Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. И. Ивченко, К сравнению схем повторного и бесповторного выбора, *Матем. заметки*, 2003, том 73, выпуск 2, 195–205

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm178>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 05:48:47

УДК 519.2

К СРАВНЕНИЮ СХЕМ ПОВТОРНОГО И БЕСПОВТОРНОГО ВЫБОРА

Г. И. Ивченко

Имеется урна с шарами N различных цветов, каждый из которых представлен a шарами. Из урны последовательно и равновероятно извлекается по одному шару, при этом каждый раз вынутый шар а) возвращается в урну (повторный выбор) или б) не возвращается (бесповторный выбор). Процесс извлечения шаров продолжается до тех пор, пока k некоторых цветов впервые будут зафиксированы не менее t раз каждый. Наблюдаемыми статистиками являются величины μ_r – количество цветов, представленных в момент остановки ровно r раз каждый, $r = 1, 2, \dots$. Исследуется асимптотическое при $N \rightarrow \infty$ поведение этих величин для каждой модели выбора и обсуждается проблема их использования для идентификации модели.

Библиография: 9 названий.

1. Введение. Пусть имеется урна с шарами N различных цветов, при этом число шаров каждого цвета в начальный момент равно a , так что всего в урне первоначально имеется Na шаров. Далее начинается процесс последовательного и равновероятного извлечения шаров из урны либо по схеме выбора с возвращением (повторный выбор), либо по схеме выбора без возвращения (бесповторный выбор). В первом случае извлеченный шар после фиксации его цвета возвращается обратно в урну, т.е. ее состав остается неизменным, и процесс извлечения может продолжаться неограниченно долго. Во втором случае шар в урну не возвращается, т.е. ее состав каждый раз изменяется (уменьшается на единицу), и процесс извлечения может длиться максимум Na шагов из-за исчерпания урны. Зададим случайный момент остановки испытаний (извлечения шаров) следующим образом: процесс извлечения шаров продолжается до тех пор, пока k некоторых цветов впервые появятся по крайней мере t раз каждый. Здесь k , $1 \leq k \leq N$, и $t \geq 1$ – управляемые параметры момента остановки; при этом в случае бесповторного выбора должно выполняться естественное ограничение $t \leq a$ (больше, чем a раз, никакой цвет не может наблюдаться), а при $k = N$, $t = a$ потребуются извлечь все Na шаров. Во всех же остальных вариантах задания параметров k и t до момента остановки потребуются произвести некоторое случайное число испытаний, которое мы будем обозначать далее $\nu_m^{(0)}(N, k)$ для модели повторного и $\nu_m^{(-)}(N, k)$ для модели бесповторного выбора. Вообще, условимся в последующем снабжать все характеристики для модели повторного выбора индексом (0) , а для модели бесповторного выбора индексом $(-)$.

Обозначим, далее, $\mu_r^{(\cdot)} = \mu_r^{(\cdot)}(N, k, a, t)$ (здесь и в дальнейшем $(\cdot)$ либо 0 , либо $(-)$ в соответствии со сказанным выше) число цветов в выборке, зафиксированных ровно r раз каждый, $r = 1, 2, \dots$. В наборе статистик $\bar{\mu}^{(\cdot)} = \{\mu_r^{(\cdot)}, r \geq 1\}$ заключена

вся информация о модели, и нашей задачей будет исследование их асимптотического (при $N \rightarrow \infty$) поведения и использование этой информации для идентификации модели. Отметим, что в модели бесповторного выбора набор $\bar{\mu}^{(-)}$ имеет фиксированную размерность a : $\bar{\mu}^{(-)} = (\mu_1^{(-)}, \dots, \mu_a^{(-)})$, так как ни один из цветов не может повториться в выборке более a раз, в то время как в модели повторного выбора возможно в принципе сколь угодно большое число повторений в выборке каждого из цветов, и, следовательно, соответствующий набор $\bar{\mu}^{(0)}$ не имеет фиксированной размерности: ее величина $\kappa_N^{(0)} = \max\{r : \mu_r^{(0)} > 0\}$ случайна. Подчеркнем также, что время ожидания до момента остановки является линейной функцией от статистик $\mu_r^{(\cdot)}$: $\nu_m^{(\cdot)}(N, k) = \sum_r r \mu_r^{(\cdot)}$, и представляет собой одну из важнейших характеристик модели, которой в литературе по дискретным вероятностным задачам традиционно уделяется большое внимание (см. [1] и библиографию в ней).

