Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Баскаков, Линейные дифференциальные операторы с неограниченными операторными коэффициентами и полугруппы разностных операторов, *Матем. заметки*, 1996, том 59, выпуск 6, 811–820

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1780>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 18:22:37

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ С НЕОГРАНИЧЕННЫМИ ОПЕРАТОРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И ПОЛУГРУППЫ РАЗНОСТНЫХ ОПЕРАТОРОВ

А. Г. Баскаков

Пусть X – комплексное банахово пространство, $\text{End } X$ – банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в X , $L_p = L_p(\mathbb{R}_+, X)$ ($p \in [1, \infty)$) – банахово пространство измеримых (по Бохнеру) и суммируемых со степенью p функций, определенных на полуоси $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ со значениями в X , и $L_\infty = L_\infty(\mathbb{R}_+, X)$ – банахово пространство существенно ограниченных на $\mathbb{R}_+$ функций, принимающих значения в X .

Рассматривается линейный дифференциальный оператор

$$\mathcal{L} = -\frac{d}{dt} + A(t): D(\mathcal{L}) \subset L_p \rightarrow L_p, \quad p \in [1, \infty], \quad (1)$$

и изучаются его спектральные свойства при условии, что семейство замкнутых линейных операторов $A(t): D(A(t)) \subset X \rightarrow X$, $t \geq 0$, порождает корректную задачу Коши при $t \geq 0$ (см. [1]). Пусть $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}(t, s); 0 \leq s \leq t < \infty\}$ – соответствующее семейство эволюционных операторов, которые удовлетворяют следующим трем условиям:

- 1) $\mathcal{U}(s, s) = I$ – тождественный оператор $\forall s \in \mathbb{R}_+$;
- 2) $\mathcal{U}(s_1, s_2)\mathcal{U}(s_2, s_3) = \mathcal{U}(s_1, s_3)$, $0 \leq s_3 \leq s_2 \leq s_1 < \infty$;
- 3) семейство $\mathcal{U}$ сильно непрерывно.

Всюду считается выполненным следующее условие

$$\sup_{0 \leq s - \tau \leq 1} \|\mathcal{U}(s, \tau)\| < \infty. \quad (2)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Международного научного фонда, гранты NZA000, NZA300, и Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 95-01-00032.

Предполагается, что область определения $D(\mathcal{L})$ оператора $\mathcal{L}$ состоит из таких функций $x \in L_p$, которые при всех $t \geq 0$ представимы в виде

$$x(t) = - \int_0^t \mathcal{U}(t, s) f(s) ds \quad (3)$$

для некоторой функции $f \in L_p$. В этом случае полагается $\mathcal{L}x = f$ (следовательно, всякая функция $x \in D(\mathcal{L})$ удовлетворяет условию $x(0) = 0$). Корректность определения оператора $\mathcal{L}$ (единственность функции f из L_p в (3)) следует из равенств

$$x(t) = \mathcal{U}(t, \tau) x(\tau) - \int_\tau^t \mathcal{U}(t, s) f(s) ds, \quad 0 \leq \tau \leq t < \infty.$$

Таким образом, при определении оператора $\mathcal{L}$ используется только семейство эволюционных операторов $\mathcal{U}$, которое может и не быть связанным с дифференциальным уравнением, и поэтому в дальнейшем для его обозначения используется также символ $\mathcal{L}\mathcal{U}$. С помощью формулы (3) оператор $\mathcal{L}\mathcal{U}$ определяется в банаховом пространстве $C = C(\mathbb{R}_+, X)$ непрерывных и ограниченных на $\mathbb{R}_+$ функций, принимающих значения в X .

Приводимые в данной статье утверждения тесно связаны с результатами, изложенными в главе III из монографии [2], где предполагалось, что $A(t) \in \text{End } X \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$, и результатами из монографии [3, § 7.4], где $A(t) = A_0 + B(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, $-A_0: D(A_0) \subset X \rightarrow X$ – секториальный оператор и $B(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, – операторы, подчиненные дробной степени A_0^ν , $\nu \in [0, 1)$, оператора A_0 .

