Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. М. Ахметьев, *прем-отображения, тройные точки самопересечения ориентированной поверхности и теорема Рохлина о сигнатуре*, *Матем. заметки*, 1996, том 59, выпуск 6, 803–810

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1779>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 14:45:47

prem-ОТОБРАЖЕНИЯ, ТРОЙНЫЕ ТОЧКИ САМОПЕРЕСЕЧЕНИЯ ОРИЕНТИРОВАННОЙ ПОВЕРХНОСТИ И ТЕОРЕМА РОХЛИНА О СИГНАТУРЕ

П. М. Ахметьев

В работах [1], [2] А. Сюч сформулировал понятие prem-отображения (от *projected embeddings*, см. ниже определение 1), которое оказалось полезным для изучения группы кобордизма вложений гладких многообразий для случая нестабильной коразмерности. Оказывается, для случая отображений $f: M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ориентированной поверхности M^2 в трехмерное евклидово пространство $\mathbb{R}^3$ (здесь и далее под поверхностью понимается образ произвольного отображения f общего положения, при этом не предполагается, если не оговорено противное, что поверхность вложена или погружена), можно сформулировать простое необходимое и достаточное условие того, что отображение f является prem-отображением. Это условие сформулировано ниже, как критерий 1. Критерий связан с дополнительной структурой (A -, B -классификация, см. определение 2), которую можно рассмотреть для точек троекратного самопересечения поверхности $f(M^2)$.

Оказалось, что не любое отображение $f: M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ является prem-отображением. Так, например, двулистное накрытие над поверхностью Боя (см., например, [3], [4]), приведенное в общее положение малой C^∞ -деформацией, не является prem-отображением. Это доказано в предложении 2.

Главным результатом работы является теорема 3. По формулировке эта теорема сходна с известной теоремой Банчоффа [5]. В теореме найдена связь между A -, B -структурой точек троекратного самопересечения ориентированной поверхности. Именно, оказалось, что условие $M^2 \cong S^2$ накладывает ограничения четности на число тройных точек поверхности, имеющих тип B . Эта теорема является прямым следствием теоремы Рохлина о сигнатуре четырехмерного многообразия в форме, данной им в работе [6] (см. также [7]), и может служить элементарной иллюстрацией последней.

Предложения 4, 5, 6 уточняют теорему 3. В предложении 4 доказано, что для поверхности тора (а, значит, и для любой поверхности рода g) утверждение теоремы 3, вообще говоря, не выполняется. В предложении 5 доказано, что прямое обобщение теоремы 3 для случая целочисленных оценок невозможно. Предложение 6 выявляет связь между тоекратными точками различных типов на погруженной поверхности. Предложения 4 и 6 являются прямыми переформулировками результатов [4].

Перейдем к определению понятия *ргем-отображения* в случае интересных нас размерностей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $f: M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ – гладкое отображение общего положения. Скажем, что f является *ргем-отображением*, если существует гладкое вложение $\bar{f}: M^2 \subset \mathbb{R}^4$ такое, что следующая диаграмма коммутативна.

$$\begin{array}{ccc} M^2 & \xrightarrow{\bar{f}} & \mathbb{R}^4 \\ & \searrow f & \swarrow \pi \\ & \mathbb{R}^3 & \end{array}$$

В этой диаграмме π – стандартная проекция.

Напомним, какие особенности может иметь отображение $f: M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ общего положения. Точки вырождения дифференциала образуют конечное множество Σ , в которых поверхность $f(M^2)$ имеет вид “зонтика Уитни”. В этих точках f не является локальным вложением. Множество $\Delta_2(f)$, лежащее в $\mathbb{R}^3$, двойных точек самопересечения состоит из некоторого числа замкнутых кривых и некоторого числа кривых, имеющих концевые точки, лежащие на Σ . Кривые $\Delta_2(f)$, вообще говоря, не являются вложенными и могут самопересекаться в конечном множестве $\Delta_3(f)$. В каждой такой точке самопересекается три листа поверхности $f(M^2)$ и три ветви кривой $\Delta_2(f)$. Все возможные особенности перечислены.

