Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. А. Шананин, О регулярности решений системы уравнений Навье–Стокса, *Матем. заметки*, 1996, том 59, выпуск 5, 791–796

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1778>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 13:10:49

О РЕГУЛЯРНОСТИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ–СТОКСА

Н. А. ШАНАНИН

Настоящая заметка содержит некоторые теоремы о микролокальной регулярности решений стационарной и нестационарной систем уравнений Навье–Стокса.

1. Стационарная система уравнений. Пусть Ω – область в $\mathbb{R}^n$. Обобщенная функция $u(x) \in \mathcal{D}'(\Omega)$ называется H^s -регулярной в точке $(x_0, \xi_0) \in \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ (сокращенно $u(x) \in H^s(x_0, \xi_0)$), если она представима в виде $u(x) = u_1(x) + u_2(x)$, где функция u_1 принадлежит $H^s(\Omega)$ и точка (x_0, ξ_0) не принадлежит волновому фронту $WF(u_2)$ функции $u_2(x)$. Для того чтобы обобщенная функция $u(x)$ была H^s -регулярной в точке $(x_0, \xi_0) \in \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, необходимо и достаточно, чтобы существовала функция $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\Omega)$ и коническое множество Γ , содержащее точку ξ_0 такие, что $\varphi(x_0) \neq 0$ и $(1 + |\xi|)^s \widetilde{\varphi}u(\xi) \in L_2(\Gamma)$, где $\widetilde{\varphi}u(\xi)$ – преобразование Фурье обобщенной функции φu . Дополнение в $\Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ к множеству точек H^s -регулярности функции $u(x)$ обозначается через $WF_s(u)$. Векторная обобщенная функция $\mathbf{u}(x) = (u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)) \in \mathbf{D}'(\Omega)$ называется H^s -регулярной в точке (x_0, ξ_0) , если каждая скалярная обобщенная функция $u_j(x)$ является H^s -регулярной в этой точке [1].

ТЕОРЕМА 1. Пусть векторная функция $\mathbf{u}(x) \in \mathbf{D}'(\Omega)$ и скалярная функция $p(x) \in \mathcal{D}'(\Omega)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} -\nu \Delta \mathbf{u} + \text{grad } p = \mathbf{f}, \\ \text{div } \mathbf{u} = g, \end{cases} \quad (1)$$

где Δ – оператор Лапласа, $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n) \in \mathbf{D}'(\Omega)$, $g \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Тогда имеют место следующие утверждения.

- 1) Если справедливо включение $\text{div } \mathbf{f} + \nu \Delta g \in H_{\text{loc}}^r(\Omega_1)$, где $\Omega_1 \subset \Omega$, то $p \in H_{\text{loc}}^{r+2}(\Omega_1)$. Если для некоторого индекса $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ справедливо включение $-\Delta f_j + (\text{div } \mathbf{f} + \nu \Delta g)x_j \in H_{\text{loc}}^s(\Omega_1)$, то $u_j \in H_{\text{loc}}^{s+4}(\Omega_1)$.
- 2) Если справедливо включение $\text{div } \mathbf{f} + \nu \Delta g \in H^r(x_0, \xi_0)$, то p принадлежит $H^{r+2}(x_0, \xi_0)$. Если для некоторого индекса $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ справедливо включение $-\Delta f_j + (\text{div } \mathbf{f} + \nu \Delta g)x_j \in H^s(x_0, \xi_0)$, то $u_j \in H^{s+4}(x_0, \xi_0)$.

Для доказательства теоремы достаточно к системе уравнений применить матричный дифференциальный оператор, составленный из алгебраических дополнений исходной системы, и воспользоваться эллиптичностью полученных скалярных уравнений.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 93–011–1771.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\Omega_1 \subset \Omega$, обобщенные функции $\mathbf{u}(x) \in \mathbf{D}'(\Omega)$ и $p(x) \in \mathcal{D}'(\Omega)$ удовлетворяют системе (1). Тогда если $\mathbf{f}(x) \in H_{\text{loc}}^s(\Omega_1)$ и $g(x) \in H_{\text{loc}}^{s+1}(\Omega_1)$, то $\mathbf{u}(x) \in H_{\text{loc}}^{s+2}(\Omega_1)$ и $p(x) \in H_{\text{loc}}^{s+1}(\Omega_1)$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $(x_0, \xi_0) \in \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, обобщенные функции $\mathbf{u}(x) \in \mathbf{D}'(\Omega)$ и $p(x) \in \mathcal{D}'(\Omega)$ удовлетворяют системе (1). Тогда если $\mathbf{f}(x) \in H^r(x_0, \xi_0)$ и $g(x) \in H^{r+1}(x_0, \xi_0)$, то $\mathbf{u}(x) \in H^{r+2}(x_0, \xi_0)$ и $p(x) \in H^{r+1}(x_0, \xi_0)$.