Основные результаты получены с использованием полугруппы $\{T\mathcal{U}(t); t \geq 0\}$ разностных линейных операторов из банаховой алгебры $\text{End } L_p$ ($p \in [1, \infty]$), имеющих вид

$$(T\mathcal{U}(t)x)(s) = \begin{cases} \mathcal{U}(s, s-t)x(s-t), & s \geq t, \\ 0, & 0 \leq s < t, \end{cases} \quad (4)$$

и разностного оператора $\mathcal{D} = I - \mathcal{K} \in \text{End } \ell_p$, где оператор $\mathcal{K}$ определяется соотношениями

$$(\mathcal{K}y)(n) = \begin{cases} \mathcal{U}(n, n-1)y(n-1), & n \geq 1, \\ 0, & n = 0, \end{cases} \quad (5)$$

Символами $\ell_p = \ell_p(\mathbb{Z}_+, X)$, $p \in [1, \infty)$, обозначается банахово пространство последовательностей векторов из X , суммируемых со степенью p :

$$\|y\|_p = \left(\sum_{n \geq 0} \|y(n)\|^p \right)^{1/p}, \quad y \in \ell_p.$$

Через $\ell_\infty = \ell_\infty(\mathbb{Z}_+, X)$ обозначим банахово пространство ограниченных последовательностей векторов из X ($\|y\|_\infty = \sup_{n \geq 0} \|y(n)\|$, $\mathbb{Z}_+$ – множество неотрицательных целых чисел).

В дальнейшем используются следующие два замечания.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Для любого числа λ из поля $\mathbb{C}$ комплексных чисел линейный оператор $\mathcal{L}_{\mathcal{U}} - \lambda I: D(\mathcal{L}_{\mathcal{U}}) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ (здесь и далее символ $\mathcal{X}$ используется для обозначения одного из банаховых пространств L_p , $p \in [1, \infty)$, C) совпадает с оператором $\mathcal{L}_{\mathcal{U}(\lambda)}$, т.е. определяется семейством эволюционных операторов $\mathcal{U}(\lambda)(t, s) = \exp \lambda(s - t)\mathcal{U}(t, s)$, $0 \leq s \leq t < \infty$. Соответствующий этому семейству разностный оператор $\mathcal{D}_{\lambda} = I - \mathcal{K}_{\lambda} \in \text{End } \ell_p$ (если $\mathcal{X} = C$, то $p = \infty$) имеет вид

$$(\mathcal{D}_{\lambda} y)(n) = \begin{cases} y(n) - \exp(-\lambda)\mathcal{U}(n, n-1)y(n-1), & n \geq 1, \\ y(0), & n = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Отметим, что определенная формулой (4) полугруппа операторов $\{T_{\mathcal{U}}(t); t \geq 0\}$ сильно непрерывна в пространствах L_p , $p \in [1, \infty)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Непосредственно из формулы (3), с помощью которой определялся оператор $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}$, следует, что он обратим и $(\mathcal{L}^{-1}f)(t) = -\int_0^t \mathcal{U}(t, s)f(s)ds$, $f \in L_p$, если имеет место оценка вида $\|\mathcal{U}(t, s)\| \leq M \exp \gamma(t - s)$ ($0 \leq s \leq t < \infty$) для некоторых $M > 0$ и $\gamma < 0$.

ТЕОРЕМА 1. *Линейный оператор $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}: D(\mathcal{L}_{\mathcal{U}}) \subset L_p \rightarrow L_p$, $p \in [1, \infty)$, является производящим оператором полугруппы операторов $\{T_{\mathcal{U}}(t); t \geq 0\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из свойства (2) семейства $\mathcal{U}$ следует, что существуют такие постоянные $M > 0$, $\gamma \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, что

$$\|\mathcal{U}(t, s)\| \leq M \exp \gamma(t - s) \quad \forall s, t \in \mathbb{R}_+, \quad s \leq t. \quad (7)$$

Непосредственно из формул (3) и (4), определяющих оператор $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}$ и полугруппу $\{T_{\mathcal{U}}(t); t \geq 0\}$, замечаний 1, 2 и оценки (7) получаем, что любое число $\lambda \in \mathbb{C}$, для которого $\text{Re } \gamma > \gamma$, одновременно принадлежит резольвентным множествам $\rho(\mathcal{L}_{\mathcal{U}})$ и $\rho(\mathcal{A})$ операторов $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}$ и $\mathcal{A}$ соответственно, где $\mathcal{A}: D(\mathcal{A}) \subset L_p \rightarrow L_p$ — производящий оператор полугруппы $\{T_{\mathcal{U}}(t); t \geq 0\}$.