Литература, посвященная обсуждаемой проблематике, весьма обширна. Вместе с тем, большинство соответствующих публикаций относятся к модели повторного выбора (см. обзор [2] и [3]), и лишь в последнее время были предложены общие методы исследования подобных задач, охватывающие и другие модели выбора, включая, в частности, и бесповторный выбор (см. [1], [4]–[6]). В цитируемых работах развит аппарат предельных теорем для так называемых разделимых статистик, т.е. функций аддитивного вида от наблюдаемых частот исходов, частными случаями которых являются статистики μ_r и $\nu_m(N, k)$. Основываясь на этих результатах и конкретизируя их в обсуждаемых аспектах, мы получаем здесь новые предельные теоремы, позволяющие под новым углом зрения провести сравнительный асимптотический анализ двух классических моделей случайного выбора из конечной совокупности.

Дальнейшая организация работы следующая. В п. 2 приводятся формулировки предельных теорем для статистик $\bar{\mu}^{(\cdot)}$ и $\nu_m^{(\cdot)}(N, k)$ в обеих моделях выбора, п. 3 посвящен обсуждению проблемы идентификации модели с использованием этих результатов; наконец, в п. 4 кратко излагается метод асимптотического анализа распределений рассматриваемых статистик.

2. Предельные теоремы. В дальнейшем предполагается, что число цветов $N \rightarrow \infty$, параметр k момента остановки является функцией от N : $k = k(N)$ и изменяется тем или иным образом, а остальные параметры a и m фиксированы. Решающим фактором при этом является характер асимптотического поведения параметра k , что конкретизируется выделением трех областей его изменения:

- 1) k фиксировано, $k \geq 1$ (левая область);
- 2) $s = N - k + 1$ фиксировано, $s \geq 1$ (правая область);
- 3) $k = \lambda N + o(\sqrt{N})$, $\lambda \in (0, 1)$ (средняя область).

Соответственно этой классификации получаются три типа предельных теорем для рассматриваемых статистик. Прежде чем формулировать эти теоремы, условимся о некоторых стандартных обозначениях.

Символом $\mathcal{L}(\xi)$ будем обозначать закон распределения случайной величины ξ ; будем обозначать через $\text{Bi}(n, p)$ биномиальный закон распределения с параметрами n и p , задаваемый вероятностями

$$b_r(n, p) = \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r}, \quad r = 0, 1, \dots, n, \quad p \in (0, 1),$$

и через $\Pi(t)$ пуассоновский закон распределения, задаваемый вероятностями

$$\pi_r(t) = e^{-t} \frac{t^r}{r!}, \quad r = 0, 1, 2, \dots, \quad t > 0.$$

Пусть, далее,

$$\beta(x; k, N - k + 1) = N \binom{N-1}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{N-k}, \quad x \in [0, 1],$$

есть бета-плотность, а

$$B(z; k, N - k + 1) = \int_0^z \beta(x; k, N - k + 1) dx, \quad z \in [0, 1],$$

– соответствующая функция распределения; через X_r ниже обозначается случайная величина, имеющая гамма-распределение с плотностью $\pi_{r-1}(x)$, $x \geq 0$, и

$$\Gamma_r(t) = \int_0^t \pi_{r-1}(x) dx, \quad t \geq 0,$$

– ее функция распределения.

Наконец, $\mathbb{I}(A)$ обозначает индикатор события A (случайного или неслучайного), т.е. $\mathbb{I}(A) = 1$, если A имеет место, и $\mathbb{I}(A) = 0$ в противном случае.

Асимптотическое поведение статистик $\bar{\mu}^{(\cdot)}$ и $\nu_m^{(\cdot)}(N, k)$ в левой области изменения параметра k описывается следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $N \rightarrow \infty$, а $k \geq 1$ фиксировано. Тогда при $m = 1$ для обеих моделей имеют место сходимости

$$\mu_1^{(\cdot)} \xrightarrow{P} k, \quad \mu_r^{(\cdot)} \xrightarrow{P} 0, \quad r > 1. \quad (1)$$

Если же $m > 1$ (и $m \leq a$ для бесповторного выбора), то

$$\mu_m^{(\cdot)} \xrightarrow{P} k, \quad \mu_r^{(\cdot)} \xrightarrow{P} 0, \quad r > m, \quad (2)$$

