Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. С. Маркарян, Гомологии групп кос с нетривиальными коэффициентами, *Матем. заметки*, 1996, том 59, выпуск 6, 846–854

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1783>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 18:11:35

ГОМОЛОГИИ ГРУПП КОС С НЕТРИВИАЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Н. С. Маркарян

Введение

(Ко)гомологии групп кос изучались в работах [1]–[5]. Результаты оттуда (те, что не касаются умножения в когомологиях) получены в данной статье единым образом.

Рассмотрим несвязное объединение классифицирующих пространств групп кос

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} K(\mathrm{Br}(i), 1).$$

На нем можно ввести структуру h -пространства (подобно тому, как это делается на $K(\mathrm{Br}(\infty), 1)$, см. [4]). Гомологии такого пространства являются биградуированным кольцом относительно умножения Понтрягина. Основной результат работы состоит в том, что для некоторых систем коэффициентов (в частности, для систем из всех работ, указанных выше) это кольцо совпадает с когомологическим кольцом некоторой алгебры, устроенной достаточно просто.

В первой части проводятся подробные вычисления для альтернирующей системы коэффициентов (см. [2]). Во второй части аналогично рассматривается более общий случай, который включает в себя тривиальные коэффициенты (см. [1], [4]) и систему коэффициентов из [3].

Я благодарен В. А. Васильеву за постановку задачи и ценные обсуждения. Данная работа аннотирована в препринте Независимого московского университета 12.07.94.

1. Кольцо $H_*(\mathrm{Br}(*), \pm K)$

1.1. Алгебра разделенных полиномов. Определим необходимое понятие.

Работа выполнена при финансовой поддержке Международного научного фонда, грант MQO000.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1.1. Пусть K – кольцо с единицей. Алгеброй *разделенных полиномов* $\Gamma_K(t^{(m)})$ называется градуированная алгебра над K с образующими t_i ($i \in \mathbb{N}$, $\deg t_i = im$) и соотношениями

$$t_i t_j = \binom{i+j}{i} t_{i+j}.$$

Рассмотрим комплекс, вычисляющий гомологии этой алгебры при $m = 1$, полученный из бар-резольвенты (аугментация – умножение на компоненту нулевой степени)

$$0 \xleftarrow{\partial} K = C_0 \xleftarrow{\partial} C_1 \xleftarrow{\partial} C_2 \xleftarrow{\partial} \dots$$

K -модуль C_n свободно порожден мономами вида $t_{i_0} \otimes \dots \otimes t_{i_n}$, на которых ∂ действует так:

$$\begin{aligned} \partial(t_{i_0} \otimes \dots \otimes t_{i_n}) &= \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{j+1} t_{i_0} \otimes \dots \otimes t_{i_j} t_{i_{j+1}} \otimes \dots \otimes t_{i_n} \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{j+1} \binom{i_j + i_{j+1}}{i_j} t_{i_0} \otimes \dots \otimes t_{i_j + i_{j+1}} \otimes \dots \otimes t_{i_n}. \end{aligned}$$

Так как алгебра градуирована, то C распадается в прямую сумму комплексов разных градуировок

$$\begin{aligned} C &= \bigoplus_{i=0}^{\infty} C^{(i)}, \quad C^{(n)} : 0 \xleftarrow{\partial} C_0^{(n)} \xleftarrow{\partial} C_1^{(n)} \xleftarrow{\partial} \dots, \\ \deg(t_{i_0} \otimes \dots \otimes t_{i_k}) &= i_1 + \dots + i_k. \end{aligned}$$

Если $a \in C_k^{(n)}$, то скажем, что

$$\deg a = n, \quad \dim a = k, \quad \text{Dim } a = \deg a - \dim a.$$

1.2. Когомологии групп кос с подкрученными коэффициентами. Если обозначить $t_{i_1} \otimes \dots \otimes t_{i_k}$ символом $(i_1, \dots, i_k)$, то $C^{(n)}$ совпадет с комплексом, выписанным в [2] и считающим когомологии $\text{Br}(n)$ с коэффициентами в $K \otimes T$ (T – система подкрученных коэффициентов из [2], следящая за четностью перестановки нитей косы), причем градуировка Dim на $C^{(n)}$ совпадает с размерностью в $H^*(\text{Br}(n), \pm K)$.