Пусть θ – набор ориентаций на компонентах кривой $\Delta_2(f)$. По отношению к выбору θ точки множества $\Delta_3(f)$ могут быть расклассифицированы на два типа в соответствии со следующей конструкцией. Пусть L_1, L_2, L_3 – три листа поверхности в малой окрестности точки $y \in \Delta_3(f)$. Пусть $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ – три вектора ориентации вдоль ветвей кривой $\Delta_2(f)$ в точке y . Нумерацию ветвей и листов выберем согласованной, т.е. такой, что $\theta_i \perp L_i, i \in \{1, 2, 3\}$. Далее, для каждого i мы определим целое число $\text{sign}(i) = +1$, если θ_i сонаправлен вектору положительной нормали к L_i и $\text{sign}(i) = -1$, если не сонаправлен.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Скажем, что точка $y \in \Delta_3(f)$ является *точкой ти-*

на A , если тройка целых чисел $\text{sign}(i)$ (неупорядоченная) образует комбинацию $(+1, +1, -1)$ (разновидность A_+) или $(+1, -1, -1)$ (разновидность A_-). Скажем, что точка y есть *точка типа B* , если тройка чисел образует комбинацию $(+1, +1, +1)$ (разновидность B_+) или комбинацию $(-1, -1, -1)$ (разновидность B_-).

На основе определенных понятий сформулируем критерий.

КРИТЕРИЙ 1. *Отображение $f: M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ общего положения является прем-отображением тогда и только тогда, когда существует ориентация θ на кривой $\Delta_2(f)$, для которой все точки $\Delta_3(f)$ имеют тип A .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО КРИТЕРИЯ. Пусть $\bar{f}: M^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ такое отображение, что $\bar{f} \circ \pi = f$. Определим ориентацию θ на кривой $\Delta_2(f)$, которая будет называться канонической ориентацией, и докажем, что каждая точка $\Delta_3(f)$ имеет для этой ориентации тип A .

Пусть точка $x \in \Delta_2(f)$ не лежит в множествах $\Delta_3(f), \Sigma(f)$. Обозначим через $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$ прообразы $\pi^{-1}(x)$ точки x на поверхности $\bar{f}(M^2)$. Пронумеруем листы L_1 и L_2 поверхности $f(M^2)$ в окрестности точки x так, чтобы координаты x^1 и x^2 точек $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$ вдоль оси проекции π удовлетворяли соотношению $x^1 < x^2$. Пусть κ_1, κ_2 – векторы положительной нормали к листам L_1 и L_2 , восстановленные в точке x . Определим вектор ориентации $\theta(x)$, приложенный в точке x вдоль $\Delta_2(f)$ таким образом, что репер $(\theta(x), \kappa_1, \kappa_2)$ является правым репером в $\mathbb{R}^3$. Векторы $\theta(x)$, восстановленные в точках кривой $\Delta_2(f)$, определяют каноническую ориентацию на этой кривой.

Докажем, что для канонической ориентации каждая точка $y \in \Delta_3(f)$ есть точка типа A . Пусть $\{L_1, L_2, L_3\}$ – три листа поверхности $f(M^2)$ в окрестности y , $\{\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3\}$ – векторы положительной нормали к листам $\{L_1, L_2, L_3\}$ соответственно, $\{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$ – векторы ориентации вдоль каждой ветви кривой $\Delta_2(f)$ соответственно, восстановленные в точке y . Предположим, что репер $\{\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3\}$ ориентирован правосторонне (левосторонне) в пространстве $\mathbb{R}^3$. В этом случае векторы θ_1, θ_3 сонаправлены (противонаправлены) векторам κ_1, κ_3 соответственно. Вектор θ_2 противонаправлен (сонаправлен) вектору κ_2 , поскольку базис $\{\kappa_2, \kappa_1, \kappa_3\}$ – левый (правый), а базис $\{\theta_2, \kappa_1, \kappa_3\}$ – правый. Итак, мы доказали, что y есть точка типа A .

