Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. Делл Аччио, О непрерывном продолжении локально гомеоморфных симплицальных отображений $\mathbb{R}^2$ в себя посредством σ -процессов, *Матем. заметки*, 1996, том 59, выпуск 6, 821–831

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1781>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 15:28:14

О НЕПРЕРЫВНОМ ПРОДОЛЖЕНИИ ЛОКАЛЬНО ГОМЕОМОРФНЫХ СИМПЛИЦИАЛЬНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ $\mathbb{R}^2$ В СЕБЯ ПОСРЕДСТВОМ σ -ПРОЦЕССОВ

Ф. Делл' Аччио

1. Формулировка результата. В заметке [1], посвященной одной гипотезе Витушкина, связанной с проблемой о якобиане, был построен пример накрывающей над $\mathbb{R}^2$, который, по нашему мнению, представляет интерес при рассмотрении возможных топологических подходов к решению проблемы о якобиане. Напомним, что построенная в статье [1] накрывающая – это поверхность M , состоящая из одной открытой двумерной клетки и трех открытых одномерных клеток l_+ , l_- , l , и собственное отображение $F: M \rightarrow \mathbb{R}^2$, которое локально гомеоморфно на двумерной клетке; вблизи всякой точки из $l_+ \cup l_-$ в подходящей системе локальных координат отображение F имеет вид: $(x, y) \mapsto (x, y^2)$; вблизи всякой точки одномерной клетки l в подходящей системе локальных координат отображение F имеет вид: $(x, y) \mapsto (x, y)$; отображение F переводит каждую одномерную клетку на кривую в $\mathbb{R}^2$, которая при подходе к концам клетки, уходит в бесконечность вдоль некоторого асимптотического направления. Данная статья является дополнением к работе автора [1], а именно, здесь доказывается ряд дополнительных свойств указанной накрывающей.

Известно, что если задано полиномиальное отображение $\mathbb{C}^2$ в себя, то подклейкой к $\mathbb{C}^2$ конечного числа римановых сфер его можно пополнить до компактного многообразия таким образом, что указанное полиномиальное отображение продолжается до непрерывного отображения этого многообразия в $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1$. Если коэффициенты указанных полиномов вещественные, то возникает аналогичная конструкция, состоящая из замкнутой поверхности, являющейся пополнением $\mathbb{R}^2$ посредством конечного числа окружностей, и непрерывного отображения этой поверхности в

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 93–01–00225, Министерства научного и технологического исследования Италии в области математических наук.

$\mathbb{RP}^1 \times \mathbb{RP}^1$. Указанная система окружностей получается последовательным выполнением цепочки σ -процессов (раздутий) – вклеек окружностей в точках неопределенности заданного отображения.

Отметим, что указанная система окружностей образует одномерное дерево. Первая окружность – это бесконечно удаленная окружность в $\mathbb{RP}^2$; в каждой точке неопределенности отображения на этой окружности выполняется σ -процесс; если в новых полученных окружностях имеются точки неопределенности, то процедура повторяется. Процедура объявляется законченной тогда, когда точек неопределенности не осталось и тем самым отображение непрерывно продолжается на построенное дерево. Нетрудно убедиться в том, что всякие две окружности полученной системы либо не пересекаются, либо имеют лишь одну точку пересечения. Общая точка двух окружностей называется *точкой ветвления* дерева. Окружность дерева будем называть *концевой*, если она содержит лишь одну точку ветвления дерева. Окружность дерева будем называть *отмеченной*, если она является концевой и пересекающимися с ней окружности в процессе построения дерева появились раньше чем она сама.

Основной результат этой заметки составляет следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Поверхность M вкладывается в замкнутую поверхность $\tilde{M}$, состоящую из одной двумерной клетки и конечного набора окружностей, образующих дерево, и это вложение обладает следующими свойствами:*

а) *двумерная клетка поверхности M отображается на двумерную клетку поверхности $\tilde{M}$, а одномерные клетки M отображаются в отмеченные окружности дерева $\tilde{M}$ и при этом так, что каждая накрывает соответствующую отмеченную окружность целиком кроме одной точки, которая является точкой ветвления дерева;*

б) *отображение F непрерывно продолжается на всю поверхность $\tilde{M}$, и продолжение $\tilde{F}$ обладает следующими свойствами:*