а совместное распределение величин $\mu_1^{(\cdot)}, \dots, \mu_{m-1}^{(\cdot)}$ удовлетворяет следующим предельным соотношениям:

$$\mathcal{L}\left(\frac{\mu_r^{(\cdot)}}{c_{r,N}^{(\cdot)}}, r = 1, \dots, m-1\right) \rightarrow \mathcal{L}(X_k^{r/m}, r = 1, \dots, m-1), \quad (3)$$

где

$$c_{r,N}^{(0)} = \frac{(m!)^{r/m}}{r!} N^{1-r/m}, \quad c_{r,N}^{(-)} = \binom{a}{r} \binom{a}{m}^{-r/m} N^{1-r/m}.$$

Время ожидания $\nu_m^{(\cdot)}(N, k)$ асимптотически имеет такое же распределение, как и $\mu_1^{(\cdot)}$, т.е. $\nu_1^{(\cdot)}(N, k) \xrightarrow{P} k$, а при $m > 1$

$$\mathcal{L}\left(\frac{\nu_m^{(\cdot)}(N, k)}{c_{1,N}^{(\cdot)}}\right) \rightarrow \mathcal{L}(X_k^{1/m}). \quad (4)$$

СЛЕДСТВИЕ. Величина $\kappa_N^{(\cdot)} = \max\{r : \mu_r^{(\cdot)} > 0\}$ в пределе вырождается в точке m : $\kappa_N^{(\cdot)} \xrightarrow{P} m$.

Для правой области значений параметра k имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $N \rightarrow \infty$, а $s = N - k + 1 \geq 1$ фиксировано. Тогда

$$\mu_r^{(\cdot)} \xrightarrow{P} 0, \quad r < m - 1, \quad \mu_{m-1}^{(\cdot)} \xrightarrow{P} s - 1, \quad (5)$$

а совместное распределение любого конечного числа величин $\mu_r^{(\cdot)}$, $r \geq m$, удовлетворяет следующим предельным соотношениям:

$$\mathcal{L}\left(\frac{\mu_r^{(0)}}{d_{r,N}^{(0)}}, r = m, \dots, M\right) \rightarrow \mathcal{L}(X_s, \dots, X_s), \quad (6)$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{\mu_r^{(-)}}{d_{r,N}^{(-)}}, r = m, \dots, a\right) \rightarrow \mathcal{L}(X_s^{(a-r)/(a-m+1)}, r = m, \dots, a), \quad (7)$$

где

$$d_{r,N}^{(0)} = \frac{(m-1)!}{r!} (\ln N)^{r-m+1},$$

$$d_{r,N}^{(-)} = \binom{a}{r} \binom{a}{m-1}^{(r-a)/(a-m+1)} N^{(r-m+1)/(a-m+1)}.$$

Для времени ожидания в модели повторного выбора справедливо соотношение

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{N} \nu_m^{(0)}(N, k) - \ln N - (m-1) \ln \ln N + \ln(m-1)!\right) \rightarrow \mathcal{L}(-\ln X_s), \quad (8)$$

в модели же бесповторного выбора при $m = a$ разность

$$Na - \nu_a^{(-)}(N, k) \xrightarrow{P} s - 1,$$

а при $m < a$

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{a} \binom{a}{m-1}^{1/(a-m+1)} N^{(m-a)/(a-m+1)} (Na - \nu_m^{(-)}(N, k))\right) \rightarrow \mathcal{L}(X_s^{1/(a-m+1)}). \quad (9)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Для величины $\kappa_N^{(\cdot)}$ имеем $\kappa_N^{(-)} \xrightarrow{P} a$, в случае же повторного выбора известен следующий результат [3]:

$$P\{\kappa_N^{(0)} - A_N \leq j\} = \int_0^\infty \exp\left\{-\frac{e^{\varepsilon_N - j}}{c(m)x^{e-1}}\right\} \pi_{s-1}(x) dx + o(1), \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (10)$$

где $c(m) = ((m-1)!)^{e-1}(e-1)\sqrt{2\pi e}$, а A_N и ε_N – целая и дробная части числа

$$e \ln N + \left((m-1)(e-1) - \frac{1}{2}\right) \ln \ln N$$

соответственно.

Для зоны средних значений k характерна асимптотическая нормальность величин $\mu_r^{(\cdot)}$ и их линейных комбинаций, в частности, времени ожидания $\nu_m^{(\cdot)}(N, k) = \sum_r r \mu_r^{(\cdot)}$. Для формулировки соответствующих утверждений нам понадобятся дополнительные обозначения.