Из замечания 1 следует, что без ограничения общности можно считать, что $\lambda = 0$, т.е. можно с самого начала предположить, что $\gamma < 0$. В этом случае операторы $\mathcal{L}$ и $\mathcal{A}$ (непрерывно) обратимы и для доказательства их совпадения установим, что $\mathcal{L}^{-1} = \mathcal{A}^{-1}$.

Для оператора $\mathcal{A}^{-1} \in \text{End } L_p$ имеет место представление (см. [4, лемма 11.5.1])

$$\mathcal{A}^{-1}f = -\int_0^{\infty} T_{\mathcal{U}}(t)f dt, \quad f \in L_p,$$

из которого получаем следующие равенства

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}^{-1}f)(s) &= - \int_0^\infty (T_{\mathcal{U}}(t)f)(s) dt = - \int_0^s \mathcal{U}(s, s-t)f(s-t) dt \\ &= - \int_0^s \mathcal{U}(s, \tau)f(\tau) d\tau = (\mathcal{L}^{-1}f)(s), \quad s \in \mathbb{R}_+. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

ЛЕММА 1. *Если разностный оператор $\mathcal{D} \in \text{End } \ell_p$ обратим, то для всех чисел $m, n \in \mathbb{Z}_+$, $m \leq n$, и $\alpha \in (-1/\|\mathcal{D}^{-1}\|, 0)$ имеют место оценки*

$$\|\mathcal{U}(n, m)\| \leq \frac{\|\mathcal{D}^{-1}\|(1+\alpha)^{n-m+1}}{1+\alpha\|\mathcal{D}^{-1}\|}. \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственно из формулы (5) следует, что оператор $\mathcal{D}^{-1} = (I - \mathcal{K})^{-1} \in \text{End } \ell_p$ имеет вид

$$(\mathcal{D}^{-1}f)(n) = \sum_{j=0}^n \mathcal{U}(n, j)f(j), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad f \in \ell_p. \quad (9)$$

Если $\alpha \in (-1/\|\mathcal{D}^{-1}\|, 0)$, то оператор $\mathcal{D} + \alpha I = (1+\alpha)I - \mathcal{K}$ обратим, $(\mathcal{D} + \alpha I)^{-1} = (1+\alpha)^{-1}(I - (1+\alpha)^{-1}\mathcal{K})^{-1}$ и поэтому из (9) получаем

$$((\mathcal{D} + \alpha I)^{-1}f)(n) = \sum_{j=0}^n \frac{\mathcal{U}(n, j)}{(1+\alpha)^{n-j+1}}f(j), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad x \in \ell_p.$$

Для каждой последовательности $f \in \ell_p$ вида $f(j) = 0 \quad \forall j \neq k \in \mathbb{Z}_+$ и $f(k) = x \in X$ имеет место равенство $\|f\|_p = \|x\|$ и поэтому из формулы для $(\mathcal{D} + \alpha I)^{-1}$ следуют оценки

$$\begin{aligned} (1+\alpha)^{j-n-1}\|\mathcal{U}(n, j)\| &\leq \|(\mathcal{D} + \alpha I)^{-1}\| \\ &\leq \|\mathcal{D}^{-1}\|(1+\alpha\|\mathcal{D}^{-1}\|)^{-1}, \quad 0 \leq j \leq n < \infty, \end{aligned}$$

из которых получаем доказываемые оценки (8). Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ. *Если оператор $\mathcal{D}$ обратим в одном из пространств ℓ_p , $p \in [1, \infty]$, то он обратим во всех остальных и имеют место оценки*

$$\|\mathcal{D}^{-1}\|_q \leq 2(2\|\mathcal{D}^{-1}\|_p - 1)\|\mathcal{D}^{-1}\|_p$$

при любом $q \in [1, \infty]$ ($\|\mathcal{D}^{-1}\|_q$ — норма оператора $\mathcal{D}^{-1}$ в пространстве ℓ_q).