- i) *на трех из отмеченных окружностей дерева отображение $\tilde{F}$ действует так: оно переводит всю окружность кроме точки ветвления в конечную часть $\mathbb{RP}^1 \times \mathbb{RP}^1$, т.е. в $\mathbb{R}^2$, а точку ветвления – в точку (∞, ∞) ;*
- ii) *каждая из оставшихся отмеченных окружностей гомеоморфно переводится в одну из окружностей $\{x = \infty\}$, $\{y = \infty\}$ из $\mathbb{RP}^1 \times \mathbb{RP}^1$, а все неотмеченные окружности стягиваются в точку (∞, ∞) .*

Доказательство этого утверждения (см. ниже § 4) получено посредством общей конструкции, которая позволяет относительно всякой наперед заданной открытой поверхности выяснить, вкладывается ли она в замкнутую поверхность специального интересующего нас вида.

2. Нормальная форма поверхности. Всякая замкнутая поверхность (т.е. двумерное связное компактное многообразие, не имеющее края), как известно, может быть интерпретирована следующим образом. Фиксируем на плоскости единичный круг и точками $P_1, \dots, P_{2n}$ разобьем его границу на интервалы одинаковой длины. Рассмотрим правильный n -угольник, вершинами которого являются точки $P_1, \dots, P_{2n}$. Система ребер этого многоугольника разбивается на пары, и ребра каждой пары подклеиваются друг к другу гомеоморфизмом отождествления. При этом отождествлении все вершины $P_1, \dots, P_{2n}$ переводятся в одну общую точку, и в результате получается заданная поверхность. Ориентируем грань правильного многоугольника, например, объявляя движение вдоль ее границы по часовой стрелке положительным. Ребра одной пары будем обозначать одной и той же буквой, если ориентации этих ребер, индуцированные соответствующим гомеоморфизмом отождествления, обе согласованы или обе не согласованы с ориентацией грани многоугольника; в противном случае, обозначив одно из ребер пары символом " ω ", второе ребро этой пары мы будем обозначать символом " ω^{-1} ". Таким образом, всякая замкнутая поверхность определяется последовательностью символов. Эта последовательность получается записью символов, соответствующих ребрам правильного многоугольника, начиная с точки P_1 и далее в порядке возрастания индекса; это разложение называется нормальной формой поверхности (подробнее об этом см. [2, § 3.2]).

Для открытой поверхности M , состоящей из одной двумерной клетки и конечного набора одномерных клеток $l_1, \dots, l_p$, имеет место следующая

ЛЕММА 1. *Открытая поверхность M может быть получена из правильного $2p$ -угольника W без вершин (стороны многоугольника разделены на пары) склеиванием интервалов каждой пары и при этом каждая одномерная клетка получается склейкой интервалов одной из пар.*

В статье [1] показано, что поверхность M можно склеить из правильного шестиугольника без вершин, стороны которого являются копиями кривых l_+, l_-, l . Этот шестиугольник, который будем обозначать через W , является многоугольным представлением поверхности M , указанным в лемме 1. Фиксируем репер $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, касательный к поверхности M , с началом в точке $P^* \in l$, $F(P^*) = 0$ так, что выполняются следующие условия: вектор $\mathbf{e}_1$ направлен вдоль одномерной клетки l ; вектор $\mathbf{e}_2$ ортогонален первому вектору; рассматривая M как поверхность над $\mathbb{R}^2$ и отображение F как проекцию M на $\mathbb{R}^2$, получим, что проекция на плоскость репера $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ совпадает со стандартным репером $\mathbb{R}_{x,y}^2$. Выберем ориентацию двумерной клетки поверхности M так, что она согласована с вектором $\mathbf{e}_1$. Тогда нетрудно убедиться в том, что нормальной формой записи поверх-

ности M является следующая последовательность символов:

$$W = abca^{-1}bc.$$

В этом представлении кривые l_+ , l_- , l получаются из склейки следующих пар ориентированных интервалов:

$$l = (a, a^{-1}), \quad l_+ = (b, b), \quad l_- = (c, c).$$

Пусть теперь $\widetilde{M}$ – замкнутая поверхность, состоящая из $\mathbb{R}^2$ и дерева окружностей $\Sigma_1, \dots, \Sigma_q$. Нетрудно убедиться в том, что точки ветвления делят дерево на четное число одномерных клеток $l_1, \dots, l_{2(q-1)}$, поэтому представление поверхности $\widetilde{M}$ будет получено из правильного многоугольника, число сторон которого кратно 4-м. По аналогии с леммой 1 для замкнутых поверхностей имеет место следующая