Докажем простую лемму (в дальнейшем нам потребуется ее обобщение).

ЛЕММА 1.2.1. *Группа гомологий комплекса $C^{(n)}$ ($K = \mathbb{Z}$) при $n > 1$ аннулируется умножением на $n!$.*

СЛЕДСТВИЕ. Группы гомологий $C^{(n)}$, а, следовательно, и группы $H^*(\text{Br}(n), \mathbb{Z})$, конечны при $n > 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим в комплексе $C^{(n)}$ подкомплекс $C'^{(n)}$ с образующими $[i_1, \dots, i_k]$,

$$[i_1, \dots, i_k] = i_1! \cdots i_k! (i_1, \dots, i_k).$$

$C'^{(n)}$ является подкомплексом, так как

$$\partial[i_1, \dots, i_k] = \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{j+1} [i_1, \dots, i_j + i_{j+1}, \dots, i_k].$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.2.1. Комплекс $C'^{(n)}$ ацикличесен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим гомотопию s между нулевым и тождественным эндоморфизмами комплекса

$$s[i_1, \dots, i_k] = \begin{cases} [1, i_1 - 1, \dots, i_k] & \text{при } i_1 > 1, \\ 0 & \text{при } i_1 = 1. \end{cases}$$

$$s\partial + \partial s = id,$$

следовательно, $C'^{(n)}$ ацикличесен.

Из точной последовательности пары $(C^{(n)}, C'^{(n)})$ и ациклическости $C'^{(n)}$ следует, что

$$H_*(C^{(n)}) = H_*(C^{(n)}/C'^{(n)}).$$

Так как $(i_1 + \dots + i_k)!$ делится на $i_1! \cdots i_k!$, то группы цепей комплекса $C^{(n)}/C'^{(n)}$ аннулируются умножением на $n!$, а, следовательно, аннулируются и группы гомологий. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Конечность группы $H_*(C^{(n)})$ при $n > 1$ следует из того, что $\Gamma_{\mathbb{Q}}(t) = \mathbb{Q}[t]$.

1.3. Кольцо $H_*(\text{Br}(*), \pm K)$. Рассмотрим стандартные гомоморфизмы

$$\varphi_{ij}: \text{Br}(i) \times \text{Br}(j) \rightarrow \text{Br}(i + j),$$

$\text{Br}(0)$ по определению тривиальна,

$$\varphi_{0i}: \text{Br}(0) \times \text{Br}(i) \rightarrow \text{Br}(i)$$

и

$$\varphi_{i0}: \text{Br}(i) \times \text{Br}(0) \rightarrow \text{Br}(i)$$

— изоморфизмы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3.1. *Кольцом* $H_*(\mathrm{Br}(*), \pm K)$ называется биградуированное кольцо (градуировки – неотрицательные целые: степень $\deg$ и размерность $\dim$), компонента степени n и размерности d которого есть $H_d(\mathrm{Br}(n), \pm K)$, а умножение задано формулой

$$H_{d_1}(\mathrm{Br}(n_1), \pm K) \otimes H_{d_2}(\mathrm{Br}(n_2), \pm K) \xrightarrow{i} H_{d_1+d_2}(\mathrm{Br}(n_1) \times \mathrm{Br}(n_2), \pm K) \xrightarrow{\varphi_{n_1 n_2}^*} H_{d_1+d_2}(\mathrm{Br}(n_1 + n_2), \pm K),$$

где i – естественное вложение.

Как и в предыдущем пункте, $H_*(\mathrm{Br}(*), \pm K)$ есть (с точностью до размерности) когомологии алгебры $\Gamma_K(t)$. Умножение в $H_*(\mathrm{Br}(*), \pm K)$ так определяется в представителях:

$$(i_1, \dots, i_{n_1}) \cdot (j_1, \dots, j_{n_2}) = (i_1, \dots, i_{n_1}, j_1, \dots, j_{n_2})$$

и по определению совпадает с когомологическим умножением в $H^*(\Gamma_K(t))$.