Ниже через $t_m(\lambda)$ обозначается λ -квантиль функции гамма-распределения $\Gamma_m(t)$, т.е. корень уравнения $\Gamma_m(t) = \lambda$; аналогично, $z_{m,a}(\lambda)$ есть λ -квантиль функции бета-распределения $B(z; m, a - m + 1)$: $B(z_{m,a}(\lambda); m, a - m + 1) \equiv \lambda$, $\lambda \in (0, 1)$. Введем также случайные величины $\xi_\lambda^{(\cdot)}$ с распределениями

$$\mathcal{L}(\xi_\lambda^{(0)}) = \Pi(t_m(\lambda)), \quad \mathcal{L}(\xi_\lambda^{(-)}) = \text{Bi}(a, z_{m,a}(\lambda))$$

и положим

$$p_r^{(\cdot)}(\lambda) = P\{\xi_\lambda^{(\cdot)} = r\} = \begin{cases} \pi_r(t_m(\lambda)) & \text{для } (\cdot) = (0), \\ b_r(a, z_{m,a}(\lambda)) & \text{для } (\cdot) = (-). \end{cases} \quad (11)$$

Тогда справедлива

ТЕОРЕМА 3. Если $N, k \rightarrow \infty$ так, что $k = \lambda N + o(\sqrt{N})$, $\lambda = 1 - \bar{\lambda} \in (0, 1)$, то совместное распределение любого конечного набора величин $\mu_r^{(\cdot)}$ асимптотически нормально со средними $E \mu_r^{(\cdot)} \sim N p_r^{(\cdot)}(\lambda)$ и вторыми моментами $\text{cov}(\mu_r^{(\cdot)}, \mu_s^{(\cdot)}) \sim N \sigma_{rs}^{(\cdot)}(\lambda)$, где

$$\begin{aligned} \sigma_{rs}^{(0)}(\lambda) &= p_r^{(0)}(\lambda) (\mathbb{I}(r = s) - p_s^{(0)}(\lambda)) \\ &\quad + p_r^{(0)}(\lambda) p_s^{(0)}(\lambda) \left\{ \lambda \bar{\lambda} \left(\frac{t'_m(\lambda)}{t_m(\lambda)} \right)^2 (r - t_m(\lambda))(s - t_m(\lambda)) \right. \\ &\quad \left. - \frac{t'_m(\lambda)}{t_m(\lambda)} \left[(r - t_m(\lambda)) (\mathbb{I}(s \geq m) - \lambda) + (s - t_m(\lambda)) (\mathbb{I}(r \geq m) - \lambda) \right] \right\}, \\ \sigma_{rs}^{(-)}(\lambda) &= p_r^{(-)}(\lambda) (\mathbb{I}(r = s) - p_s^{(-)}(\lambda)) \\ &\quad + p_r^{(-)}(\lambda) p_s^{(-)}(\lambda) \left\{ \lambda \bar{\lambda} \left(\frac{z'_{m,a}(\lambda)}{z_{m,a}(\lambda)(1 - z_{m,a}(\lambda))} \right)^2 (r - az_{m,a}(\lambda))(s - az_{m,a}(\lambda)) \right. \\ &\quad \left. - \frac{z'_{m,a}(\lambda)}{z_{m,a}(\lambda)(1 - z_{m,a}(\lambda))} \left[(r - az_{m,a}(\lambda)) (\mathbb{I}(s \geq m) - \lambda) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (s - az_{m,a}(\lambda)) (\mathbb{I}(r \geq m) - \lambda) \right] \right\}, \end{aligned}$$

а время ожидания $\nu_m^{(\cdot)}(N, k)$ асимптотически нормально со средним

$$E\nu_m^{(\cdot)}(N, k) \sim NE\xi_\lambda^{(\cdot)} = \begin{cases} Nt_m(\lambda) & \text{для } (\cdot) = (0), \\ Naz_{m,a}(\lambda) & \text{для } (\cdot) = (-), \end{cases} \quad (12)$$

и дисперсией $D\nu_m^{(\cdot)}(N, k) \sim N\sigma^{(\cdot)^2}(\lambda)$, где

$$\begin{aligned} \sigma^{(0)^2}(\lambda) &= \lambda \bar{\lambda} (t'_m(\lambda))^2 - t_m(\lambda), \\ \sigma^{(-)^2}(\lambda) &= \lambda \bar{\lambda} a^2 (z'_{m,a}(\lambda))^2 - az_{m,a}(\lambda)(1 - z_{m,a}(\lambda)). \end{aligned} \quad (13)$$

Приведем также для иллюстрации краткие таблицы значений квантильных функций $t_m(\lambda)$ и $z_{m,a}(\lambda)$, которые можно извлечь из сборника статистических таблиц [7].