ЛЕММА 2. *Замкнутая поверхность $\widetilde{M}$ может быть получена из правильного $4q$ -угольника $\mathcal{W}$ (стороны многоугольника разделены на пары) отождествлением сторон каждой пары и при этом выполняются следующие условия:*

- (1) *внутренности многоугольника сопоставляется двумерная клетка поверхности $\widetilde{M}$, т.е. пространство $\mathbb{R}^2$;*
- (2) *каждая из клеток l_j получается склеиванием сторон одной из пар многоугольника;*
- (3) *каждая точка ветвления получается склеиванием четырех вершин многоугольника.*

Доказательства лемм 1, 2 опускаем.

Заметим, что в процессе склейки отождествляемых сторон многоугольника $\mathcal{W}$ каждая окружность дерева порождается, вообще говоря, не одной, а несколькими парами ребер. Число этих пар равно числу точек ветвления, принадлежащих данной окружности. Концевые окружности дерева, и в том числе отмеченные окружности (определения см. в § 1), являются единственными окружностями, порожденными лишь одной парой ребер многоугольника.

3. О возможности компактификации открытых поверхностей деревом окружностей. Приведем теперь одну конкретную, необходимую для дальнейшего изложения, схему построения нормальной формы записи поверхности.

Покроем каждую окружность Σ_j дерева узкой ленточкой L_j , лежащей на поверхности $\widetilde{M}$, и пусть $L = \cup_{j=1}^q L_j$. В каждой окружности Σ_j фиксируем по одной точке Q_j , достаточно далекой (по сравнению с шириной ленты) от точек ветвления. Обозначим через T_j отрезок, проходящий через

Q_j перпендикулярно Σ_j , с концами, лежащими на границе ленточки L_j . Разрежем L вдоль каждого из отрезков $\{T_j\}$ и разрезанную поверхность L вложим в плоскость таким образом, чтобы каждой из окружностей соответствовал прямолинейный отрезок, расположенный горизонтально или вертикально так, чтобы для всякой пары пересекающихся окружностей соответствующие им отрезки стали перпендикулярными. Отрезок, соответствующий окружности Σ_j , будем обозначать тем же символом Σ_j . Для того, чтобы фиксировать представление поверхности $\widetilde{\mathcal{M}}$ в виде многоугольника (см. лемму 2), поступаем следующим образом. Фиксируем точку P^* , принадлежащую одному из отрезков $\{\Sigma_j\}$, и не являющуюся точкой ветвления, т.е. принадлежащую только одному отрезку из указанной системы. Фиксируем репер (e_1, e_2) с началом в точке P^* . Первый вектор репера направлен вдоль отрезка, содержащего P^* , а второй ортогонален этому отрезку. Далее будем двигать репер по дереву следующим образом: первый вектор репера всегда направлен вдоль одного из отрезков $\{\Sigma_j\}$ и изменяет направление лишь в точках ветвления; проходя точку ветвления, первый вектор поворачивается так, чтобы занять предшествующее положение второго вектора; подойдя к концу отрезка, репер переносится в другой конец отрезка так, что первый вектор сохраняет свое направление, а второй вектор переносится параллельно, если индекс самопересечения окружности Σ_j равен 0, и меняет направление на противоположное, если указанный индекс равен 1. Движение объявляется законченным, когда репер (e_1, e_2) вернется в начальное положение. Дополнение к дереву окружностей до $\widetilde{\mathcal{M}}$ состоит из одной двумерной клетки, и потому репер дважды пройдет вдоль каждого из отрезков l_j . Поясним, что некоторые из отрезков проходятся оба раза в одном и том же направлении, а какие-то при первом проходе – в одном, а при втором – в обратном направлении.

Движение репера по дереву определяет нормальную форму записи, а именно: каждому однократному проходу дерева по одному из отрезков дерева сопоставляется символ. При этом, если отрезок l_j проходится первый раз, то ему сопоставляется символ, отличный от всех ранее определенных, а при повторном проходе, в случае движения в том же направлении, ему сопоставляется ранее присвоенный символ, а в случае движения в противоположном направлении – ранее присвоенный ему символ с припиской показателя “–1”.

