Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. З. Фишман, О сохранении состояний равновесия и их устойчивости при замене непрерывной системы дискретной, построенной по методу Рунге–Кутты, *Матем. заметки*, 1996, том 59, выпуск 5, 784–787

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1776>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 15:54:48

О СОХРАНЕНИИ СОСТОЯНИЙ РАВНОВЕСИЯ И ИХ УСТОЙЧИВОСТИ ПРИ ЗАМЕНЕ НЕПРЕРЫВНОЙ СИСТЕМЫ ДИСКРЕТНОЙ, ПОСТРОЕННОЙ ПО МЕТОДУ РУНГЕ–КУТТА

Л.З. Фишман

Рассматривается непрерывная система второго порядка

$$\dot{x} = F(x), \quad (1)$$

где $F(x)$ – аналитическая вектор-функция.

Пусть система (1) заменяется дискретной системой, построенной по явному s -этапному методу Рунге–Кутта p -го порядка

$$\bar{x} = x + h \sum_{i=1}^s b_i F(Y_i), \quad (2)$$

где

$$Y_1 = x, \quad Y_i = x + h \sum_{j=1}^s c_{ij} F(Y_j), \quad 2 \leq i \leq s,$$

$$c_{ij} = 0, \quad i \leq j, \quad s \geq p \geq 1, \quad \sum_{i=1}^s b_i = 1, \quad h > 0.$$

При замене дифференциальных уравнений дискретными, построенными по методам Эйлера и Рунге–Кутта, возникает [1]–[6] вопрос о сохранении состояний равновесия дифференциальных уравнений и их характера. Как известно [2], [3], все состояния равновесия дифференциальных уравнений являются также и состояниями равновесия соответствующих дискретных уравнений. Дискретные уравнения, построенные для скалярных дифференциальных уравнений по методам Рунге–Кутта порядка $p > 1$ могут иметь состояния равновесия, которых нет у исходных дифференциальных уравнений. Кроме того, у них могут быть периодические точки периода большего, чем единица, которых нет у исходных дифференциальных уравнений. Такие состояния равновесия и периодические точки названы ложными. В случае, когда дискретные уравнения построены по методу Эйлера, у них не может быть ложных состояний равновесия, но могут быть ложные периодические точки периода большего, чем единица.

Сохранение характера границ областей устойчивости состояний равновесия типа *фокус* и *узел* при замене системы (1) системой (2), построенной по методу Эйлера, показано в [7]. В [8]–[11] даны условия сохранения характера границы области устойчивости фокуса системы (1) при замене ее произвольными системами (2). Показана возможность несохранения характера границы области устойчивости фокуса системы (1).

В данной работе обобщаются и развиваются результаты [7]–[11]. Даются условия (теорема 1) отсутствия у системы (2) ложных состояний равновесия и периодических точек периода большего, чем единица, при достаточно малых шагах h . Показано, что при невыполнении условия достаточной малости h , системы (2), построенные по 2- и 4-этапным явным методам Рунге–Кутта 2-го и 4-го порядка, могут иметь ложные состояния равновесия. Даются условия (теорема 2) сохранения характера границы области устойчивости состояния равновесия типа *узел* системы (1) при замене ее произвольными системами (2).

Работа выполнена при поддержке программы “Университеты России”, направление “Фундаментальные проблемы математики и механики”, грант № 1.5.21.

1. Сохранение состояний равновесия системы (1) при замене ее системой (2). Все состояния равновесия системы (1) являются состояниями равновесия системы (2). Возникает вопрос: может ли система (2) иметь ложные состояния равновесия и периодические точки периода большего, чем единица. В случае, когда (2) построена по методу Эйлера, у нее не может быть ложных состояний равновесия, но могут быть ложные периодические точки периода большего, чем единица. В случае, когда система (2) построена по явному методу Рунге–Кутты любого порядка, достаточные условия отсутствия ложных состояний равновесия и периодических точек периода большего, чем единица, дает следующая

ТЕОРЕМА 1. Пусть система (1) имеет грубые состояния равновесия $O_1, O_2, \dots, O_n$, расположенные внутри замкнутой ограниченной области G плоскости (x_1, x_2) . Пусть граница G является простой замкнутой кривой. Тогда существует такое достаточно малое h_1 , что при $0 < h \leq h_1$ система (2) имеет в области G только состояния равновесия $O_1, O_2, \dots, O_n$ и не имеет других состояний равновесия и периодических точек периода большего, чем единица.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы следует из того, что уравнение для координат состояний равновесия и периодических точек периода $2, 3, \dots, N$, где N не зависит от h , системы (2) приводится к виду

$$F(x) + h\Omega(x, h) = 0,$$

где $\Omega(x, h)$ — аналитическая по (x, h) функция.

Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_1^3 - x_1x_2^2, \quad \dot{x}_2 = x_2 + x_1^2, \quad (3)$$

представляющую собой частный случай системы (1).

Покажем, что системы (2), построенные для (3) по 2-этапному явному методу Рунге–Кутты 2-го порядка (РК2) и по классическому методу Рунге–Кутты 4-го порядка (РК4) при некоторых значениях шага h имеют состояния равновесия, которых нет у системы (3).

В окрестности состояния равновесия $x_1 = x_2 = 0$ системы РК2 и РК4 записываются в виде

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= \lambda_1(h)x_1 + hc_1(h)x_1^3 + h\Omega_1(x_1, x_2, h), \\ \bar{x}_2 &= \lambda_2(h)x_2 + h\Omega_2(x_1, x_2, h), \end{aligned} \quad (4)$$

где $\Omega_1(x_1, x_2, h)$ и $\Omega_2(x_1, x_2, h)$ начинаются с членов не ниже 3-го и 2-го порядка по (x_1, x_2) .

Корень $\lambda_1(h)$ удовлетворяет неравенству $|\lambda_1(h)| < 1$ при $0 < h \leq h^*$ и $|\lambda_1(h)| > 1$ при $h > h^*$, $\lambda_1(h^*) = 1$, где $(-h^*, 0)$ — интервал абсолютной устойчивости [12, с. 47] соответствующего метода Рунге–Кутты. Корень $\lambda_2(h)$ удовлетворяет неравенству $\lambda_2(h) > 1$ при $h > 0$. Для коэффициента выполнено $c_1(h^*) < 0$.

При увеличении h от $h = h^*$ имеет место бифуркация рождения их трехкратного состояния равновесия $x_1 = x_2 = 0$ системы (4) двух ложных грубых состояний равновесия, которых нет у системы (3). Отметим, что для систем РК2 и РК4 величины h^* равны 2 и 2.785.

Таким образом, при дискретизации системы (1) по явному 2-этапному методу Рунге–Кутты 2-го порядка и по классическому методу Рунге–Кутты 4-го порядка могут появляться ложные состояния равновесия.

2. Сохранение характера границы области устойчивости состояния равновесия типа узел при замене системы (1) системой (2). Пусть $F(x) = Ax + f(x)$, матрица A равна $[a_{ik}]$, $i, k = 1, 2$, $f(0) = 0$ и в окрестности точки $x = 0$ компоненты вектор-функции $f(x_1, x_2)$ разлагаются в ряды по степеням (x_1, x_2) не ниже второй. Пусть $r = -(a_{11} + a_{22})$, $q = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ и $r^2 - 4q > 0$.

Полупрямая $r > 0$, $q = 0$ на плоскости параметров (r, q) является границей (Γ_1) области устойчивости узла $x = 0$ системы (1). Система (2) при любом h также имеет состояние равновесия $x = 0$. При замене системы (1) системой (2) граница Γ_1 системы (1) переходит в границу $0 < r < r^*/h$, $q = 0$ (Γ_2) области устойчивости состояния равновесия $x = 0$ системы (2), где $(-r^*, 0)$ – интервал абсолютной устойчивости метода Рунге–Кутты, по которому построена система (2). На границе Γ_2 состояние равновесия $x = 0$ системы (2) имеет корни $\lambda_1 = 1$ и λ_2 , удовлетворяющий неравенству $|\lambda_2| < 1$.

Пусть l_1 и l_2 – первая и вторая ляпуновские величины системы (1), g_1 и g_2 – величины, аналогичные первой и второй ляпуновским, системы (2), найденные в точке $q = 0$, $r = r_0$ границ Γ_1 и Γ_2 .