ТАБЛИЦА 1. Значения $z_{m,a}(0.1)$ и $t_m(0.1)$

1	2	3	4	5	6	m/a
0.100						1
0.051	0.316					2
0.035	0.196	0.464				3
0.026	0.143	0.320	0.562			4
0.021	0.112	0.247	0.416	0.631		5
0.017	0.093	0.201	0.333	0.490	0.681	6
0.106	0.532	1.102	1.745	2.433	3.152	$t_m(0.1)$

ТАБЛИЦА 2. Значения $z_{m,a}(0.5)$ и $t_m(0.5)$

1	2	3	4	5	6	m/a
0.500						1
0.293	0.707					2
0.206	0.500	0.794				3
0.159	0.386	0.614	0.841			4
0.129	0.314	0.500	0.686	0.871		5
0.109	0.264	0.421	0.579	0.736	0.891	6
0.693	1.678	2.674	3.672	4.671	5.670	$t_m(0.5)$

ТАБЛИЦА 3. Значения $z_{m,a}(0.9)$ и $t_m(0.9)$

1	2	3	4	5	6	m/a
0.900						1
0.684	0.949					2
0.536	0.804	0.965				3
0.438	0.680	0.857	0.974			4
0.369	0.584	0.753	0.888	0.979		5
0.319	0.510	0.667	0.799	0.907	0.983	6
2.302	3.889	5.323	6.681	7.994	9.275	$t_m(0.9)$

3. Об идентификации модели. В этом пункте мы обсудим вопрос о возможности идентификации модели выбора, основываясь на изложенных выше результатах. В статистической терминологии речь идет о различении гипотез $H^{(0)}$ и $H^{(-)}$, означающих соответственно, что выбор осуществлялся по схеме повторной и бесповторной выборки. Прежде всего отметим, что при гипотезе $H^{(0)}$ параметр a никак не сказывается на распределении статистик μ_r и $\nu_m(N, k)$; это является отражением того факта, что вероятность появления каждого из цветов в любом испытании равна $a/Na = 1/N$, т.е. не зависит от a . Тем самым, если требуется сделать те или иные статистические заключения о составе совокупности (о параметре a), то это в принципе невозможно при повторном выборе, и соответствующий статистический эксперимент следует организовать с использованием механизма бесповторного выбора.

Обратимся теперь к конкретным ситуациям, характеризующим значениями параметров k и m , считая, что N велико.

1) Если $k \geq 1$ фиксировано, а $m = 1$, то между двумя моделями выбора фактически никакой разницы наблюдаться не будет: в обоих случаях с вероятностью, близкой к 1, потребуется произвести всего лишь k испытаний, и при этом в них будут зафиксированы k различных цветов (см. (1)), т.е. для различения гипотез $H^{(0)}$ и $H^{(-)}$ информации в данном случае недостаточно. Если же при фиксированном k параметр $m > 1$, то, как следует из (3), статистики μ_r , $r = 1, \dots, m - 1$, будут вести себя асимптотически по-разному в зависимости от того, какая из гипотез $H^{(0)}$ или $H^{(-)}$ истинна, т.е. эти статистики, а также статистика $\nu_m(N, k)$ (см. (4)), могут быть использованы в качестве тестовых статистик для различения этих гипотез. При этом наиболее информативной является, очевидно, статистика μ_1 , либо асимптотически эквивалентная ей статистика $\nu_m(N, k)$, поэтому, основываясь на соотношении (4), можно предложить следующий статистический критерий для различения гипотез $H^{(0)}$ и $H^{(-)}$: если наблюдается событие $\{\nu_m(N, k) \leq c_{1,N}^{(0)} t_\alpha\}$, то принимается гипотеза $H^{(0)}$, в противном случае принимается гипотеза $H^{(-)}$. Если здесь t_α задать так, чтобы выполнялось условие

$$\Gamma_k(t_\alpha^m) = 1 - \alpha, \quad \alpha \in (0, 1),$$

то вероятность ошибки первого рода (отклонить $H^{(0)}$, когда она верна) будет удовлетворять в силу (4) соотношениям

$$P^{(0)}\{\nu_m(N, k) > c_{1,N}^{(0)} t_\alpha\} \rightarrow P\{X_k^{1/m} > t_\alpha\} = 1 - \Gamma_k(t_\alpha^m) = \alpha. \quad (14)$$

