Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Чобанян, Несколько замечаний о функционале Меньшова–Радемахера, *Матем. заметки*, 1996, том 59, выпуск 5, 787–790

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1777>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользователь-

ским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 17:24:29

НЕСКОЛЬКО ЗАМЕЧАНИЙ О ФУНКЦИОНАЛЕ МЕНЬШОВА–РАДЕМАХЕРА

С. А. Чобанян

1. Наше первое замечание связано с уточнением константы C в неравенстве Меньшова–Радемахера

$$\Phi_n(\varphi, a) \leq C \log_2^2 n, \quad (1)$$

где

$$\Phi_n(\varphi, a) = \int_{\Omega} \sup_{k \leq n} \left| \sum_1^k a_i \varphi_i(\omega) \right|^2 d\mu(\omega), \quad (2)$$

$\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ – ортонормированная система функций некоторого пространства $L_2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, $a = (a_1, \dots, a_n)$ – набор действительных чисел такой, что $\sum_{i=1}^n a_i^2 = 1$, т.е. $a \in S^{n-1}$.

Обозначим $D_n = \sup_{\varphi} \sup_{a \in S^{n-1}} \Phi_n(\varphi, a)$, где первый из супремумов берется по всевозможным ортонормированным системам $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$. Как показывает следующее утверждение, константу C в неравенстве (1), если последнее рассматривать для достаточно больших n , можно выбрать сколь угодно близкой к $1/4$. Отметим, что в литературе обычно приводится следующая форма неравенства (1) $D_n < \log_2 n + 2$, справедливая для всех $n \geq 1$, (см. [1], [2]).

Работа выполнена при частичной поддержке Международного научного фонда, грант МХС000.

ТЕОРЕМА 1. *Имеет место неравенство*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \frac{D_n}{\log_2^2 n} \leq \frac{1}{4}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя легко проверяемое соотношение

$$\sup_{1 \leq k \leq 2n} \left| \sum_{i=1}^k b_i \right| = \max \left\{ \sup_{1 \leq k \leq n} \left| \sum_{i=1}^k b_i \right|; \sup_{0 \leq k \leq n} \left| -\sum_{i=1}^{2n} b_i + \sum_{i=0}^{k-1} b_{2n-i} \right| \right\},$$

(сумма вида $\sum_{i=0}^{k-1} b_{2n-i}$ считается равной нулю), справедливое для любого набора чисел $b_1, b_2, \dots, b_{2n}$, а также неравенство треугольника в $L_2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, мы будем иметь для произвольной ортонормированной системы $(\varphi_1, \dots, \varphi_{2n})$ и произвольно-го набора действительных чисел $(a_1, \dots, a_{2n})$ с $\sum_{i=1}^{2n} a_i^2 = 1$:

$$\int_{\Omega} \sup_{1 \leq k \leq 2n} \left| \sum_{i=1}^k a_i \varphi_i \right|^2 d\mu \leq D_n + p + 2p^{1/2} q^{1/2} D_n^{1/2}, \quad (3)$$

где $p = \sum_1^n a_i^2$, $q = \sum_{n+1}^{2n} a_i^2$. Легко видеть, что правая часть (3) достигает максимума при $p = \frac{1}{2}(1 + (4D_n + 1)^{-1/2})$ и, следовательно, согласно (3)

$$D_{2n} \leq D_n + D_n^{1/2} + \frac{1}{2}(1 + (4D_n + 1)^{-1/2}).$$

Поскольку $D_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, из последнего неравенства вытекает, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое n_ε , что $D_{2n} \leq (D_n^{1/2} + 1/2 + \varepsilon)^2$ для всех $n > n_\varepsilon$. Многократно применяя последнее рекуррентное соотношение, получаем

$$D_{2^n n_\varepsilon} \leq \left(D_{n_\varepsilon}^{1/2} + n \left(\frac{1}{2} + \varepsilon \right) \right)^2, \quad n = 1, 2, \dots$$

Отсюда следует, что для любого натурального $k > n_\varepsilon$

$$D_k \leq \left(D_{n_\varepsilon}^{1/2} + \left(\frac{1}{2} + \varepsilon \right) \log_2 \frac{ek}{n_\varepsilon} \right)^2.$$

В силу произвольности ε отсюда вытекает утверждение теоремы.