Пусть заданы две последовательности символов $a_1 \cdots a_{2n}$, $b_1 \cdots b_{2n}$, элементы которых разделены на пары. Эти последовательности будем называть *эквивалентными*, если, располагая каждую из них по окружности и, если необходимо, обращая ориентацию и изменяя начало отсчета порядка следования элементов одной из этих двух последовательностей, оказывается выполненным следующее: для всякой пары $\{a_i, a_j\}$ элементы

b_i, b_j также образуют пару и при этом $b_i = b_j$ в том и только в том случае, если $a_i = a_j$.

Пусть теперь заданы две поверхности: поверхность $\mathcal{M}$ (см. лемму 1) и поверхность $\widetilde{\mathcal{M}}$ (см. лемму 2). Пусть задано вложение $\Phi: \mathcal{M} \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}$. Будем называть это вложение *регулярным вложением*, если оно гомеоморфно переводит двумерную клетку $\mathcal{M}$ на двумерную клетку $\widetilde{\mathcal{M}}$, а всякую из одномерных клеток $\{l_i\}$ в какую-либо отмеченную окружность из дерева $\{\Sigma_j\}$, и при этом образ одномерной клетки покрывает соответствующую отмеченную окружность целиком, за исключением точки, которая является точкой ветвления дерева. Будем считать, что каждая из поверхностей $\mathcal{M}, \widetilde{\mathcal{M}}$ задана в нормальной форме записи, т.е. им сопоставлены последовательности символов $\mathcal{W}, \widetilde{\mathcal{W}}$.

ЛЕММА 3. *Поверхность $\mathcal{M}$ регулярно вкладывается в поверхность $\widetilde{\mathcal{M}}$, если в последовательности $\mathcal{W}$ можно указать эквивалентную $\widetilde{\mathcal{W}}$ подпоследовательность, состоящую из символов, соответствующих отмеченным окружностям дерева.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через Λ объединение открытых сторон многоугольника $\widetilde{\mathcal{W}}$, соответствующих элементам указанной в формулировке леммы подпоследовательности последовательности $\widetilde{\mathcal{W}}$, и через $C\Lambda$ дополнение множества Λ до границы многоугольника $\widetilde{\mathcal{W}}$. Рассмотрим отображение Ψ , обладающее следующими свойствами: отображение Ψ переводит многоугольник $\widetilde{\mathcal{W}}$ на многоугольник $\mathcal{W}$, оно гомеоморфно на объединении Λ и внутренности многоугольника, линейно на всяком интервале множества Λ и стягивает в точку каждую из компонент $C\Lambda$. Отображение Ψ^{-1} переводит многоугольник $\mathcal{W}$ без вершин в многоугольник $\widetilde{\mathcal{W}}$. Линейность отображения на указанных интервалах границ многоугольников гарантирует непрерывность отображения вблизи одномерных клеток поверхности $\mathcal{M}$. Нетрудно убедиться, что отображение Ψ^{-1} задает искомое вложение поверхности $\mathcal{M}$ в поверхность $\widetilde{\mathcal{M}}$, и тем самым лемма доказана.

Отметим, что по существу верно также и утверждение, обратное утверждению леммы 3, а именно, если поверхность $\mathcal{M}$ регулярно вкладывается в поверхность $\widetilde{\mathcal{M}}$, то в нормальной форме записи поверхности $\mathcal{M}$ можно указать подпоследовательность символов, соответствующих отмеченным окружностям дерева, эквивалентную нормальной форме записи поверхности $\widetilde{\mathcal{M}}$.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 1. Начнем с того, что построим поверхность $\widetilde{M}$ такую, что пара поверхностей $M, \widetilde{M}$ удовлетворяет условиям леммы 3. Для этого зададим дерево окружностей $\{S_{i_1 i_2 \dots i_k}\}$ посредством точек ветвления $P_{i_1 i_2 \dots i_k} \in S_{i_1 i_2 \dots i_{k-1}} \cap S_{i_1 i_2 \dots i_k}$ ($k \leq 5$). Представляя дерево на плоскости (см. § 3), отрезки и точки, соответствующие

окружностям и точкам ветвления дерева, будем обозначать теми же символами S и P с соответствующими наборами индексов. Через (P_α, P_β) (α и β – векторные индексы) будем обозначать интервал дерева, начинающийся с точки ветвления P_α и заканчивающийся в точке ветвления P_β при первом проходе репера вдоль рассматриваемого дерева, начиная с точки P^* . Запись $P_\alpha \rightarrow P_\beta$ будет означать, что точка P движется вдоль дерева от точки ветвления P_α до точки ветвления P_β . В частности, запись $P_\alpha \rightarrow P_\alpha$ будет означать, что точка P проходит концевую окружность.