Таким образом, задача вычисления $H_*(\mathrm{Br}(*), \pm K)$ сводится к вычислению кольца когомологий алгебры $\Gamma_K(t)$. Достаточно провести вычисления для $K = \mathbb{Z}$.

ТЕОРЕМА 1.3.1.

1. $H_*(\mathrm{Br}, \pm \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[x_0, x_1, x_2, \dots]$, $\deg x_i = 2^i$, $\dim x_i = 2^i - 1$.
2. Для любого простого $p > 2$

$$H_*(\mathrm{Br}, \pm \mathbb{Z}_p) \cong \mathbb{Z}_p[y_1, y_2, y_3, \dots] \otimes \Lambda[x_0, x_1, x_2, \dots],$$

$$\deg y_i = \deg x_i = p^i, \dim y_i = p^i - 2, \dim x_i = p^i - 1.$$

3. Гомоморфизм Бокиштейна

$$\beta_p: H_*(\mathrm{Br}(n), \pm \mathbb{Z}_p) \rightarrow \beta_p: H_{*-1}(\mathrm{Br}(n), \pm \mathbb{Z}_p)$$

действует так:

$$\begin{aligned} \text{а) } \beta_2 x_i &= x_{i-1}^2, & i > 0, & \quad \beta_2 x_0 = 0; \\ \text{б) } \beta_p x_i &= y_i, \quad \beta_p y_i = 0, & i > 0, & \quad \beta_p x_0 = 0. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Кольцо $H_*(\mathrm{Br}(*), \pm \mathbb{Z}_2)$ вычислено в [4].

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Как и в [1] из вида β_p следует, что в $H_*(\mathrm{Br}(n), \pm \mathbb{Z})$ при $n > 1$ отсутствует p^2 -кручение, что позволяет немедленно посчитать когомологии с коэффициентами в $\pm \mathbb{Z}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Приведем одну подготовительную лемму.

ЛЕММА 1.3.1. Пусть p – простое число, $[x]_p$ – максимальная степень p , на которую делится x , $d_p(x)$ – сумма цифр в p -ичной записи x . Тогда

$$\left[\binom{i+j}{i} \right]_p = \frac{d_p(i) + d_p(j) - d_p(i+j)}{p-1}.$$

СЛЕДСТВИЕ. Имеем

$$\binom{i+j}{i} \equiv 0 \pmod{p}$$

тогда и только тогда, когда при сложении i и j в столбик в p -ичном представлении переносятся единицы из разряда в разряд.

Отсюда получается следующая лемма.

ЛЕММА 1.3.2. $\Gamma_{\mathbb{Z}_p}(t) \cong \bigotimes_{i=0}^{\infty} \mathbb{Z}_p[u_i]/(u_i^p)$, где $\deg u_i = p^i$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Изоморфизм записывается так:

$$t_i \rightarrow \frac{u_0^{k_0} u_1^{k_1} \dots u_r^{k_r}}{i! / p^{[i!]_p}},$$

где $\overline{k_r \dots k_1 k_0}$ – p -ичная запись числа i .

Чтобы посчитать кохомологии $\Gamma_{\mathbb{Z}_p}(t)$, осталось вычислить

$$H^*(\mathbb{Z}_p[u]/(u^p))$$

и воспользоваться тем, что кохомологии тензорного произведения алгебр – супертензорное произведение кохомологий.

ЛЕММА 1.3.3. Справедливо

$$H^*(K(u)/(u^n)) \cong \begin{cases} K[x], & \deg x = \dim x = 1 & \text{при } n = 2; \\ K[y] \otimes \Lambda[x], & \deg x = \dim x = 1, \\ & \deg y = n, \dim y = 2 & \text{при } n > 2. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно рассмотреть случай $K = \mathbb{Z}$.