2. В этом пункте функционал Меншова–Радемахера

$$\Phi_n(a) \equiv \Phi_n(\varphi, a) = \int_{\Omega} \sup_{1 \leq k \leq n} \left| \sum_{i=1}^k a_i \varphi_i(\omega) \right|^2 d\mu(\omega)$$

будет рассматриваться как случайная величина, определенная на единичной сфере S^{n-1} n -мерного евклидова пространства с равномерным распределением σ_{n-1} на ней.

Здесь мы устанавливаем поведение $\sigma_{n-1}[a : \Phi_n(a) > r]$ с ростом размерности.

ТЕОРЕМА 2. Для любого $n \in \mathbb{N}$ справедливо следующее неравенство

$$\sigma_{n-1}[a : \Phi(a) > 9] \leq \left(\frac{\pi}{8}\right)^{1/2} e^{-(n-2)/2(\log_2^2 n + 2)}. \quad (4)$$

Доказательство этого утверждения проводится стандартным применением следующей формы изопериметрического неравенства (см. [3, с. 15–16]).

$$\sigma_{n-1}(A_r) \geq 1 - \left(\frac{\pi}{8}\right)^{1/2} e^{-(n-2)r^2/2}, \quad (5)$$

где A – произвольное борелевское подмножество S^{n-1} такое, что $\sigma_{n-1}(A) \geq 1/2$, а A_r – r -окрестность множества A в смысле геодезического расстояния в S^{n-1} , $n \geq 3$. Используется также элементарное неравенство: $\int_{S^{n-1}} \Phi_n(a) d\sigma_{n-1}(a) \leq 2$ и следствие из него: $\sigma_{n-1}[a : \Phi_n(a) \leq 4] > 1/2$. Для получения (4) из (5) достаточно положить $A = [a : \Phi_n(a) \leq 4]$.

Нам неизвестно, является ли неравенство вида (4) неулучшаемым. Если в качестве ортонормированной системы φ взять известную систему (см. [1, с. 295]), для которой $\sup_{a \in S^{n-1}} \Phi_n(a)$ имеет порядок $\log^2 n$, то, очевидно, для некоторой постоянной C $\sigma_{n-1}[a : \Phi_n(a) > C]$ по порядку не меньше $e^{-C_1 n}$, где C_1 не зависит от n . Так что порядок убывания по n в (4) можно считать близким к правильному.

3. Наше третье замечание касается возможности уменьшения значения функционала Меншова–Радемахера с помощью перестановок. Здесь мы хотим обратить внимание на любопытную возможность весьма простого доказательства следующего факта.

ТЕОРЕМА 3 (А. Гарсия [4], [5]). Пусть $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ – ортонормированная система в $L_2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Тогда для любого набора действительных чисел $(a_1, \dots, a_n)$ существует такая перестановка $\pi : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$, что

$$\int_{\Omega} \sup_{1 \leq k \leq n} \left| \sum_{i=1}^k a_{\pi(i)} \varphi_{\pi(i)} \right|^2 d\mu \leq 4 \sum_{i=1}^n a_i^2.$$

Мы приведем доказательство следующего более сильного утверждения.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $f_1, \dots, f_n$ – некоторый набор функций из $L_2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ такой, что $\sum_{i=1}^n f_i = 0$. Тогда найдется такая перестановка $\pi : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$, что

$$\int_{\Omega} \sup_{k \leq n} \left| \sum_{i=1}^k f_{\pi(i)} \right|^2 d\mu \leq \inf_{\theta} \int_{\Omega} \sup_{k \leq n} \left| \sum_{i=1}^k f_{\pi(i)} \theta_i \right|^2 d\mu,$$

где инфимум правой части берется по всем наборам знаков $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$, $\theta_i = \pm 1$.