Рассмотрим проективную плоскость $\mathbb{RP}^2$ и обозначим ее бесконечно удаленную окружность через S_1 . На отрезке S_1 фиксируем произвольную точку P^* и репер (e_1, e_2) с началом в точке P^* , как указано в § 3. Фиксируем на отрезке S_1 три различные точки P_{1i} , $i = 1, 2, 3$, $P_{1i} \neq P^*$, пронумерованные в порядке движения репера при первом проходе по отрезку S_1 , начиная с точки P^* (например, слева направо). Далее, фиксируем точки: $P_{111} \neq P_{11}$ и $P_{1111} \neq P_{111}$; $P_{121} \neq P_{12}$ и $P_{122} \in (P_{121}, P_{12})$; $P_{131} \neq P_{13}$ и $P_{132} \in (P_{131}, P_{13})$; $P_{1221} \neq P_{122}$ и $P_{1222} \in (P_{1221}, P_{122})$; $P_{1311} \neq P_{131}$ и $P_{1312} \in (P_{1311}, P_{131})$; $P_{12211} \neq P_{1221}$; $P_{12221} \neq P_{1222}$; $P_{13111} \neq P_{1311}$; $P_{13121} \neq P_{1312}$. Эта последовательность определяет набор окружностей и их взаимное расположение, т.е. задает дерево. Тем самым необходимое нам дерево окружностей построено.

Индексы самопересечения окружностей $\{S_{i_1 i_2 \dots i_k}\}$ вычисляются следующим образом: i) индекс самопересечения $S_1 \subset \mathbb{RP}^2$ равен 1; ii) при выполнении σ -процесса возникающая окружность имеет индекс самопересечения 1; iii) при выполнении σ -процесса в точке, принадлежащей какой-либо заданной окружности, индекс самопересечения этой окружности уменьшается на единицу. Индексы самопересечения задаются по модулю 2, поскольку все возникающие в данной конструкции поверхности – неориентируемые. Индексы самопересечения построенного нами дерева приведены на рисунке, задающем представление нашего дерева на плоскости.

Проверкой убеждаемся, что при движении вдоль дерева, точка P проходит точки ветвления в следующем порядке: $P^* \rightarrow P_{11} \rightarrow P_{111} \rightarrow P_{1111} \rightarrow P_{1111} \rightarrow P_{111} \rightarrow P_{11} \rightarrow P_{12} \rightarrow P_{121} \rightarrow P_{121} \rightarrow P_{122} \rightarrow P_{1221} \rightarrow P_{12211} \rightarrow P_{12211} \rightarrow P_{1221} \rightarrow P_{1222} \rightarrow P_{12221} \rightarrow P_{12221} \rightarrow P_{1222} \rightarrow P_{122} \rightarrow P_{12} \rightarrow P_{13} \rightarrow P_{131} \rightarrow P_{1311} \rightarrow P_{13111} \rightarrow P_{13111} \rightarrow P_{1311} \rightarrow P_{1312} \rightarrow P_{13121} \rightarrow P_{13121} \rightarrow P_{1312} \rightarrow P_{131} \rightarrow P_{132} \rightarrow P_{132} \rightarrow P_{13} \rightarrow P^* \rightarrow P_{11} \rightarrow P_{111} \rightarrow P_{1111} \rightarrow P_{1111} \rightarrow P_{111} \rightarrow P_{11} \rightarrow P_{12} \rightarrow P_{122} \rightarrow P_{1221} \rightarrow P_{12211} \rightarrow P_{12211} \rightarrow P_{1221} \rightarrow P_{1222} \rightarrow P_{12221} \rightarrow P_{12221} \rightarrow P_{1222} \rightarrow P_{122} \rightarrow P_{121} \rightarrow P_{121} \rightarrow P_{12} \rightarrow P_{13} \rightarrow P_{132} \rightarrow P_{132} \rightarrow P_{131} \rightarrow P_{1311} \rightarrow P_{13111} \rightarrow P_{13111} \rightarrow P_{1311} \rightarrow P_{1312} \rightarrow P_{13121} \rightarrow P_{13121} \rightarrow P_{1312} \rightarrow P_{131} \rightarrow P_{13} \rightarrow P^*$.