Для доказательства достаточно заметить, что норма оператора $\|\mathcal{D}^{-1}\|$ в любом из пространств ℓ_q , $q \in [1, \infty]$, не превосходит величины $\sum_{k \geq 0} \alpha_k$, где $\alpha_k = \sup_{n-m=k} \|\mathcal{U}(n, m)\|$ (см. формулу (9)).

Полный аналог леммы 1 имеет место для операторов $I - T_{\mathcal{U}}(t)$, $t \geq 0$.

ЛЕММА 2. Если оператор $I - T_{\mathcal{U}}(t) \in \text{End } L_p$, $p \in [1, \infty]$, $t \geq 0$, обратим, то для всех $k \in \mathbb{Z}_+$, $\alpha \in (-1/\|\mathcal{D}^{-1}\|, 0)$ и $s \in \mathbb{R}_+$ имеют место оценки

$$\sup_{s \in \mathbb{R}_+} \|\mathcal{U}(s, s - tk)\| \leq \frac{\|\mathcal{D}^{-1}\|(1 + \alpha)^{k+1}}{1 + \alpha\|\mathcal{D}^{-1}\|}. \quad (10)$$

Отметим, что оценки (10) следуют из представления оператора $((1 + \alpha)I - T_{\mathcal{U}}(t))^{-1}$ в виде

$$((1 + \alpha)I - T_{\mathcal{U}}(t))^{-1}f(s) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(1 + \alpha)^{k+1}} \mathcal{U}(s, s - kt)f(s - kt)$$

при $s \in [nt, (n + 1)t]$, $n \geq 0$.

ТЕОРЕМА 2. Оператор $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}: D(\mathcal{L}_{\mathcal{U}}) \subset L_p \rightarrow L_p$, $p \in [1, \infty)$, обратим тогда и только тогда, когда обратим разностный оператор $\mathcal{D} \in \text{End } \ell_p$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если обратим оператор $\mathcal{D}$, то из леммы 1 и условий 3) и (2) на семейство $\mathcal{U}$ получаем, что существуют постоянные $M > 0$ и $\gamma < 0$ такие, что выполнено условие

$$\|\mathcal{U}(t, s)\| \leq M \exp \gamma(t - s), \quad 0 \leq s \leq t < \infty.$$

Отсюда (см. замечание 2) следует ограниченность оператора $(\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^{-1}f)(t) = -\int_0^t \mathcal{U}(t, s)f(s)ds$ в любом из банаховых пространств L_p , $p \in [1, \infty]$.

Пусть теперь обратим оператор $\mathcal{L}: D(\mathcal{L}_{\mathcal{U}}) \subset L_p \rightarrow L_p$ при некотором $p \in [1, \infty]$. Ясно, что $\text{Ker } \mathcal{D} = \{x \in \ell_p : \mathcal{D}x = 0\} = \{0\}$. Для построения оператора $\mathcal{D}^{-1} \in \text{End } \ell_p$ используем оператор $B: \ell_p \rightarrow L_p$, определенный равенствами

$$(Bx)(s) = -\varphi(s)\mathcal{U}(s, n - 1)x(n - 1), \\ x \in \ell_p, \quad s \in [n - 1, n], \quad n \in \mathbb{Z}_+ \setminus \{0\},$$

где $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — периодическая периода 1 функция, причем $\varphi(s) = 6s(1 - s)$ на $[0, 1]$. Легко видеть, что имеет место оценка $\|B\| \leq \max_{s \in [0, 1]} \varphi(s)M = \frac{3}{2}M$, где $M = \sup_{0 \leq t - s \leq 1} \|\mathcal{U}(t, s)\|$.

Докажем, что оператор $\mathcal{D}^{-1}$ допускает представление вида

$$\mathcal{D}^{-1}f = \tilde{x} + f, \quad f \in \ell_p.$$

Здесь символом $\tilde{x}$ обозначается сужение функции $x = \mathcal{L}^{-1}g$, где $g = Bf$, на $\mathbb{Z}_+$. Отметим, что включение $C \supset D(\mathcal{L}\mathcal{U})$ следует из формулы (3). Из (3) при $f = g$ получаются следующие равенства:

$$\begin{aligned} x(0) &= 0, \\ x(n) &= - \int_0^n \mathcal{U}(n, \tau) g(\tau) d\tau \\ &= - \mathcal{U}(n, s) \int_0^s \mathcal{U}(s, \tau) g(\tau) d\tau - \int_s^n \mathcal{U}(n, \tau) g(\tau) d\tau \\ &= \mathcal{U}(n, s) x(s) - \int_s^n \mathcal{U}(n, \tau) g(\tau) d\tau, \quad s \in [n-1, n], \quad n \geq 1, \end{aligned} \quad (11)$$