Имеет место следующая

ТЕОРЕМА 2. Пусть $q = 0$, $r = r_0$, $0 < h < r^*/r_0$. Тогда если $l_1 \neq 0$, то $g_1 = hl_1$, и состояние равновесия $x = 0$ системы (2) так же, как и системы (1), – двукратное, неустойчивое. Если $l_1 = 0$, $l_2 < 0$ ($l_2 > 0$), то $g_2 = hl_2$, и состояние равновесия $x = 0$ системы (2) так же, как (1), – трехкратное, устойчивое (неустойчивое).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Системы (1) и (2) при $q = 0$, $r = r_0$ с помощью замены переменных приводятся к виду

$$\dot{x}_k = p_k x_k + \sum_{n \geq 2} \sum_{r+q=n} a_{rq}^{(k)} x_1^r x_2^q, \quad (5)$$

$$\bar{x}_k = \lambda_k x_k + h \sum_{n \geq 2} \sum_{r+q=n} b_{rq}^{(k)} x_1^r x_2^q, \quad (6)$$

где $p_1 = 0$, $p_2 = -r_0$, $\lambda_1 = 1$, $|\lambda_2| < 1$, коэффициенты $b_{rq}^{(k)}$ выражаются через коэффициенты $a_{rq}^{(k)}$, причем $b_{20}^{(1)} = a_{20}^{(1)}$, $k = 1, 2$.

Так как величина g_1 , аналогичная первой ляпуновской для системы (6), равна $hb_{20}^{(1)}$, первая ляпуновская величина l_1 системы (5) равна $a_{20}^{(1)}$ и $b_{20}^{(1)} = a_{20}^{(1)}$, то получаем равенство $g_1 = hl_1$, которое и требовалось доказать. Из [13], [14] следует, что при условии $a_{20}^{(1)} = l_1 = g_1 = 0$ вторая ляпуновская величина l_2 для системы (5) равна $a_{30}^{(1)} + a_{11}^{(1)} a_{20}^{(2)}/r_0$, а величина g_2 , аналогичная второй ляпуновской для системы (6), равна $h[b_{30}^{(1)} + hb_{11}^{(1)} b_{20}^{(2)}/(1 - \lambda_2)]$. Подставляя в формулу для g_2 выражения для коэффициентов $b_{30}^{(1)}$, $b_{11}^{(1)}$, $b_{20}^{(2)}$ через $a_{20}^{(1)}$, $a_{11}^{(1)}$, $a_{20}^{(2)}$, $a_{30}^{(1)}$, придем к равенству $g_2 = hl_2$, которое и требовалось доказать.

СЛЕДСТВИЕ. При выполнении условий, сформулированных в теореме 2, имеет место сохранение характера границы Γ_1 системы (1) в точке $q = 0$, $r = r_0$ при замене (1) системой (2).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Beyn W.-J. // SIAM J. Numer. Anal. 1987. V. 24. № 5. P. 1095–1113. 2. Is-erles A. // IMA J. Numer. Anal. 1990. V. 10. № 1. P. 3–9. 3. Hairer E., Iser-les A., Sanz-Serna J.M. // Numer. Math. 1990. V. 58. P. 243–254. 4. Iser-les A., Peplow A.T., Stuart A.M. // SIAM J. Numer. Anal. 1991. V. 28. № 6. P. 1723–1751. 5. Yee H.C., Sweby P.H., Griffiths D.F. // J. Comput. Phys. 1991. V. 97. P. 249–310. 6. Cartwright J., Piro O. // Int. J. of Bifurcation and Chaos. 1992. V. 2. № 3. P. 427–449. 7. Белых В.Н., Сенниковский Я.Н. О качественном исследовании отображений с помощью систем дифференциальных уравнений // Деп. ВИНТИ. № 5042–В86. 8. Фишман Л.З. // Автоматика и телемеханика. 1991. № 4. С. 186–189. 9. Фишман Л.З. // Докл. РАН. 1992. Т. 327. № 1. С. 32–36. 10. Фишман Л.З. // Динамика систем. Динамика и оптимизация / ред. Ю.И. Неймарк. Межвуз. тематич. сб. научн. тр. Н. Новгород: НГУ, 1992. С. 124–136. 11. Фишман Л.З. // Матем. заметки. 1992. Т. 52. № 6. С. 131–139. 12. Дж. Холл, Дж. Уатт (ред.) Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1979. 13. Баутин Н.Н. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. М.: Наука, 1984. 14. Неймарк Ю.И. // Изв. вузов. Радиофизика. 1958. Т. 1. № 2. С. 95–130.