Помня о том, что, сопоставляя интервалу $P_\alpha \rightarrow P_\beta$ какой-либо сим-

вол “ ω ”, соответствующему интервалу $P_\beta \rightarrow P_\alpha$ сопоставляется символ “ ω^{-1} ”, из указанного порядка прохождения точек ветвления мы получаем каноническую форму записи поверхности $\widetilde{M}$, а именно:

$$\begin{aligned} \widetilde{W} = & \alpha a_1 a_2 a a'_2 a'_1 \beta b_1 b b'_1 b_2 b_3 b_4 b'_3 b'_2 b'_5 b_6 b'_5 b'_2 b''_1 \gamma c_1 c_2 c_3 c_4 c'_3 c'_2 c_5 c_6 \\ & c'_5 c'_2 c'_1 c c'_1 \alpha a_1^{-1} a_2 a^{-1} a'_2 a_1^{-1} \beta b_1'^{-1} b_2 b_3'^{-1} b_4 b_3'^{-1} b'_2 b_5'^{-1} b_6 b_5'^{-1} b_2'' \\ & b_1'^{-1} b b_1^{-1} \gamma c_1'^{-1} c c_1'^{-1} c_2 c_3'^{-1} c_4 c_3'^{-1} c'_2 c_5'^{-1} c_6 c_5'^{-1} c'_2 c_1'^{-1}. \end{aligned}$$

В этом представлении окружности $\{S_{i_1 i_2 \dots i_k}\}$ получаются из склейки следующих наборов пар ориентированных ребер:

$$\begin{aligned} S_1 &= (\alpha, \alpha) \cup (\beta, \beta) \cup (\gamma, \gamma), & S_{11} &= (a_1, a_1^{-1}) \cup (a'_1, a_1'^{-1}), \\ S_{12} &= (b_1, b_1^{-1}) \cup (b'_1, b_1'^{-1}) \cup (b''_1, b_1''^{-1}), \\ S_{13} &= (c_1, c_1^{-1}) \cup (c'_1, c_1'^{-1}) \cup (c''_1, c_1''^{-1}), \\ S_{111} &= (a_2, a_2) \cup (a'_2, a'_2), & S_{1111} &= (a, a^{-1}), \\ S_{121} &= (b, b), \\ S_{122} &= (b_2, b_2) \cup (b'_2, b'_2) \cup (b''_2, b''_2), \\ S_{1221} &= (b_3, b_3^{-1}) \cup (b'_3, b_3'^{-1}), & S_{1222} &= (b_5, b_5^{-1}) \cup (b'_5, b_5'^{-1}), \\ S_{12211} &= (b_4, b_4), & S_{12221} &= (b_6, b_6), \\ S_{131} &= (c_2, c_2) \cup (c'_2, c'_2) \cup (c''_2, c''_2), & S_{132} &= (c, c), \\ S_{1311} &= (c_3, c_3^{-1}) \cup (c'_3, c_3'^{-1}), & S_{1312} &= (c_5, c_5^{-1}) \cup (c'_5, c_5'^{-1}), \\ S_{13111} &= (c_4, c_4), & S_{13121} &= (c_6, c_6). \end{aligned}$$

Убеждаемся, что последовательность $\widetilde{W}$ содержит следующую подпоследовательность: $W = abca^{-1}bc$. Следовательно, в силу леммы 3 получаем, что поверхность M регулярно вкладывается в поверхность $\widetilde{M}$. При

этом вложении, которое будем обозначать через Φ , одномерные клетки поверхности M отображаются следующим образом:

$$\Phi(l) = S_{1111} \setminus \{P_{1111}\}, \quad \Phi(l_+) = S_{121} \setminus \{P_{121}\}, \quad \Phi(l_-) = S_{132} \setminus \{P_{132}\}.$$

Таким образом, пункт а) утверждения 1 доказан.

Докажем теперь пункт б) утверждения 1, а именно, докажем, что отображение F из M в $\mathbb{R}^2$, рассматриваемое как отображение в $\mathbb{RP}^1 \times \mathbb{RP}^1$, непрерывно продолжается на всю поверхность $\tilde{M}$. Для этого необходимо напомнить определение отображения $F: M \rightarrow \mathbb{R}^2$, построенное в статье [1].