Докажем обратное. Пусть для некоторой ориентации θ на кривой $\Delta_2(f)$ все точки $\Delta_3(f)$ имеют тип A . Построим вложение $\bar{f}: M^2 \setminus W \rightarrow \mathbb{R}^4$, определенное на M всюду, за исключением окрестностей W_i , $W = \bigcup_i W_i$ точек поверхности $f(M^2)$, лежащих вблизи точек множества $\Delta_3(f) \cup \Sigma$. Вложение f выберем таким, что ориентация θ

будет являться канонической. Заметим, что если $y_i \in \Delta_3(f)$ – точка типа A , то вложение $\bar{f}$ можно продолжить внутрь W так, что прообразы $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3$ точки y_i , лежащие в $\mathbb{R}^4$ были различны. В окрестности точки $z_j \in \Sigma$ вложение $\bar{f}$ можно также продолжить внутрь W_j . Вложение $\bar{f}$ построено и критерий доказан.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Существует отображение $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ общего положения, которое не является ргем-отображением. В качестве f можно выбрать погружение, полученное малой C^∞ -деформацией, приводящей в общее положение композицию $f' = p \circ \psi: S^2 \xrightarrow{p} \mathbb{RP}^2 \xrightarrow{\psi} \mathbb{R}^3$, где ψ – погружение Боя проективной плоскости $\mathbb{RP}^2$, p – двулистное ориентирующее накрытие.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, (см., например, [3], [4]), что поверхность Боя $\psi(\mathbb{RP}^2)$ можно выбрать так, чтобы выполнялись следующие условия.

1. Кривая двукратных точек $\Delta_2(\psi)$ состоит из единственной компоненты.
2. Множество троекратных точек $\Delta_3(\psi)$ состоит из единственной точки.

При этом оказывается, что каноническое накрытие $\hat{\Delta}_2(\psi) \rightarrow \Delta_2(\psi)$ связно. C^∞ -малую деформацию $p \circ \psi \rightarrow \varphi$ отображения $p \circ \psi$ можно выбрать такой, что выполнены следующие условия.

1. Кривая $\Delta_2(\varphi)$ состоит из единственной компоненты связности, расположенной в малой окрестности U кривой $\Delta_2(\psi)$. При этом ортогональная проекция $\Delta_2(\varphi) \rightarrow \Delta_2(\psi)$, индуцированная проекцией погруженной окрестности U на кривую $\Delta_2(\psi)$ как на среднюю линию, является четырехлистным накрытием.

2. Множество $\Delta_3(\varphi)$ состоит из 8 точек, расположенных в малой окрестности V точки $\Delta_3(\psi)$.

В окрестности V расположено шесть листов поверхности $\varphi(S^2)$. Листы разбиты на три пары, параллельных между собой. Листы лежат на гранях куба с центром в $\Delta_3(\psi)$, при этом ветви кривой $\Delta_2(\varphi)$ лежат на ребрах этого куба, а точки $\Delta_3(\varphi)$ на его вершинах. При любом выборе ориентации θ на кривой $\Delta_2(\varphi)$ ветви, лежащие на четырех параллельных ребрах, будут ориентированы сонаправлено. Ориентация на каждой паре параллельных граней рассогласована. Из этого вытекает, что тип точки $\Delta_3(\varphi)$ не зависит от выбора ориентации θ . Две точки будут иметь тип B (при этом эти точки будут различных разновидностей), а остальные 6 точек будут иметь тип A . Применяя критерий 1, получаем, что f не является ргем-отображением. Предложение 2 доказано.

Сформулируем основной результат работы.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ – отображение общего положения, θ – произвольная ориентация на кривой $\Delta_2(f)$. Справедливо следующее равенство $\text{ord}(\mathcal{B}) = 0 \pmod{2}$, где $\text{ord}(\mathcal{B})$ – мощность множества тех точек $\Delta_3(f)$, которые имеют тип B .