Мы вычислим гомологии алгебры $A_n = \mathbb{Z}[u]/(u^n)$ и коумножение в них. Запишем комплекс, считающий гомологии A_n . Компонента размерности d порождена мономами вида $u^{i_1} \otimes \dots \otimes u^{i_d} = (i_1, \dots, i_d)$, на которых ∂ действует так:

$$\partial(u^{i_1} \otimes \dots \otimes u^{i_d}) = \sum_{j=1}^{d-1} (-1)^{j+1} u^{i_1} \otimes \dots \otimes u^{i_j} u^{i_{j+1}} \otimes \dots \otimes u^{i_d}.$$

Воспользуемся тем, что A_n похожа на $\mathbb{Z}[x]$ и посмотрим, где сходство кончается. Рассмотрим оператор $p = id - (\partial s + s \partial)$, где s – оператор из

утверждения 1.2.1. Если c — цикл, то $pc = c - \partial(sc) \sim c$ (' $\sim$ ' означает гомологичность). Элементы из образа p суть линейные комбинации мономов, начинающихся с единицы (т.е. вида $(1, i_1, \dots)$). Элементы $p(1, i_1, \dots)$ нулевые или имеют вид $(1, n-1, j_1, \dots)$, т.е. всякий цикл гомологичен циклу, составленному из мономов вида $(1, n-1, j_1, \dots)$. Так как $u^{n-1} \cdot u^i = 0$ при $i > 0$, то

$$\partial(u \otimes u^{n-1} \otimes u^{j_1} \otimes u^{j_2} \otimes \dots) = u \otimes u^{n-1} \otimes \partial(u^{j_1} \otimes u^{j_2} \otimes \dots),$$

т.е. часть $u \otimes u^{n-1}$ отделяется и можно повторить предыдущие рассуждения.

Таким образом, любой класс гомологий имеет представителя вида

$$(1, n-1, 1, \dots, n-1)$$

или

$$(1, n-1, 1, \dots, n-1, 1).$$

Обозначим моном $(1, n-1, 1, \dots)$ через $l_{1+(n-1)+1+\dots}$.

Используя оператор p , можно установить, что $(1, n-1, 1, \dots, n-1) \sim (n-1, 1, n-1, \dots, n-1, 1)$.

Рассмотрим коумножение $m: H_* \rightarrow H_* \otimes H_*$.

$$\begin{aligned} m((1, n-1, 1, \dots)) &= m(l_N) \\ &= 1 \otimes (1, n-1, 1, \dots) + (1) \otimes (n-1, 1, \dots) + (1, n-1) \otimes (1, \dots) + \dots \\ &= \sum_{M+L=N} l_M \otimes l_L, \end{aligned}$$

так как $(n-1, 1, \dots, 1, n-1) \sim 0$, $(n-1, 1, \dots, n-1, 1) \sim (1, n-1, \dots, 1, n-1)$.

Из вида коумножения в H_* следует, что умножение в H^* устроено так, как утверждает лемма.

Из леммы 1.3.3 сразу получаются первые две части теоремы.

Выпишем циклы, представляющие x_i и y_i (пока они определены с точностью до числового множителя). Класс x_i определим как класс гомологий цикла (p^i) .

$$\beta_p x_i = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^{p^i-1} \binom{p^i}{j} (j, p^i - j) \neq 0 \quad (\text{при } i > 0),$$

так как, например,

$$\left[\binom{p^i}{p^{i-1}} \right]_p = 1$$

(если $p = 2$, то это единственный ненулевой коэффициент). Более того, $\beta_p x_i$ не гомологичен нулю, так как границ соответствующей степени и размерности нет. Следовательно, $\beta_2 x_i = x_{i-1}^2$, а при $p > 2$ мы определим y_i как $\beta_p x_i$.

Теорема доказана.

2. Кольцо $H_*(\mathrm{Br}(*), K_q)$

2.1. Система локальных коэффициентов K_q и алгебра q -разделенных полиномов. Пусть $\mathrm{Br}(n)'$ – коммутант группы $\mathrm{Br}(n)$,

$$0 \rightarrow \mathrm{Br}(n)' \xrightarrow{i} \mathrm{Br}(n) \xrightarrow{j} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

– соответствующая точная последовательность.

Пусть K – кольцо с единицей, q – его обратимый элемент. Рассмотрим на $K(\mathrm{Br}(n), 1)$ систему локальных коэффициентов K_q : в каждой точке это K , а при обходе по пути $g \in \mathrm{Br}(n)$ K умножается на $q^{j(g)}$.