Переход к нелинейной системе основан на следующих двух фактах [2]:

- (1) при $s > n/2$ пространство $H_{\text{loc}}^s(\Omega)$ образует кольцо (теорема Шаудера);
- (2) при $n/2 < s < r < 2s - n/2$ и $\xi_0 \neq 0$ множество функций класса $H_{\text{loc}}^s(\Omega) \cap H^r(x_0, \xi_0)$ образует кольцо (лемма Рауха).

ТЕОРЕМА 2. Пусть $s_0 > n/2 + 1$. Тогда если $\mathbf{u} \in H_{\text{loc}}^{s_0}(\Omega)$, $p \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\mathbf{f} \in H_{\text{loc}}^s(\Omega)$, $g \in H_{\text{loc}}^{s+1}(\Omega)$ и

$$\begin{cases} -\nu \Delta \mathbf{u} + \sum_{j=1}^n u_j \mathbf{u}_{x_j} + \text{grad } p = \mathbf{f}, \\ \text{div } \mathbf{u} = g, \end{cases} \quad (2)$$

то $\mathbf{u} \in H_{\text{loc}}^{s+2}(\Omega)$, $p \in H_{\text{loc}}^{s+1}(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть k – целое неотрицательное число. Если функция u принадлежит пространству $H_{\text{loc}}^{s_0+k}(\Omega)$, то справедливы включения

$$\mathbf{f} - \sum_{j=1}^n u_j \mathbf{u}_{x_j} \in H_{\text{loc}}^{\min(s, s_0+k-1)}(\Omega), \quad g \in H_{\text{loc}}^{\min(s, s_0+k-1)+1}(\Omega).$$

Из следствия 1 вытекают включения

$$\mathbf{u} \in H_{\text{loc}}^{\min(s, s_0+k-1)+2}(\Omega), \quad p \in H_{\text{loc}}^{\min(s, s_0+k-1)+1}(\Omega).$$

Отсюда в случае $s+1 \leq s_0+k$ получаем утверждение теоремы. В противоположном случае ($s+1 > s_0+k$) имеем $\mathbf{u} \in H_{\text{loc}}^{s_0+k+1}$. Используя индукцию по k , нетрудно завершить доказательство.

Введем обозначение

$$k_n(s) = \max\{l \in \mathbb{Z} : l < s - n/2\} = \min\{l \in \mathbb{Z} : l \geq s - n/2\} - 1.$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть $s+2 \geq s_0 > n/2 + 1$, $\xi_0 \neq 0$. Тогда если обобщенные функции $\mathbf{u} \in H_{\text{loc}}^{s_0}(\Omega)$, $p \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\mathbf{f} \in H_{\text{loc}}^s(\Omega) \cap H^r(x_0, \xi_0)$, $g \in H_{\text{loc}}^{s+1}(\Omega) \cap H^{r+1}(x_0, \xi_0)$ удовлетворяют системе (2), то справедливы включения

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &\in H_{\text{loc}}^{s+2}(\Omega) \cap H^{\min(r, s+k_n(s)+2)+2}(x_0, \xi_0), \\ p &\in H_{\text{loc}}^{s+1}(\Omega) \cap H^{\min(r, s+k_n(s)+2)+1}(x_0, \xi_0). \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Случай $s + 2 < s_0$ не представляет интереса, так как из включений $\mathbf{u} \in H_{\text{loc}}^{s_0}(\Omega)$, $p \in H_{\text{loc}}^{s_0+1}(\Omega)$ и неравенства $s_0 > n/2 + 1$ следует, что $\mathbf{f} \in H_{\text{loc}}^{s_0-2}(\Omega)$, $g \in H_{\text{loc}}^{s_0-1}(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 2 справедливы включения $\mathbf{u} \in H_{\text{loc}}^{s+2}(\Omega)$, $p \in H_{\text{loc}}^{s+1}(\Omega)$. Отсюда и из условий теоремы следуют включения

$$\mathbf{f} - \sum_{j=1}^n u_j \mathbf{u}_{x_j} \in H^{\min(r, s+1)}(x_0, \xi_0), \quad g \in H^{\min(r, s+1)+1}(x_0, \xi_0).$$