Предложения 4, 5, 6 уточняют формулировку теоремы.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Существует погружение $\varphi: T^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ тора T^2 , называемое погружением Константиноа, и ориентация θ на кривой $\Delta_2(\varphi)$, для которой в множестве $\Delta_3(\varphi)$ ровно одна точка типа B .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Конструкция погружения и описание типов троечных точек имеется в [4].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Существует отображение $g: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ общего положения и ориентация θ на кривой $\Delta_2(g)$ такие, что множество $\Delta_2(g)$ состоит ровно из двух точек, каждая из которых имеет тип B и разновидность B_+ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Пусть $f: M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ – погружение общего положения ориентированной поверхности. Для любого выбора θ , утроенное алгебраическое число точек $\Delta_3(f)$ типа A (знак точки выбирается в соответствии с ее разновидностью) совпадает с алгебраическим числом точек типа B .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственно вытекает из результатов [4].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Пусть $f: M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ – отображение общего положения, θ – ориентация на $\Delta_2(f)$. Обозначим через $\mathcal{B}$ множество точек $\Delta_3(f)$ типа B , и через $\{y_{1,i}, y_{2,i}, y_{3,i}\} \in M^2$ – прообразы точки $y_i \in \mathcal{B}$. Отображение $\bar{f}, \bar{f} \circ \pi = f$, построенное по θ , является вложением всюду, за исключением малых окрестностей точек $\{y_{1,i}, y_{2,i}, y_{3,i}\}$. Обозначим через $\bar{U}_i$ маленький четырехмерный шар с центром в $\bar{y}_i = \bar{f}(y_{j,i})$, $j = \{1, 2, 3\}$. Пусть $\bar{S}_i$ – его граница, гомеоморфная трехмерной сфере, $\bar{\Pi}_i = \{\bar{\Pi}_{1,i}, \bar{\Pi}_{2,i}, \bar{\Pi}_{3,i}\} = \bar{f}(M^2) \cap \bar{S}_i$ – зацепление, полученное в результате пересечения $\bar{S}_i$ с поверхностью $\bar{f}(M^2)$. Зацепление $\bar{\Pi}_i$ имеет три компоненты, которые расположены в $\bar{S}_i$ в виде “колец Борромео”. Если S_i – маленькая сфера, окружающая y_i , то кривая $\Pi_i = S_i \cap f(M^2)$ представляет собой три взаимно перпендикулярные окружности больших кругов на S_i . Окрестность экватора в сфере $\bar{S}_i$ естественно отождествляется с многообразием $S_i \times I$, при этом проекция π в малой окрестности экватора проектирует $S_i \times I$ на S_i вдоль I . Зацепление $\bar{\Pi}_i$ получено из кривой $\Pi_i \subset S_i \subset \bar{S}_i$ малой деформацией в окрестностях точек самопересечения

кривой Π_i . Деформация $\Pi_i \rightarrow \bar{\Pi}_i$ разрешает особенности двойного самопересечения так, что при обходе любой компоненты зацепления $\bar{\Pi}_i$, проходы и переходы на проекции Π_i значения $\bar{\Pi}_i$ чередуются. Такое зацепление и является “кольцами Борромео”.

Рассмотрим объединение $\bar{U} = \bigcup_i \bar{U}_i$ всех окрестностей $\bar{U}_i$, образуем многообразие $\mathbb{R}^4 \setminus \bar{U}$ и компактифицируем его точкой pt на бесконечности. Полученное многообразие обозначим через K . Рассмотрим компоненту $\bar{S}_i \subset \partial K$ на границе этого многообразия и рассмотрим трубчатые окрестности $W_{1,i}, W_{2,i}, W_{3,i}$ компонент зацепления $\bar{\Pi}_i$, лежащего в $\bar{S}_i$. Выберем тривиализации $\mathcal{A}_{j,i}$, $j = \{1, 2, 3\}$, этих окрестностей, заданные оснащениями вдоль компонент $\bar{\Pi}_{j,i}$ с коэффициентами $+1$ или -1 . Выбор коэффициентов оснащения для компонент, лежащих в одной сфере $\bar{S}_i$, одинаков и производится в соответствии с разновидностью точки y_i . Для точек разновидности B_+ (B_-) мы выбираем оснащение $+1$ (-1) соответственно. Рассмотрим внешнюю перестройку многообразия K по каждой компоненте $\bar{S}_i$ границы, приклеив ручки $\mathcal{D}_{j,i}^2 \times \mathcal{D}^2$ индекса 2 к каждой кривой $\bar{\Pi}_{j,i}$ в соответствии с тривиализациями $\mathcal{A}_{j,i}$. В результате описанной перестройки получим многообразие K' , край которого $\partial K'$ состоит из компонент Σ_i , полученных перестройками компонент $\bar{S}_i$. Каждая компонента Σ_i представляет собой гомологическую сферу Пуанкаре, при этом точкам y_i с одинаковыми разновидностями соответствуют изоморфные гомологические сферы Σ_i , а точкам с разными разновидностями соответствуют зеркальные гомологические сферы (т.е. диффеоморфные после обращения ориентации на одной из них). В соответствии с разновидностями точек y мы будем обозначать компоненты $\partial K'$ через $\Sigma_{+,i}$ и $\Sigma_{-,i}$. При этом $\partial K'_+ = \bigcup_i \Sigma_{+,i}$, $\partial K'_- = \bigcup_i \Sigma_{-,i}$.

