференцируемых по t функций со значениями в пространстве Соболева $W_4^2(0, 1)_x$ рассмотрим энергетическую норму

$$\|u(\cdot, t)\|_1 = \sqrt{(\dot{u}(\cdot, t), \dot{u}(\cdot, t)) + (A_1(t)u(\cdot, t), u(\cdot, t))},$$

где

$$A_1(t)u = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + U^2(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$D(A_1(t)) = \left\{ u \in W_4^2(0, 1) \mid u(0) = u(1) = \frac{\partial u(0)}{\partial x} = \frac{\partial u(1)}{\partial x} \right\}.$$

Положим также

$$A_2(t)u = \frac{\partial U}{\partial t}\beta\frac{\partial u}{\partial x}, \quad D(A_2(t)) = D_0,$$

$$B_1u = \alpha\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + ku, \quad D(B_1) = D_0,$$

$$B_2(t)u = 2\beta U(t)\frac{\partial u}{\partial t}, \quad D(B_2(t)) = D_0.$$

Тогда справедливы следующие утверждения.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если скорость вытекающей жидкости $U(t)$ монотонна, выпукла вверх и

$$\frac{\beta^2}{4(\alpha\Theta + k)}\dot{U}(0) < U(0),$$

где Θ — наименьший положительный корень уравнения $\cos x \cdot (e^x - e^{-x})/2 = 1$, то в случае, когда $\forall t \ U(t) \in (0, 2\pi)$, нулевое решение экспоненциально устойчиво. В случае, когда $\forall t \ U(t) \in (d_i, d_{i+1})$ при некотором i , где d_i — расположенные в порядке возрастания положительные корни уравнения $\sin \frac{x}{2} (\operatorname{tg} \frac{x}{2} - \frac{x}{2}) = 0$, то нулевое решение неустойчиво.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если скорость вытекающей жидкости $U(t)$ монотонно убывающая, вогнутая и $\forall t \ U(t) < 2\pi$, то при достаточно малых $U(0), \dot{U}(0)$ нулевое решение будет экспоненциально устойчиво. А именно, $U(0)$ и $\dot{U}(0)$ должны быть настолько малы, чтобы при некотором

$$\varepsilon < \min \left(k + \Theta\alpha; \frac{1}{\sqrt{\Theta(1 - (U(0)/2\pi)^2)}} \right)$$

выполнялось неравенство

$$\frac{\left(\varepsilon \left(\beta V(0) - \frac{1}{2} \left(\frac{k}{\Theta} + \alpha \right) \sqrt{\Theta} \right) - \frac{1}{2} \dot{V}(0) \beta \right)^2}{(\alpha\Theta + k) - \varepsilon} + \varepsilon(V^2(0) - 1) - V(0)\dot{V}(0) < 0,$$

где $V(t) = U(t)/(2\pi)$, Θ — то же, что и в следствии 1.

СЛЕДСТВИЕ 3. Если скорость вытекающей жидкости имеет вид $U(t) = v_0(1 + \sigma \cos \omega t)$, т.е. периодична, тогда для всех положительных $v_0 < 2\pi$ и $\sigma < 1$ таких, что $v_0(1 + \sigma) < 2\pi$ найдется $\omega_0 = \omega_0(\sigma)$ такое, что для всех $\omega \in (0, \omega_0)$ нулевое решение будет экспоненциально устойчиво. При этом ω_0 определяется следующим образом. Обозначим

$$\varepsilon^* = \min \left(k + \Theta\alpha; \frac{1}{\sqrt{\Theta(1 - b^2(1 + \sigma)^2)}} \right); \quad m_1 = b\beta\sigma, \quad m_2 = b^2(1 + \sigma)\sigma,$$

$$m_3 = 1 - b(1 + \sigma), \quad m_4 = \alpha\Theta + k, \quad m_5 = b\beta(1 + \sigma) + \frac{1}{2} \left(\frac{k}{\Theta} + \alpha \right) \sqrt{\Theta}.$$

Тогда

$$\omega_0 = \max_{\varepsilon \leq \varepsilon^*} \frac{1}{m_1} \left[\sqrt{(m_2 m_4 + \varepsilon(m_1 m_5 - m_2))^2 - 2m_1(\varepsilon m_3 m_4 - \varepsilon^2(m_3 + m_5)) - m_2 m_4 - \varepsilon(m_1 m_5 - m_2)} \right].$$

Поступило
27.11.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Челомей С. В. // Изв. АН СССР. Сер. мех. тв. тела. 1984. № 5. С. 170–174.
2. Феодосьев В. Н. // Инж. сб. 1951. Т. 10. С. 169–170.
3. Мовчан А. А. // ПММ. 1965. Т. 29. № 4. С. 760–762.
4. Доценко П. Д. // Прикл. механика. 1979. Т. 15. № 1. С. 69–75.
5. Зефирова В. И., Колесов В. В., Милославский А. И. // Изв. АН СССР. Сер. мех. тв. тела. 1985. № 1. С. 179–187.
6. Милославский А. И., Станиславский Ю. Л. // Изв. АН СССР. Сер. мех. тв. тела. 1988. № 5. С. 160–167.
7. Буй Та Лонг. Применение функциональных методов к некоторым задачам устойчивости. Дисс. ... к. ф.-м. н. М.: МГУ, 1988.