Используя следствие 2, получаем включения

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &\in H_{\text{loc}}^{s+2}(\Omega) \cap H^{\min(r, s+1)+2}(x_0, \xi_0), \\ p &\in H_{\text{loc}}^{s+1}(\Omega) \cap H^{\min(r, s+1)+1}(x_0, \xi_0). \end{aligned}$$

Пусть k – целое неотрицательное число. Предположим, что справедливы включения

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &\in H_{\text{loc}}^{s+2}(\Omega) \cap H^{\min(r, s+k+1)+2}(x_0, \xi_0), \\ p &\in H_{\text{loc}}^{s+1}(\Omega) \cap H^{\min(r, s+k+1)+1}(x_0, \xi_0). \end{aligned}$$

Если $r \leq s + k + 1$, то имеет место утверждение теоремы. Если число k удовлетворяет неравенствам $r > s + k + 1$ и $k \geq s - n/2$, то $k \geq k_n(s) + 1$ и утверждение теоремы также имеет место. В оставшемся случае в силу леммы Рауха справедливы включения

$$\mathbf{f} - \sum_{j=1}^n u_j \mathbf{u}_{x_j} \in H^{\min(r, s+k+2)}(x_0, \xi_0), \quad g \in H^{\min(r, s+k+2)+1}(x_0, \xi_0).$$

Отсюда в силу следствия 2 получаем

$$\mathbf{u} \in H^{\min(r, s+k+2)+2}(x_0, \xi_0), \quad g \in H^{\min(r, s+k+2)+1}(x_0, \xi_0).$$

Применяя последнее рассуждение достаточное число раз, нетрудно завершить доказательство теоремы.

Для описания расположения особенностей решения стационарной системы уравнений Навье–Стокса удобно ввести два типа волновых фронтов векторных обобщенных функций. Положим

$$\text{WF}_{s,-}(\mathbf{u}, p) = \text{WF}_s(\mathbf{u}) \cup \text{WF}_{s-1}(p), \quad \text{WF}_{s,+}(\mathbf{f}, g) = \text{WF}_s(\mathbf{f}) \cup \text{WF}_{s+1}(g).$$

ТЕОРЕМА 4. Пусть $s + 2 \geq s_0 > n/2 + 1$, $s + k_n(s) + 2 \geq r > s$, обобщенные функции $\mathbf{u} \in H_{\text{loc}}^{s_0}(\Omega)$, $p \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\mathbf{f} \in H_{\text{loc}}^s(\Omega)$, $g \in H_{\text{loc}}^{s+1}(\Omega)$ удовлетворяют системе (2). Тогда

$$\text{WF}_{r+2,-}(\mathbf{u}, p) = \text{WF}_{r,+}(\mathbf{f}, g).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Включение $WF_{r+2,-}(\mathbf{u}, p) \subset WF_{r,+}(\mathbf{f}, g)$ доказано в теореме 3. Докажем справедливость обратного включения. В силу теоремы 2

$$\mathbf{u} \in H_{\text{loc}}^{s+2}(\Omega), \quad p \in H_{\text{loc}}^{s+1}(\Omega).$$

Если $\mathbf{u} \in H^{r+2}(x_0, \xi_0)$ и $p \in H^{r+1}(x_0, \xi_0)$, то $g = \operatorname{div} \mathbf{u} \in H^{r+1}(x_0, \xi_0)$. Кроме того, $\mathbf{u}, u_{x_j} \in H_{\text{loc}}^{s+1}(\Omega) \cap H^r(x_0, \xi_0)$. Поскольку $r \leq s + k_n(s) + 2 < 2(s+1) - n/2$, то из леммы Рауха и очевидных включений следует, что $\mathbf{f} \in H^r(x_0, \xi_0)$.