Заметим, что поверхность M^2 вкладывается в K' , при этом вложение в окрестностях точек $y_{j,i}$ продолжается вдоль образующей ручки $\mathcal{D}_{j,i}^2 \times \mathcal{D}^2$. Это вложение мы обозначим через $\bar{f}': M^2 \rightarrow K'$. Заклеим каждую компоненту границы $\partial K'$ стандартным четырехмерным многообразием $\mathcal{E}_i$, которое реализует форму $E8_\oplus$ или $E8_\ominus$ на двумерном модуле гомологий $H_2(\mathcal{E}_i; \mathbb{Z})$ с заданной операцией пересечения циклов в смысле Пуанкаре. Через $E8_\oplus$ обозначена форма Коркина–Золотарёва сигнатуры 8, форма $E8_\ominus$ получается из $E8_\oplus$ после умножения на -1 . Выбор формы производится в зависимости от того, какой части $\partial K'_+$ или $\partial K'_-$ принадлежит выбранная компонента. Как это сделать, объяснено в [8], [9]. В результате получим замкнутое гладкое многообразие, которое мы обозначим через $\mathcal{K}$. По построению $H_1(\mathcal{K}; \mathbb{Z}) = 0$. Рассмотрим группу гомологий $H = H_2(\mathcal{K}; \mathbb{Z})$. На этой группе, рассматриваемой как свободный $\mathbb{Z}$ -модуль, определена невырожденная симметрическая билинейная форма. Эта форма представляется в виде прямой сум-

мы $H = E \oplus R_+ \oplus R_-$, где $E = p_1(E8_{\oplus}) \oplus p_2(E8_{\ominus})$, $R_+ = 3p_1(+1)$, $R_- = 3p_2(-1)$; p_1 и p_2 – количества компонент Σ_+ и Σ_- соответственно. Здесь $(+1)$ и (-1) – формы на одномерных модулях, заданные скалярными матрицами. Каждая форма $(+1)$ соответствует ручке $\mathcal{D}_{j,i}^2 \times \mathcal{D}^2$, приклеенной к компоненте Σ_+ . Аналогичное соответствие имеем для (-1) . Образующие этих модулей мы обозначим через $x_{j,i}^+$ и $x_{j,i}^-$ в соответствии с номером и оснащением ручки. Цикл $x_{j,i}$ реализуется в $\mathcal{K}$ вложенным тором, который не пересекается ни с какой ручкой $\mathcal{D}_{i',j'}^2 \times \mathcal{D}^2$, если $i \neq i'$ или $j \neq j'$. Заметим, что $\bar{f}'(M^2)$ является характеристической поверхностью многообразия $\mathcal{K}$. В самом деле, $\bar{f}'(M^2)$ представляет класс гомологий $\alpha = \sum_{j,i} x_{j,i} \in H$. Следовательно, $\langle \alpha; y \rangle = \langle y; y \rangle \pmod{2}$ для любого $y \in H$. Сигнатура $\sigma(\mathcal{K})$ многообразия $\mathcal{K}$ равна $8(p_1 - p_2) + 3(p_1 - p_2)$. Индекс самопересечения $\langle \alpha; \alpha \rangle$ класса α равен $3(p_1 - p_2)$. Согласно теореме Рохлина о сигнатуре (см. [6]–[9]) имеем

$$\text{Arf}(\bar{f}') = \frac{1}{8}[\sigma(\mathcal{K}) - \langle \alpha; \alpha \rangle] \pmod{2},$$