В плоскости $\mathbb{R}_{x,y}^2$ фиксируется кривая φ_+ со следующими свойствами:

- (1) φ_+ лежит в полуплоскости $\{y > 1\}$;
- (2) прямая $\{y = 1\}$ является асимптотой кривой φ_+ при x , стремящемся к $-\infty$, и при x , стремящемся к $+\infty$;
- (3) при движении точки от $-\infty$ до $+\infty$ угол между касательным вектором к кривой и вещественной осью монотонно изменяется от 0 до 2π ;
- (4) φ_+ имеет единственную особую точку, которая является точкой самопересечения.

Обозначим через D_+ ограниченную односвязную область в плоскости $\mathbb{R}_{x,y}^2$, граница которой является отрезком кривой φ_+ с концами в точке самопересечения. Фиксируем отображение F_+ из $\mathbb{R}_{\xi,\eta}^2$ в $\mathbb{R}_{x,y}^2$, обладающее следующими свойствами:

- (1) F_+ имеет складку вдоль прямой $l_+ = \{\eta = 0\}$ и локально гомеоморфно переводит эту прямую в кривую φ_+ ;
- (2) F_+ локально гомеоморфно отображает дополнение к прямой l_+ на дополнение к замыканию области D_+ ;
- (3) при стремлении точки $P \in \mathbb{R}_{\xi,\eta}^2$ к бесконечности ее образ также стремится к бесконечности.

Далее мы ограничимся рассмотрением части плоскости $\mathbb{R}_{\xi,\eta}^2$, лежащей над полуплоскостью $\{y \geq 0\}$. Эту замкнутую область мы обозначим через M_+ .

Над полуплоскостью $\{y \leq 0\}$ симметрично относительно оси x построим аналогичную поверхность M_- и обозначим все объекты новой конструкции теми же соответствующими буквами предыдущей, но с индексом “-”. Край каждой из поверхностей M_+ , M_- лежит над прямой $\{y = 0\}$ и состоит из четырех связанных компонент, которые обозначим через γ_{+i} , γ_{-i} , $i = 1, \dots, 4$. Нумерация индекса i произведена так, что кривые γ_{+i} , γ_{-i} лежат на i -м квадранте плоскости $\mathbb{R}_{x,y}^2$. Многообразие M получается из склейки над осью x следующих пар граничных кривых:

$$(\gamma_{+1}, \gamma_{-3}), \quad (\gamma_{+2}, \gamma_{-2}), \quad (\gamma_{+3}, \gamma_{-1}), \quad (\gamma_{+4}, \gamma_{-4}),$$

и отображение F определяется так:

$$F(P) = \begin{cases} F_+(P), & P \in M_+, \\ F_-(P), & P \in M_-. \end{cases}$$

Наконец, кроме кривых l_+, l_- , мы рассмотрим кривую $l = \gamma_{+4} = \gamma_{-4}$. Отметим, что отображение F переводит кривую l на прямую $\varphi = \{y = 0\}$ и каждая точка из l является точкой локальной гомеоморфности для отображения F .

Для того, чтобы доказать возможность продолжения отображения F на всю поверхность $\widetilde{M}$, необходимо отметить некоторые дополнительные свойства указанного выше отображения.