2. Нестационарная система уравнений. Дифференцированию по переменной t поставим в соответствие вес 2, а остальным – вес 1. Пусть τ, ξ – двойственные переменные по отношению к переменным t, x . Множество $\Gamma \subset \mathbb{R}^{n+1}$ называется *квазиконическим*, если вместе с каждой точкой (τ, ξ) этому множеству принадлежит любая точка вида $(\lambda^2 \tau, \lambda \xi)$, где $\lambda > 0$. Введем весовую функцию

$$\Lambda(\tau, \xi) = (\tau^2 + |\xi|^4)^{1/4}.$$

Она положительно однородна первой степени, удовлетворяет неравенству треугольника. Введем в рассмотрение пространство $H_w^s(\mathbb{R}^{n+1})$, которое состоит из всех обобщенных функций $u(t, x) \in S'(\mathbb{R}^{n+1})$ таких, что

$$(1 + \Lambda(\tau, \xi))^s \tilde{u}(\tau, \xi) \in L_2(\mathbb{R}^{n+1}),$$

где $\tilde{u}(\tau, \xi)$ – преобразование Фурье функции $u(t, x)$. Пусть Ω – область в $\mathbb{R}^{n+1}$. Пусть $\Lambda(\tau_0, \xi_0) \neq 0$. Обобщенная функция $u(t, x)$ называется H_w^s -регулярной в точке $(t_0, x_0, \tau_0, \xi_0)$, если существуют такая функция $\varphi(t, x) \in \mathcal{D}(\Omega)$, отличная от нуля в точке (t_0, x_0) , и такое квазиконическое множество Γ , содержащее точку (τ_0, ξ_0) , что

$$(1 + \Lambda(\tau, \xi))^s \widetilde{\varphi u}(\tau, \xi) \in L_2(\Gamma).$$

Векторная обобщенная функция $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbf{D}'(\Omega)$ называется H_w^s -регулярной в точке $(t_0, x_0, \tau_0, \xi_0)$, если каждая скалярная обобщенная функция u_j является H_w^s -регулярной в этой точке.

ТЕОРЕМА 5. Пусть векторная функция $\mathbf{u}(t, x) \in \mathbf{D}'(\Omega)$ и скалярная функция $p(t, x) \in \mathcal{D}'(\Omega)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \mathbf{u}_t - \nu \Delta \mathbf{u} + \operatorname{grad} p = \mathbf{f}, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = g. \end{cases} \quad (3)$$

Пусть $\xi_0 \neq 0$. Тогда

- 1) если справедливо включение

$$\operatorname{div} \mathbf{f} - (\partial_t - \nu \Delta)g \in H_w^r(t_0, x_0, \tau_0, \xi_0),$$

то $p \in H_w^{r+2}(t_0, x_0, \tau_0, \xi_0)$;

- 2) если для некоторого индекса $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ справедливо включение

$$-\Delta f_j + (\operatorname{div} \mathbf{f} - (\partial_t - \nu \Delta)g)_{x_j} \in H_w^s(t_0, x_0, \tau_0, \xi_0),$$

то $u_j \in H_w^{s+4}(t_0, x_0, \tau_0, \xi_0)$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть векторная функция $\mathbf{u}(t, x) \in \mathbf{D}'(\Omega)$ и скалярная функция $p(t, x) \in \mathcal{D}'(\Omega)$ удовлетворяют системе уравнений (3) и $\xi_0 \neq 0$. Тогда если

$$\mathbf{f} \in H_w^r(t_0, x_0, \tau_0, \xi_0), \quad g \in H_w^{r+1}(t_0, x_0, \tau_0, \xi_0),$$

то $\mathbf{u} \in H_w^{r+2}(t_0, x_0, \tau_0, \xi_0)$, $p \in H_w^{r+1}(t_0, x_0, \tau_0, \xi_0)$.

Переход к нелинейной нестационарной системе уравнений Навье–Стокса основан на анизотропном варианте леммы Рауха: пусть $s > n/2 + 1$ и $0 \leq r < s - n/2 - 1$, тогда если $\mathbf{u} \in H_{\text{loc}, w}^s(\Omega) \cap H_w^{s+r}(t_0, x_0, \tau_0, \xi_0)$, то для любого целого $l \geq 1$ степень $\mathbf{u}^l \in H_{\text{loc}, w}^s(\Omega) \cap H_w^{s+r}(t_0, x_0, \tau_0, \xi_0)$. Положим

$$k'_n(s) = \min\{l \in \mathcal{Z} : l \geq s - n/2 - 2\}.$$

Поскольку $k'_n(s+d) = k_n(s) + d$ для любого целого числа d , то $k'_n(s) = k_n(s) - 1$.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $s > n/2 + 1$, $\mathbf{u} \in H_{\text{loc}, w}^{s+1}(\Omega)$, $p \in \mathcal{D}'(\Omega)$ и выполняется равенство

$$\begin{cases} \mathbf{u}_t - \nu \Delta \mathbf{u} + \sum_{j=1}^n u_j \mathbf{u}_{x_j} + \text{grad } p = \mathbf{f}, \\ \text{div } \mathbf{u} = g \end{cases} \quad (4)$$