где $\text{Arf}(\bar{f}')$ – Арф-инвариант квадратичной формы, определенной на модуле $H_1(M^2; \mathbb{Z}/2)$ гомологий характеристической поверхности. При $M^2 = S^2$ имеем $H_1(M^2; \mathbb{Z}/2) = 0$ и, следовательно, $[\sigma(\mathcal{K})] = \langle \alpha; \alpha \rangle \pmod{16}$. Подставляя значения $\sigma(\mathcal{K})$ и $\langle \alpha; \alpha \rangle$ в эту формулу, получаем $p_1 = p_2 \pmod{2}$. Теорема 3 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 5. Пусть $\bar{\Pi} \subset \mathbb{R}^3$ – зацепление “кольца Борромео”. Рассмотрим однопараметрическое семейство вращений r_t пространства вокруг оси l такое, что $r_0 = \text{id}$, $r_1 = S$ – симметрия относительно l . Расположим l и $\bar{\Pi}$ таким образом, что $r_1(\bar{\Pi}) = \bar{\Pi}$, но при этом ориентация на каждой компоненте $\bar{\Pi}$ и $r_1(\bar{\Pi})$ различаются. Семейство r_t задает вложение $\bar{\Phi} : \bar{\Pi} \times I \subset \mathbb{R}^3 \times I$. Продолжим $\bar{\Phi}$ до отображения $\bar{\Phi}'$ замкнутой поверхности. Заклеим компоненты $r_0(\bar{\Pi}) \subset \mathbb{R}^3 \times \{0\}$ и $r_1(\bar{\Pi}) \subset \mathbb{R}^3 \times \{1\}$ шестью дисками $\Phi'(\mathcal{D}_0 \cup \mathcal{D}_1)$, лежащими в полупространствах $\mathbb{R}^3 \times]-\infty; 0]$ и $\mathbb{R}^3 \times [1; +\infty[$ соответственно. Диски $\Phi'(\mathcal{D}_i)$, $i = \{1, 2\}$, выберем вложенными и непересекающимися, за исключением точек $\bar{y}_0 \in \mathbb{R}^3 \times]-\infty; 0[$, $\bar{y}_1 \in \mathbb{R}^3 \times]1; +\infty[$, в которых эти диски попарно нетрансверсально пересекаются. Отображение Φ' представляет собой отображение замкнутой поверхности N^2 , диффеоморфной $S^2 \times S^2 \times S^2$.

Рассмотрим проекцию $\Phi' = \bar{\Phi}' \circ \pi$, $\Phi' : N^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Множество $\mathcal{B} \subset \Delta_3(\Phi')$ троекратных точек, имеющих тип B , состоит ровно из двух точек $y_0 = \pi(\bar{y}_0)$ и $y_1 = \pi(\bar{y}_1)$. Легко видеть, что разновидности этих точек совпадают, и, при соответствующем выборе $\bar{\Pi}$, обе точки имеют разновидность B_+ . Искомая поверхность $f(S^2)$ получается перестройкой

поверхности $\Phi'(N^2)$ вдоль двух ручек индекса 1, при которой поверхность становится связной. При такой перестройке дополнительных точек $\Delta_3(f)$ не появляется. Предложение доказано.

Я благодарю А. Сюча, который сообщил мне о существовании канонической операции $\mathcal{O}$ на кривой двукратных точек prem -отображения ориентированной поверхности в пространство $\mathbb{R}^3$.

ИЗМИРАН

Поступило

13.09.94

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Szucs A. On the cobordism groups of immersions and embeddings // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 1991. V. 109. P. 343–349.
- [2] Szucs A. Cobordism groups of immersions of oriented manifolds // Acta Math. Hung. 1994. V. 64. № 2. P. 191–230.
- [3] Morin B., Petit J. P. Priblematique du retournement de la sphere // C. R. Acad. Sci. Paris. 1978. V. 287. P. 767–770.
- [4] Ахметьев П. М. Гладкие погружения многообразий малых размерностей // Матем. сб. 1994. Т. 185. № 10. С. 3–26.
- [5] Banchoff T. Triple points and singularities of projections of immersed surfaces // Proc. Amer. Math. Soc. 1974. V. 46. P. 402–406.
- [6] Рохлин В. А. Доказательство гипотезы Гудкова // Функцион. анализ и его прилож. 1972. Т. 6. № 2. С. 62–64.
- [7] Guillou L., Marin A. (ed.) A la recherche de la Topologie perdue. Progress in Mathematics. V. 62: Birkhauser, 1986; Русский перевод. М.: Мир, 1986.
- [8] Kirby R. The topology of 4-manifolds. Lect. Notes in Math. V. 1374. New York, Berlin: Springer Verlag, 1989.
- [9] Mandelbaum R. Four-dimentional topology: The University of Rochester, 1978; Русский перевод. М.: Мир, 1981.