Вероятность же ошибки второго рода (принять $H^{(0)}$, когда истинной является гипотеза $H^{(-)}$) при этом такова:

$$P^{(-)}\{\nu_m(N, k) \leq c_{1,N}^{(0)} t_\alpha\} = P^{(-)}\left\{\frac{\nu_m(N, k)}{c_{1,N}^{(-)}} \leq \frac{(a)^{1/m}}{a} t_\alpha\right\} \rightarrow \Gamma_k\left(\frac{(a)_m}{a^m} t_\alpha^m\right) < 1 - \alpha, \quad (15)$$

т.е. критерий является несмещенным (здесь $(a)_m = a(a-1) \cdots (a-m+1)$).

Итак, при фиксированном k и $m > 1$ существует критерий, основанный на времени ожидания $\nu_m(N, k)$, позволяющий различать гипотезы $H^{(0)}$ и $H^{(-)}$ с ошибками, указанными в (14), (15). Отметим также, что с увеличением уровня m предельная ошибка

в (15) убывает, в то время как с ростом параметра a она возрастает (различение гипотез затрудняется).

2) Обсудим аналогично второй крайний случай, когда параметр k принимает значения, близкие к N . Теперь мы основываемся на теореме 2, из которой следует, что информативными статистиками являются здесь величины μ_r при $r \geq m$ и время ожидания $\nu_m(N, k)$. При этом наиболее рельефно различие между моделями проявляется в характере асимптотического поведения последней статистики: если при гипотезе $H^{(0)}$ время ожидания растет как $N \ln N$, то в случае бесповторного выбора оно имеет порядок Na . Поэтому данная статистика вполне идентифицирует модель, а соответствующее правило принятия решения может быть сформулировано, например, следующим образом: если $\nu_m(N, k) > N(\ln N - \ln \ln N)$, то принимается гипотеза $H^{(0)}$, в противном случае принимается гипотеза $H^{(-)}$. Вероятности ошибок первого и второго рода такого правила удовлетворяют в силу (8), (9) соотношениям

$$\begin{aligned} P^{(0)}\{\nu_m(N, k) \leq N(\ln N - \ln \ln N)\} \\ = P^{(0)}\left\{\frac{1}{N}\nu_m(N, k) - \ln N - (m-1)\ln \ln N + \ln(m-1)! \right. \\ \left. \leq -m \ln \ln N + \ln(m-1)!\right\} \rightarrow 0, \\ P^{(-)}\{\nu_m(N, k) > N(\ln N - \ln \ln N)\} \\ = P^{(-)}\{N^{(m-a)/(a-m+1)}(Na - \nu_m(N, k)) \\ < N^{(m-a)/(a-m+1)}(Na - N(\ln N - \ln \ln N))\} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Таким образом, этот критерий позволяет асимптотически достоверно различать гипотезы $H^{(0)}$ и $H^{(-)}$.

Аналогичные тесты можно построить и на основании статистик μ_r , $r \geq m$. Отметим также, что статистика κ_N – максимальная частота повторения цветов в выборке – в модели бесповторного выбора при рассматриваемых условиях асимптотически достоверно идентифицирует параметр a . В модели же повторного выбора она неограниченно растет как $e \ln N$ (см. (10)), поэтому данная статистика также асимптотически достоверно различает гипотезы $H^{(0)}$ и $H^{(-)}$.