Для того, чтобы образы выделенных кривых l_+, l_- , l при подходе точки P к концам каждой одномерной клетки имели одинаковую предельную точку (∞, ∞) на торе $\mathbb{RP}^1 \times \mathbb{RP}^1$, сделаем в плоскости $\mathbb{R}_{x,y}^2$ вращение координатных осей x, y вокруг точки $(0, 0)$ на угол $\pi/4$ по часовой стрелке. Отображение F будем продолжать так, что все окружности, за исключением отмеченных, отображаются в точку (∞, ∞) . В прообразе, в двумерной клетке $\mathbb{R}^2 \subset \widetilde{M}$, фиксируем окружность большего радиуса, и пусть точка P монотонно один раз проходит эту окружность. Это движение точки можно понимать как движение точки вблизи дерева, при котором вдоль каждого из интервалов дерева точка проходит дважды: при первом проходе – с одной стороны от интервала, при втором – с другой стороны, возможно в различных направлениях движения. Для определенности будем считать, что в начале движения точка P проходит вдоль окружности S_{1111} , или, точнее говоря, вдоль интервала (P_{1111}, P_{1111}) . При этом образ точки при отображении F пройдет вдоль кривой φ , начиная и кончая движение в окрестности U точки (∞, ∞) в направлении возрастания x , находясь во время движения всегда над кривой φ . Далее, при движении точки P вплоть до интервала (P_{121}, P_{121}) образ этой точки будет оставаться в окрестности U , и при проходе вдоль интервала (P_{121}, P_{121}) точка $F(P)$, пройдя вдоль кривой φ_+ , опять придет к точке (∞, ∞) . Далее, при движении точки P вплоть до интервала (P_{132}, P_{132}) точка P последовательно проходит среди других интервалов интервалы (P_{12211}, P_{12211}) , (P_{12221}, P_{12221}) , (P_{13111}, P_{13111}) , (P_{13121}, P_{13121}) . Проверкой убеждаемся, что в образе точка $F(P)$ сначала монотонно проходит целиком и один раз вдоль окружности $C_y = \{x = \infty\}$, уходя из точки (∞, ∞) и придя опять к этой точке, двигаясь в направлении возрастания y , потом монотонно проходит целиком и один раз вдоль окружности $C_x = \{y = \infty\}$, уходя из точки (∞, ∞) и придя опять к этой точке, двигаясь в направлении возрастания x , и еще раз совершает вышесказанное движение, проходя вдоль окружностей C_y, C_x в том же порядке, но двигаясь в направлениях уменьшения y, x соответственно. Без ограничения общности, можем считать, что при движении точки P вдоль интервала (P_{12211}, P_{12211}) , и только при этом движении, точка $F(P)$ движется вдоль окружности C_y вне

окрестности U , при движении точки P вдоль интервала (P_{12211}, P_{12211}) , и только при этом движении, точка $F(P)$ движется вдоль окружности C_x вне окрестности U , и так далее. Понятно, что при движении точки P вдоль каждого из интервалов между (P_{11111}, P_{11111}) и (P_{132}, P_{132}) , отличного от вышеперечисленных, ее образ $F(P)$ обязан лежать в окрестности U точки (∞, ∞) . Далее, точка P пройдет вдоль интервала (P_{132}, P_{132}) и одновременно ее образ $F(P)$ пройдет вдоль кривой φ_- , уходя из точки (∞, ∞) и опять придя к этой точке. В конечном счете, проверкой убеждаемся, что с помощью рассуждений, аналогичных предыдущим, можем добиться того, что точка $F(P)$ будет уходить из окрестности U лишь при движении вдоль следующих отмеченных окружностей: $S_{11111}, S_{121}, S_{12211}, S_{12221}, S_{13111}, S_{13121}, S_{132}$. Точка P пройдет вдоль каждой из этих окружностей дважды, и при этом точка $F(P)$ пройдет последовательно вдоль следующих кривых: $\varphi, \varphi_+, C_y, C_x, C_y, C_x, \varphi_-$. При этом важно отметить следующее обстоятельство: при проходе точки P вдоль каждой из указанных окружностей, точка $F(P)$ при первом и при втором проходе дважды проходит вдоль одной и той же кривой из $\varphi, \varphi_+, \varphi_-, C_x, C_y$ и при этом имеет место следующее согласование по ориентации: если при первом и втором проходе фиксированная отмеченная окружность проходится в одном и том же направлении, то и в образе точка $F(P)$ проходит соответствующую кривую оба раза в одном и том же направлении, и соответственно, если P проходит отмеченную окружность в различных направлениях, то и в образе $F(P)$ проходит соответствующую кривую в различных направлениях. При построении примера, обеспечение именно этого свойства и было основной трудностью при выборе топологии дерева. Сделав при необходимости гомеоморфное преобразование $\mathbb{R}^2 \subset \widetilde{M}$, наличие этого свойства позволяет утверждать, что при подходе точки P к точке дерева с одной и с другой стороны от линии дерева, предел значения $F(P)$ будет существовать и будет одним и тем же. Таким образом, отображение F непрерывно продолжается на всю поверхность $\widetilde{M}$. Утверждение 1 доказано.

В заключение автор выражает искреннюю благодарность А. Г. Витушкину за постановку задачи и руководство.

Математический институт
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило
16.10.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Делл' Аччио Ф. Контрпример к одной гипотезе, связанной с проблемой о якобиане // Матем. заметки. 1995. Т. 58. № 3. С. 452–455.
- [2] Цишанг Х., Фогт Э., Колдевай Х.-Д. Поверхности и разрывные группы. М.: Наука, 1988.