и поэтому при $s = n-1$ получаем, что

$$\begin{aligned} x(n) &= \mathcal{U}(n, n-1) x(n-1) + \int_{n-1}^n \mathcal{U}(n, s) \varphi(s) \mathcal{U}(s, n-1) f(n-1) ds \\ &= \mathcal{U}(n, n-1) (x(n-1) + f(n-1)), \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Следовательно, $\mathcal{D}(\tilde{x} + f) = f$ (т.е. $\mathcal{D}$ – сюръективный оператор), если только будет установлено, что $\tilde{x} \in \ell_p$.

Из равенств (11) следуют оценки

$$\|\tilde{x}(n)\| = \|x(n)\| \leq \frac{3}{2} M (\|x(s)\| + \|f(n-1)\|), \quad s \in [n-1, n], \quad n \geq 1. \quad (12)$$

Поскольку $(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p) \quad \forall p \in [1, \infty), \forall a, b \geq 0$, то, интегрируя по промежутку $[n-1, n]$ обе части неравенства (12), возведенные в степень p , получим, что

$$\|\tilde{x}(n)\|^p \leq \frac{(3M)^p}{2} \left(\int_{n-1}^n \|x(s)\|^p ds + \|f(n-1)\|^p \right), \quad n \geq 1,$$

и поэтому в результате суммирования этих неравенств получим

$$\begin{aligned} \|\tilde{x}\|_p &\leq 3M (\|x\|_{L_p} + \|f\|_p) \leq 3M (\|\mathcal{L}^{-1}\| \|Bf\|_{L_p} + \|f\|_p) \\ &\leq \left(\frac{9M^2}{2} \|\mathcal{L}^{-1}\| + 3M \right) \|f\|_p. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|\mathcal{D}^{-1}\| \leq \frac{9M^2}{2} \|\mathcal{L}^{-1}\| + 3M + 1. \quad (13)$$

Если $p = \infty$, то из (11) получаем, что

$$\|\tilde{x}\| \leq \frac{3}{2} M (\|x\|_{L_\infty} + \|f\|_\infty),$$

и, значит, имеет место оценка (13). Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если оператор $\mathcal{L}_{\mathcal{U}} : D(\mathcal{L}_{\mathcal{U}}) \subset L_p \rightarrow L_p$, $p \in [1, \infty]$, обратим, то имеет место оценка (13).

СЛЕДСТВИЕ 2. Оператор $\mathcal{L}_{\mathcal{U}} - \lambda I : D(\mathcal{L}_{\mathcal{U}}) \subset L_p \rightarrow L_p$, $\lambda \in \mathbb{C}$, обратим тогда и только тогда, когда обратим разностный оператор $\mathcal{D}_{\lambda} \in \text{End } \ell_p$, определенный формулой (6).

СЛЕДСТВИЕ 3. Спектр оператора $\mathcal{L}_{\mathcal{U}} : D(\mathcal{L}_{\mathcal{U}}) \subset L_p \rightarrow L_p$ не зависит от $p \in [1, \infty]$.

Непосредственно из доказательства теоремы 2 видно, что как ее утверждение, так и утверждения ее следствий имеют место для пространства $C = C(\mathbb{R}_+, X)$. Имеет место

ТЕОРЕМА 3. Оператор $\mathcal{L}_{\mathcal{U}} : D(\mathcal{L}_{\mathcal{U}}) \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ обратим тогда и только тогда, когда обратим оператор $\mathcal{D} \in \text{End } \ell_{\infty}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Пусть $\{V(\lambda); \lambda \in \mathbb{R}\}$ – изометрическая группа линейных операторов из банаховой алгебры $\text{End } \mathcal{X}$ (напомним, что $\mathcal{X} = L_p$, $p \in [1, \infty]$, или $\mathcal{X} = C$), имеющих вид

$$(V(\lambda)x)(s) = \exp(i\lambda s)x(s), \quad s \geq 0, \quad x \in \mathcal{X}.$$