3) Рассмотрим, наконец, зону средних значений параметра k . Теорема 3 в этом случае утверждает, что все наши статистики при обеих гипотезах асимптотически нормальны, при этом в случае справедливости гипотезы $H^{(\cdot)}$

$$\frac{\mu_r}{N} \xrightarrow{P} p_r^{(\cdot)}(\lambda), \quad \frac{\nu_m(N, k)}{N} \xrightarrow{P} E\xi_\lambda^{(\cdot)} \quad (16)$$

(см. соотношения (11), (12)). Поскольку здесь пределы при гипотезах $H^{(0)}$ и $H^{(-)}$ различаются, то каждая из этих статистик асимптотически достоверно идентифицирует модель. Например, если использовать в качестве тестовой статистики время ожидания $\nu_m(N, k)$ (параметры этой статистики рассчитываются наиболее просто), то при $t_m(\lambda) > az_{m,a}(\lambda)$ (см. (12)) критическую область для гипотезы $H^{(0)}$ можно задать в виде

$$\{\nu_m(N, k) < Nt_m(\lambda) - \sqrt{N} \ln N\},$$

а при $t_m(\lambda) < az_{m,a}(\lambda)$ – в виде

$$\{\nu_m(N, k) > Nt_m(\lambda) + \sqrt{N} \ln N\}.$$

С использованием теоремы 3 легко убедиться в том, что вероятности ошибок первого и второго рода такого критерия будут стремиться при $N \rightarrow \infty$ к нулю, т.е. гипотезы $H^{(0)}$ и $H^{(-)}$ различаются асимптотически достоверно.

ЗАМЕЧАНИЕ. Выше уже отмечалось, что с увеличением параметра a различение гипотез $H^{(0)}$ и $H^{(-)}$ затрудняется. Если мы находимся в условиях теоремы 3, то нетрудно видеть, что при фиксированных λ и m квантиль $z_{m,a}(\lambda) \rightarrow 0$, когда $a \rightarrow \infty$, а $az_{m,a}(\lambda) \rightarrow t_m(\lambda)$. Это следует из цепочки соотношений

$$\begin{aligned} \lambda &= \int_0^{z_{m,a}(\lambda)} \beta(x; m, a - m + 1) dx = \int_0^{az_{m,a}(\lambda)} \beta\left(\frac{y}{a}; m, a - m + 1\right) \frac{dy}{a} \\ &\sim \int_0^{az_{m,a}(\lambda)} \pi_{m-1}(y) dy = \Gamma_m(az_{m,a}(\lambda)). \end{aligned}$$

В этом случае асимптотические распределения статистики $\nu_m(N, k)$ при гипотезах $H^{(0)}$ и $H^{(-)}$ сближаются; следовательно, различение гипотез затрудняется. Интересно было бы исследовать вопрос, с какой скоростью может возрастать $a = a(N)$, чтобы еще было возможным различение гипотез $H^{(0)}$ и $H^{(-)}$ с некоторыми ошибками. По-видимому, это будет так, если $a \asymp \sqrt{N}$.

4. О методе доказательства предельных теорем. Пусть η_j , $j = 1, \dots, N$, – частоты соответствующих цветов в выборке в момент остановки испытаний и $g(x)$ – произвольная функция. Случайная величина вида

$$L_{Nk} = \sum_{j=1}^N g(\eta_j) \quad (17)$$

называется *разделимой статистикой* (РС). Разделимая статистика – весьма общий объект, охватывающий широкий класс характеристик в рассматриваемых моделях выбора. Частными случаями разделимых статистик являются обсуждаемые нами величины μ_r (при $g(x) = \mathbb{I}(x = r)$) и $\nu_m(N, k)$ (при $g(x) = x$). Общий метод исследования асимптотических (при $N \rightarrow \infty$ и $k = k(N)$) распределений разделимых статистик для общей модели выбора (модели Маркова–Пойа), включающей как частные случаи и модели повторного и бесповторного выбора, развит в работах [1], [4]–[6]. Суть этого метода состоит в следующем: с помощью приема вложения урновой схемы в подходящий марковский процесс с непрерывным временем выводится общее интегральное представление для характеристической функции разделимой статистики (17), которое и является основой для получения предельных распределений разделимых статистик при $N \rightarrow \infty$.

Чтобы выписать это представление для рассматриваемой нами ситуации, введем случайные величины $\xi^{(\cdot)}(t)$ с распределениями

$$\mathcal{L}(\xi^{(\cdot)}(t)) = \begin{cases} \Pi(at) & \text{для } (\cdot) = (0), \\ \text{Bi}(a, 1 - e^{-t}) & \text{для } (\cdot) = (-), \end{cases} \quad t > 0,$$

и соответствующие усеченные случайные величины $\xi_j^{(\cdot)}(t)$, $j = 1, 2$, с распределениями

$$\mathcal{L}(\xi_1^{(\cdot)}(t)) = \mathcal{L}(\xi^{(\cdot)}(t) \mid \xi^{(\cdot)}(t) \geq m), \quad \mathcal{L}(\xi_2^{(\cdot)}(t)) = \mathcal{L}(\xi^{(\cdot)}(t) \mid \xi^{(\cdot)}(t) < m),$$