Нетрудно видеть, что теорему 3 можно получить как следствие теоремы 4, если последнюю применить к набору $f_1, \dots, f_n, f_{n+1}$, где $f_i = a_i \varphi_i$, $i = 1, \dots, n$; $f_{n+1} = -\sum_{i=1}^n a_i \varphi_i$ и взять среднее по всем наборам знаков.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. По неравенству треугольника в L_2 , мы будем иметь для любой перестановки σ и для любого набора знаков $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$

$$\left(\int_{\Omega} \sup_{k \leq n} \left| \sum_1^k f_{\sigma(i)} \right|^2 d\mu \right)^{1/2} + \left(\int_{\Omega} \sup_{k \leq n} \left| \sum_1^k f_{\sigma(i)} \theta_i \right|^2 d\mu \right)^{1/2} \\ \geq 2 \left(\int_{\Omega} \max \left(\sup_{k \leq n} \left| \sum_1^k f_{\sigma(i)}^+ \right|, \sup_{k \leq n} \left| \sum_1^k f_{\sigma(i)}^- \right| \right)^2 d\mu \right)^{1/2}, \quad (6)$$

где $f_{\sigma(i)}^+ = f_{\sigma(i)}$, если $\theta_i = 1$, и $f_{\sigma(i)}^+ = 0$, если $\theta_i = -1$; $f_{\sigma(i)}^- = f_{\sigma(i)}$, если $\theta_i = -1$, и $f_{\sigma(i)}^- = 0$, если $\theta_i = 1$. Как легко убедиться,

$$\max \left(\sup_{k \leq n} \left| \sum_1^k f_{\sigma(i)}^+ \right|, \sup_{k \leq n} \left| \sum_1^k f_{\sigma(i)}^- \right| \right) = \sup_{k \leq n} \left| \sum_1^k f_{\sigma^*(i)} \right|,$$

где перестановка σ^* (зависящая от σ и θ) определяется следующим образом: сначала следуют $\sigma(i)$, для которых $\theta_i = 1$, а затем – в обратном порядке – те $\sigma(i)$, для которых $\theta_i = -1$. Если теперь в (6) в качестве σ взять перестановку, для которой первое слагаемое в левой части (6) достигает минимума, то мы придем к утверждению теоремы.

Стоит отметить, что использованная здесь идея введения перестановки σ^* позволяет установить также элементарно следующий векторный вариант утверждения, доказанного в монографии [1, теорема 2.15], гораздо более глубокого, чем теорема 3.

ТЕОРЕМА 4 (см. [6]). Пусть $a_1, \dots, a_n$ – набор элементов нормированного пространства X , $\sum_1^n a_i = 0$, $r_1, \dots, r_n$ – функции Радемахера, определенные на $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Тогда для каждого $t > 0$ выполняется следующее двустороннее неравенство

$$\mu \left\{ \omega : \left\| \sum_1^n a_i r_i(\omega) \right\| > 2t \right\} \leq \frac{1}{n!} \text{card} \left\{ \sigma : \sup_{k \leq n} \left\| \sum_1^k a_{\sigma(i)} \right\| > t \right\} \\ \leq 11\mu \left\{ \omega : \left\| \sum_1^n a_i r_i(\omega) \right\| > \frac{t}{6} \right\}.$$

Институт вычислительной математики
им. Н. И. Мухомелашвили АН Грузии

Поступило
20.10.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кашин Б. С., Саакян А. А. Ортогональные ряды. М.: Наука, 1984.
2. Лозев М. Теория вероятностей. М.: ИЛ, 1962.
3. Ledoux M., Talagrand M. Probability in Banach Spaces. Berlin, Heidelberg, New York: Springer Verlag, 1991.
4. Garsia A. // Ann. Math. 1964. V. 79. P. 623–629.
5. Garsia A. Topics in almost everywhere convergence. Chicago: Markham, 1970.
6. Chobanyan S. A. // Convergence a.s. of rearranged random series in Banach spaces and associated inequalities. Nine: Birkhauser, 1994. P. 3–29.