Непосредственно из определения оператора $\mathcal{L}_{\mathcal{U}} : D(\mathcal{L}_{\mathcal{U}}) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ и операторов $T_{\mathcal{U}}(t) \in \text{End } L_p$, $t \geq 0$, $p \in [1, \infty]$, (см. формулы (3) и (4)) следует, что $V(\lambda)D(\mathcal{L}_{\mathcal{U}}) = D(\mathcal{L}_{\mathcal{U}}) \forall \lambda \in \mathbb{R}$ и имеют место равенства

$$\begin{aligned} V(-\lambda)\mathcal{L}_{\mathcal{U}}V(\lambda) &= \mathcal{L}_{\mathcal{U}} - i\lambda I, \\ V(-\lambda)T_{\mathcal{U}}(t)V(\lambda) &= e^{-i\lambda t}T_{\mathcal{U}}(t), \end{aligned} \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0,$$

которые означают подобие оператора $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}$ операторам $\mathcal{L}_{\mathcal{U}} - i\lambda I$, $\lambda \in \mathbb{R}$, и подобие оператора $T_{\mathcal{U}}(t)$ операторам $\exp(-i\lambda t)T_{\mathcal{U}}(t)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Поскольку подобные операторы имеют одинаковые спектры, то из этих равенств следует, что спектр $\sigma(\mathcal{L}_{\mathcal{U}})$ оператора $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}$ состоит из объединения прямых, параллельных мнимой оси $i\mathbb{R} = \{it : t \in \mathbb{R}\}$, а спектр $\sigma(T_{\mathcal{U}}(t))$ оператора $T_{\mathcal{U}}(t)$ является объединением окружностей с центром в точке 0. Спектр $\sigma(\mathcal{D})$ оператора $\mathcal{D} \in \text{End } \ell_p$ также является объединением окружностей с центром в точке нуль, что следует из равенств $\tilde{V}(-\lambda)\mathcal{D}\tilde{V}(\lambda) = \exp(-i\lambda)\mathcal{D}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, где $(\tilde{V}(\lambda)x)(n) = \exp(i\lambda n)x(n)$, $x \in \ell_p$, $n \geq 0$.

Число $\chi_g(\mathcal{U})$ из $\mathbb{R}$, определенное формулой

$$\chi_g(\mathcal{U}) = \overline{\lim}_{\tau, s \rightarrow \infty} \frac{\ln \|\mathcal{U}(\tau + s, \tau)\|}{s},$$

называется *верхним генеральным показателем семейства эволюционных операторов* $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}(t, s); 0 \leq s \leq t < \infty\}$ (ср. [2, гл. III]).

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Из замечаний 1 и 2 следует, что полуплоскость $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda > \chi_g(\mathcal{U})\}$ содержится в резольвентном множестве $\rho(\mathcal{L}_{\mathcal{U}})$ оператора $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}$, и внешность круга $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \exp \chi_g(\mathcal{U})\}$ содержится в множестве $\rho(T_{\mathcal{U}}(1))$.

ТЕОРЕМА 4. Спектр $\sigma(\mathcal{L}_{\mathcal{U}})$ оператора $\mathcal{L}_{\mathcal{U}} : D(\mathcal{L}_{\mathcal{U}}) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ имеет вид

$$\sigma(\mathcal{L}_{\mathcal{U}}) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda \leq \chi_g(\mathcal{U})\}. \quad (14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\lambda \in \rho(\mathcal{L}_{\mathcal{U}})$, то из следствия 2 теоремы 2, леммы 1 (при $\alpha = -1/2\|\mathcal{D}_{\lambda}^{-1}\|$) и замечания 1 следует, что разностный оператор $\mathcal{D}_{\lambda}$ (см. формулу (6)) обратим и имеют место оценки

$$\begin{aligned} & \|\exp((- \operatorname{Re} \lambda)(n - m))\mathcal{U}(n, m)\| \\ & \leq (2\|\mathcal{D}_{\lambda}^{-1}\| - 1) \left(1 - \frac{1}{2\|\mathcal{D}_{\lambda}^{-1}\|}\right)^{n-m}, \quad 0 \leq m \leq n < \infty. \end{aligned}$$