Комплекс, считающий гомологии (когомологии) $\mathrm{Br}(n)$ в K_q выписан в [3] и, как в первой части, прямая сумма по n таких комплексов совпадает (с точностью до размерности) с комплексом, считающим гомологии (когомологии) алгебры, определенной ниже.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1.1. Пусть K – кольцо с единицей, q – его обратимый элемент. Алгеброй q -разделенных полиномов $\Gamma_K(t^{(m)}, q)$ называется градуированная алгебра над K с образующими t_i ($i \in \mathbb{N}$, $\deg t_i = im$) и соотношениями

$$t_i t_j = \binom{i+j}{i}_q t_{i+j}.$$

Здесь

$$\binom{i+j}{i}_q = \frac{(1-q)(1-q^2) \cdots (1-q^{i+j})}{(1-q) \cdots (1-q^i) \cdot (1-q) \cdots (1-q^j)}$$

– q -биномиальный коэффициент; если q коммутирует с a и b , а $ba = qab$, то

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}_q a^i b^{n-i}.$$

Биградуированное кольцо $H_*(\mathrm{Br}(*), K_q)$, определяемое как в первой части, есть, с точностью до размерности, когомологическое кольцо $H^*(\Gamma_K(t, -q))$.

Например, $H_*(\mathrm{Br}(*), K_1)$ совпадает с $H^*(\Gamma_K(t, -1))$, а $\Gamma_K(t, -1) \cong \Gamma_K(t^2, 1) \otimes \Lambda[t]$, что позволяет посчитать гомологии $H_*(\mathrm{Br}(n), K)$ с тривиальными коэффициентами (см. также [1]).

2.2. Система $K[q, q^{-1}]_q$ и гомологии коммутанта группы кос. Рассмотрим кольцо полиномов Лорана $K[q, q^{-1}]$ и кольцо гомологий $H_*(\mathrm{Br}, K[q, q^{-1}]_q)$. Этот пример универсален в том смысле, что иногда, зная эти гомологии, мы можем посчитать $H_*(\mathrm{Br}(*), K_q)$ для любого обратимого q из K (например, если K – поле).

С другой стороны, $H_*(\mathrm{Br}(n), K[q, q^{-1}]_q)$ есть $H_*(\mathrm{Br}(n)', K_q)$ как K -модуль (см. также [3]); действие группы $\mathbb{Z} = \mathrm{Br}(n)/\mathrm{Br}(n)'$ на нем (умножение на q) индуцировано действием $\mathrm{Br}(n)$ на $\mathrm{Br}(n)'$ посредством

сопряжений, так как внутренние автоморфизмы индуцируют тождественное отображение в гомологиях.

Рассмотрим случай $K = \mathbb{Q}$.

Теория модулей над $\mathbb{Q}[q]$ (и $\mathbb{Q}[q, q^{-1}]$) параллельна теории $\mathbb{Z}$ -модулей, а именно, верна следующая лемма, которая легко выводится из соответствующего утверждения для $\mathbb{Q}[q]$ (см. [6]).

ЛЕММА 2.2.1. *Конечнопорожденный $\mathbb{Q}[q, q^{-1}]$ -модуль есть прямая сумма модулей вида $\mathbb{Q}[q, q^{-1}]$ и $\mathbb{Q}[q, q^{-1}]/p(q)$, где $p(q)$ — полином с ненулевым свободным членом.*

Наше вычисление $H_*(\mathrm{Br}(*), \mathbb{Q}[q, q^{-1}]_q)$ во многом аналогично вычислению $H_*(\mathrm{Br}(*), \pm\mathbb{Z})$ из первой части.

ЛЕММА 2.2.2. *$\mathbb{Q}[q, q^{-1}]$ -модули $H_*(\mathrm{Br}(n), \mathbb{Q}[q, q^{-1}]_q)$ ($n > 1$) аннулируются умножением на $(n!)_q = (1+q) \cdots (1+q+\cdots+q^{n-1})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству леммы 1.2.1.