и $\xi_0 \neq 0$. Тогда если

$$\mathbf{f} \in H_w^r(t_0, x_0, \tau_0, \xi_0), \quad g \in H_w^{r+1}(t_0, x_0, \tau_0, \xi_0),$$

то

$$\mathbf{u} \in H_w^{\min(r, s+k'_n(s))+2}(t_0, x_0, \tau_0, \xi_0), \quad p \in H_w^{\min(r, s+k'_n(s))+1}(t_0, x_0, \tau_0, \xi_0).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\mathbf{u}, \mathbf{u}_{x_j} \in H_{\text{loc}, w}^s(\Omega)$ и $s > n/2 + 1$, то в силу анизотропного варианта теоремы Шаудера имеем

$$\sum_{j=1}^n u_j \mathbf{u}_{x_j} \in H_{\text{loc}, w}^s(\Omega).$$

Отсюда в силу следствия 3 получаем

$$\mathbf{u} \in H_w^{\min(r, s)+2}(t_0, x_0, \tau_0, \xi_0), \quad p \in H_w^{\min(r, s)+1}(t_0, x_0, \tau_0, \xi_0).$$

Оставшаяся часть доказательства проводится по индукции. Пусть для некоторого $k \geq 0$ имеют место включения

$$\mathbf{u} \in H_w^{\min(r, s+k)+2}(t_0, x_0, \tau_0, \xi_0), \quad p \in H_w^{\min(r, s+k)+1}(t_0, x_0, \tau_0, \xi_0).$$

Тогда если $r \leq s + k$, то $\mathbf{u} \in H_w^{r+2}(t_0, x_0, \tau_0, \xi_0)$ и $p \in H_w^{r+1}(t_0, x_0, \tau_0, \xi_0)$, т.е. утверждение теоремы справедливо. Если $r > s + k$ и $k \geq s - n/2 - 2$, то $\mathbf{u} \in H_w^{s+k'_n(s)+2}(t_0, x_0, \tau_0, \xi_0)$, $p \in H_w^{s+k'_n(s)+1}(t_0, x_0, \tau_0, \xi_0)$ и утверждение

теоремы справедливо. В оставшемся третьем случае выполняется неравенство $k+1 < s - n/2 - 1$, из которого в силу леммы Рауха следует включение

$$\mathbf{f} - \sum_{j=1}^n u_j \mathbf{u}_{x_j} \in H_w^{\min(r, s+k+1)}(t_0, x_0, \tau_0, \xi_0).$$

Отсюда и из следствия 3 получаем

$$\mathbf{u} \in H_w^{\min(r, s+k+1)+2}(t_0, x_0, \tau_0, \xi_0), \quad p \in H_w^{\min(r, s+k+1)+1}(t_0, x_0, \tau_0, \xi_0).$$

Характеристическое множество системы (3) состоит из точек множества $\{(t, x, \tau, \xi) : \xi = 0\}$. Теорема 6 позволяет оценить сверху волновой фронт решения системы (4).

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть $s > n/2 + 1$, $r \leq s + k'_n(s)$, $\mathbf{u} \in H_{\text{loc}, w}^{s+1}(\Omega)$, $p \in \mathcal{D}'(\Omega)$ и выполняются равенства (4). Тогда

$$\text{WF}_{w, r+2, -}(\mathbf{u}, p) \subset \text{WF}_{w, r, +}(\mathbf{f}, g) \cup \{(t, x, \tau, \xi) : \xi = 0\}.$$

Российский университет
Дружбы народов

Поступило
11.10.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тейлор М. Псевдодифференциальные операторы. М.: Мир, 1985.
2. Rauch J. // J. Math. Pure Appl. Ser. 9. 1979. V. 58. № 3. P. 299–308.