Поэтому, используя условие (2), получаем

$$\|\mathcal{U}(t, s)\| \leq \operatorname{const} \cdot e^{(\operatorname{Re} \lambda + \ln(1 - 1/2\|\mathcal{D}_{\lambda}^{-1}\|))(t-s)}, \quad 0 \leq s \leq t < \infty.$$

Из этих оценок следует, что $\chi_g(\mathcal{U}) < \operatorname{Re} \lambda$ и вся полуплоскость $\{\mu \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \mu \geq \operatorname{Re} \lambda\}$ содержится в $\rho(\mathcal{L}_{\mathcal{U}})$. Отсюда и из замечаний 3 и 4 приходим к выводу, что имеет место равенство (14). Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 5. Спектры $\sigma(\mathcal{K})$ и $\sigma(T_{\mathcal{U}}(1))$ операторов $\mathcal{K} = I - \mathcal{D} \in \operatorname{End} \ell_p$, $p \in [1, \infty]$, и $T_{\mathcal{U}}(1) \in \operatorname{End} L_p$ совпадают, не зависят от $p \in [1, \infty]$ и имеют место равенства

$$\begin{aligned} r(\mathcal{K}) &= r(T_{\mathcal{U}}(1)) = \exp \chi_g(\mathcal{U}) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{n \geq m} \|\mathcal{U}(n, n - m)\|^{1/m} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{\tau \geq m} \|\mathcal{U}(\tau, \tau - m)\|^{1/m}, \end{aligned}$$

где $r(\mathcal{K})$ и $r(T_{\mathcal{U}}(1))$ – спектральные радиусы операторов $\mathcal{K}$ и $T_{\mathcal{U}}(1)$ соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственно из лемм 1, 2 и замечания 3 следует, что множества $\sigma(\mathcal{K})$ и $\sigma(T_{\mathcal{U}}(1))$ допускают представления

$$\sigma(\mathcal{K}) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq r_1\}, \quad \sigma(T_{\mathcal{U}}(1)) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq r_2\},$$

где $r_1, r_2 \geq 0$. Поскольку операторы $\mathcal{K}^m$, $m \geq 1$, имеют вид (см. формулу (5))

$$(\mathcal{K}^m y)(n) = \begin{cases} \mathcal{U}(n, n - m)y(n - m), & n \geq m, \\ 0, & 0 \leq n \leq m - 1, \end{cases}$$

то из формулы Гельфанда для спектрального радиуса линейного ограниченного оператора [4, теорема 4.7.3] получаем, что

$$r(\mathcal{K}) = \lim_{m \rightarrow \infty} \|\mathcal{K}^m\|^{1/m} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{n \geq m} \|\mathcal{U}(n, n-m)\|^{1/m},$$

$$r(T_{\mathcal{U}}(1)) = \lim_{m \rightarrow \infty} \|T_{\mathcal{U}}(m)\|^{1/m} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{s \geq m} \|\mathcal{U}(s, s-m)\|^{1/m}.$$

Поэтому из условия (2) следует, что $r(\mathcal{K}) = r(T_{\mathcal{U}}(1))$, а из лемм 1, 2 и замечания 3 получаем (см. доказательство теоремы 4), что $r(\mathcal{K}) = \exp \chi_g(\mathcal{U})$. Теорема доказана.

Следующее утверждение непосредственно следует из теорем 1, 4 и 5.

ТЕОРЕМА 6. *Имеют место следующие равенства*

$$\sigma(T_{\mathcal{U}}(1)) \setminus \{0\} = \sigma(\mathcal{K}) \setminus \{0\} = \exp \sigma(\mathcal{L}_{\mathcal{U}}) = \{\exp \lambda : \lambda \in \sigma(\mathcal{L}_{\mathcal{U}})\},$$

если $\mathcal{K} = L_p$, $p \in [1, \infty]$,

$$\sigma(\mathcal{K}) \setminus \{0\} = \exp \sigma(\mathcal{L}_{\mathcal{U}}),$$

если $X = C$ и

$$\chi_g(\mathcal{U}) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{n \geq m} \frac{\ln \|\mathcal{U}(n, n-m)\|}{m} = \lim_{s \rightarrow \infty} \sup_{\tau \geq s} \frac{\ln \|\mathcal{U}(\tau, \tau-s)\|}{s}.$$

В частности, из теоремы 6 следует, что для полугруппы операторов $\{T_{\mathcal{U}}(t); t \geq 0\}$ имеет место теорема об отображении спектра. Такая теорема не верна для произвольных сильно непрерывных полугрупп линейных операторов (пример Кобера; см. [4, с. 676]).