Аналогом простых чисел у нас будут круговые полиномы $K_n(q)$ ($n \in \mathbb{N}$). Верна следующая лемма (см. [6]).

ЛЕММА 2.2.3.

1. $K_n(q)$ неприводимы и взаимно просты.
2. $1 + q + \cdots + q^{n-1} = \prod_{i>1, i|n} K_i(q)$.
3. $\deg K_n(q) = \varphi(n)$, где $\varphi(n)$ — функция Эйлера.

Обозначим $\mathbb{Q}[q, q^{-1}]/(K_n(q))$ через R_n .

ЛЕММА 2.2.4. $\Gamma_{R_n}(t, q) \cong R_n[t^n] \otimes (R_n[t]/(t^n))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 2.2.3 части 2 следует, что

$$\binom{i+j}{i}_q \equiv 0 \pmod{K_n}$$

тогда и только тогда, когда

$$\left\lfloor \frac{i+j}{n} \right\rfloor > \left\lfloor \frac{i}{n} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{j}{n} \right\rfloor.$$

Так как R_n — поле, то наша лемма получается отсюда так же, как лемма 1.3.2 из леммы 1.3.1.

ЛЕММА 2.2.5. *Справедливо*

$$H_*(\Gamma_{R_n}(t, q)) \cong \Lambda[x_1] \otimes (R_n[y] \otimes \Lambda[x]),$$

где

$$\begin{aligned} \deg x_1 &= n, & \dim x_1 &= 1, \\ \deg y &= n, & \dim y &= 2, \\ \deg x &= 1, & \dim x &= 1. \end{aligned}$$

Гомоморфизм Бокштейна β_{K_n} действует так:

$$\beta_{K_n} x_1 = y, \quad \beta_{K_n} x = \beta_{K_n} y = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично рассуждениям в части 1 при доказательстве теоремы 1.3.1.

Из вида гомоморфизма Бокштейна следует, что в $H^*(\Gamma_{\mathbb{Q}[q, q^{-1}]}(t, q))$ отсутствует K_n^2 -кручение (в степенях, больших 1), а ядро β_{K_n} дает R_n -компоненту модуля $H^*(\Gamma_{\mathbb{Q}[q, q^{-1}]}(t, q))$.

ТЕОРЕМА 2.2.1. *Справедливо*

$$H_*(\mathrm{Br}(*), \mathbb{Q}[q, q^{-1}]_q) \cong \mathbb{Q}[q, q^{-1}][x_1, x_2, x_3, \dots] / (K_2(-q)x_1^2, K_3(-q)x_3, K_4(-q)x_4, \dots),$$

где

$$\deg x_1 = 1, \quad \dim x_1 = 0, \\ \deg x_i = i \quad \text{и} \quad \dim x_i = i - 2 \quad \text{при} \quad i > 2.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Так как $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[q, q^{-1}] / K_n(-q) = \deg K_n(-q) = \varphi(n)$, то из теоремы следует результат из [3].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аддитивная часть нами доказана, а умножение получается из вида представителей ($x_1 = [(1)]$, $x_i = [\beta_{K_i}(i)]$) и умножения над R_i .

Независимый московский университет

Поступило
31.10.94

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Вайнштейн Ф. В. Когомологии групп кос // Функцион. анализ и его прилож. 1978. Т. 12. № 2. С. 72–73.
- [2] Васильев В. А. Когомологии групп кос и сложность алгоритмов // Функцион. анализ и его прилож. 1988. Т. 22. № 3. С. 15–24.
- [3] Френкель Э. В. Когомологии коммутанта группы кос // Функцион. анализ и его прилож. 1988. Т. 22. № 3. С. 91–92.
- [4] Фукс Д. Б. Когомологии группы кос mod 2 // Функцион. анализ и его прилож. 1970. Т. 4. № 24. С. 46–59.
- [5] Cohen F. R. The homology of C_{n+1} -spaces, $n \geq 0$ // The homology of iterated loop spaces / ed. F. R. Cohen, T. J. Lada, J. P. May. Lect. Notes Math. V. 533. New York, Berlin: Springer Verlag, 1976. P. 207–353.
- [6] Ленг С. Алгебра. М.: Мир, 1968.