а также характеристические функции

$$f_j^{(\cdot)}(\tau; t) = \mathbf{E} \exp\{i\tau g(\xi_j^{(\cdot)}(t))\}, \quad j = 1, 2.$$

Тогда

$$\mathbf{E} e^{i\tau L_{Nk}^{(\cdot)}} = e^{i\tau g(m)} \int_0^1 f_{Nk}^{(\cdot)}(\tau; t_m^{(\cdot)}(x)) \beta(x; k, N - k + 1) dx, \quad (18)$$

где

$$f_{Nk}^{(\cdot)}(\tau; t) = [f_1^{(\cdot)}(\tau; t)]^{k-1} [f_2^{(\cdot)}(\tau; t)]^{N-k}$$

и $t_m^{(\cdot)}(x)$, $x \in [0, 1]$, – обратная функция к

$$H_m^{(\cdot)}(t) = \mathbf{P}\{\xi^{(\cdot)}(t) \geq m\}.$$

С помощью представления (18) в цитируемых работах получены предельные при $N \rightarrow \infty$ распределения произвольной разделимой статистики для каждой из трех зон изменения параметра k .

Здесь мы рассматриваем совместные распределения величин μ_r , поэтому прямо использовать известные предельные теоремы для разделимых статистик, чтобы получить нужные нам многомерные распределения, нельзя. Тем не менее, описанная схема работает и в многомерном случае. Именно, если ввести функцию

$$g(\bar{\tau}; x) = \sum_r \tau_r \mathbb{I}(x = r), \quad (19)$$

то соответствующая разделимая статистика (17) примет вид

$$L_{Nk} = \sum_{j=1}^N g(\bar{\tau}; \eta_j) = \sum_r \tau_r \sum_{j=1}^N \mathbb{I}(\eta_j = r) = \sum_r \tau_r \mu_r,$$

а ее характеристическая функция в единице $\mathbf{E} \exp\{i L_{Nk}\} = \mathbf{E} \exp\{i \sum_r \tau_r \mu_r\}$ как функция параметров $\bar{\tau} = \{\tau_r\}$ и будет совместной характеристической функцией величин μ_r . Следовательно, если в (18) функция g имеет вид (19), то мы можем использовать все результаты для общих разделимых статистик, выводя из них соответствующие утверждения для совместных распределений величин μ_r . Реализацией этой идеологии и являются приведенные в п. 2 теоремы. Технические детали ввиду их громоздкости мы опускаем, а все ключевые элементы соответствующей аналитики можно извлечь из работы [1]. Отметим также, что утверждения теорем 2 и 3 о времени ожидания в модели повторного выбора известны еще из работы [8], а утверждение (8) для случая $s = 1$ впервые было получено в [9].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ivanov A. V., Ivchenko G. I. On waiting time in the Markov-Pólya scheme // J. Math. Sci. 1998. V. 91. №3. P. 2904–2916.
- [2] Ивченко Г. И. Время ожидания и связанные с ним характеристики в полиномиальной схеме // Дискретная матем. 1993. Т. 5. №3. С. 3–34.
- [3] Ивченко Г. И., Медведев Ю. И. Смеси вероятностных распределений и случайные размещения // Тр. по дискретной матем. 1998. Т. 2. С. 169–182.
- [4] Ивченко Г. И., Иванов А. В. Разделимые статистики в обратных урновых задачах // Дискретная матем. 1995. Т. 7. №2. С. 103–117.
- [5] Иванов А. В., Ивченко Г. И. Разделимые статистики и моменты остановки в схеме бесповторного выбора // Дискретная матем. 1997. Т. 9. №1. С. 43–58.
- [6] Holst L., Hüsler J. Sequential urn schemes and birth processes // Adv. Appl. Probab. 1985. V. 17. P. 257–279.
- [7] Большев Л. Н., Смирнов Н. В. Таблицы математической статистики. М.: Наука, 1983.
- [8] Bekessy A. On classical occupancy problems. II // Magy. Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl. 1964. V. 9A. №1–2. P. 133–141.
- [9] Erdős P., Renyi A. On a classical problem of probability theory // Magy. Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl. 1961. V. 6A. №1–2. P. 215–220.

Московский государственный институт электроники и математики

Поступило
25.10.2001