Приведенные в терминах теорем 4–6 результаты позволяют получить ряд достаточных условий отрицательности верхнего генерального показателя $\chi_g(\mathcal{U})$ семейства эволюционных операторов $\mathcal{U}$. В частности, из теоремы 5 следует, что $\chi_g(\mathcal{U}) < 0$ тогда и только тогда, когда $r(\mathcal{K}) = r(T_{\mathcal{U}}(1)) < 1$, или, что эквивалентно, существует такое натуральное число m , что

$$\|T_{\mathcal{U}}(m)\| = \sup_{s \geq m} \|\mathcal{U}(s, s-m)\| < 1. \quad (15)$$

Для примера рассмотрим дифференциальный оператор $\mathcal{L}$ вида (1), где $A \in C(\mathbb{R}_+, \text{End } X)$. Его область определения имеет вид $D(\mathcal{L}) = \{x \in W_p^1 : x(0) = 0\}$, где $W_p^1 = W_p^1(\mathbb{R}_+, X)$ – пространство Соболева, а соответствующее семейство эволюционных операторов $\{\mathcal{U}(t, s) : 0 \leq s \leq t < \infty\}$ допускает представление $\mathcal{U}(t, s) = U(t)U(s)^{-1}$ – оператор Коши для дифференциального уравнения $dx/dt = A(t)x$ (см. [2]). Из полученных в [2]

оценок (см. оценку (2.22) и доказательство теоремы 6.3 из гл. III) следует, что неравенство (15) выполнено, если для некоторых постоянных $N > 0$, $\gamma > 0$, $m \in \mathbb{Z}$ имеют место оценки

$$\|e^{A(\tau)t}\| \leq N e^{-\gamma t} \quad \forall t \geq 0, \quad \forall \tau \geq m, \quad (16)$$

$$\|A(s) - A(s - m)\| < \frac{1}{N} \left(\gamma - \frac{\ln N}{m} \right) \quad \forall s \geq m. \quad (17)$$

Условие (17) может быть заменено условием

$$\sup_{s \geq m} \int_{s-m}^s \|A(\tau) - A(s - m)\| d\tau < \frac{m\gamma - \ln N}{N}.$$

Условие (15) удобно также использовать для получения достаточных условий отрицательности верхнего генерального показателя семейства эволюционных операторов $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}(t, s); 0 \leq s \leq t\}$, порожденного семейством $\{A(t); t \in \mathbb{R}_+\}$ линейных операторов вида $A(t) = A_0 + B(t)A_0^\nu$, где $-A_0: D(A_0) \subset X \rightarrow X$ – секториальный оператор [3], $\nu \in [0, 1]$ и $B \in C(\mathbb{R}_+, \text{End } X)$. При выполнении условия типа (16) и некоторого аналога условия (17) для функции B (с этой целью можно использовать оценки из [3, теорема 7.5.2]) будет выполнено условие (15) и, значит, $\chi_g(\mathcal{U}) < 0$. Для вывода условий обратимости оператора $\mathcal{L} = -d/dt + A_0 + B(t)A_0^\nu: D(\mathcal{L}) \subset L_p \rightarrow L_p$ (условий отрицательности генерального показателя $\chi_g(\mathcal{U})$) может быть использован также подход из статьи [5], приводящий к несколько иным условиям.

Воронежский государственный университет

Поступило

10.05.94

Исправленный вариант

10.02.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Физматгиз, 1967.
- [2] Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.
- [3] Хенри Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. М.: Мир, 1985.
- [4] Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. М.: ИЛ, 1962.
- [5] Баскаков А. Г. Некоторые условия обратимости линейных дифференциальных и разностных операторов // Докл. РАН. 1993. Т. 333. № 3. С. 282–284.