Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Нестеренко, Некоторые замечания о $\zeta(3)$,
Матем. заметки, 1996, том 59, выпуск 6, 865–880

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1785>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 08:48:57

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ О $\zeta(3)$

Ю. В. Нестеренко

В 1978 г. Р. Апери доказал следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1 [1]. *Число*

$$\zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

иррационально, и для любой постоянной $\mu > 13.4178202\dots$ неравенство

$$\left| \zeta(3) - \frac{p}{q} \right| < q^{-\mu}$$

имеет только конечное число решений в целых числах p и q .

Точное значение константы $13.4178202\dots$ есть

$$1 + \frac{4 \ln \beta + 3}{4 \ln \beta - 3},$$

где $\beta = \sqrt{2} + 1$.

Как хорошо известно, для значений дзета-функции Римана

$$\zeta(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{-s}$$

в четных точках есть явные выражения

$$\zeta(2k) = (-1)^{k-1} \frac{(2\pi)^{2k}}{2(2k)!} B_{2k},$$

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 94-01-00739.

где $B_{2k} \in \mathbb{Q}$ – числа Бернулли, удовлетворяющие рекуррентным уравнениям

$$\sum_{r=0}^n \binom{n+1}{r} B_r = 0, \quad n = 1, 2, \dots,$$

и условию $B_0 = 1$. Так, например, $\zeta(2) = \pi^2/6$, $\zeta(4) = \pi^4/90$. Эти выражения доказывают трансцендентность чисел $\zeta(2k)$. Об арифметических же свойствах значений дзета-функции в нечетных точках до результата Аперии не было известно ничего.

В основе доказательства Аперии лежит открытая им последовательность рациональных приближений к числу $\zeta(3)$. Ее можно задать, например, как последовательность подходящих дробей непрерывной дроби

$$\zeta(3) = \cfrac{6}{5} - \cfrac{1}{117} - \cfrac{64}{535} - \dots - \cfrac{n^6}{34n^3 + 51n^2 + 27n + 5} - \dots, \quad (1)$$

сходящейся к $\zeta(3)$, или с помощью следующего рекуррентного уравнения

$$(n+1)^3 u_{n+1} - (34n^3 + 51n^2 + 27n + 5)u_n + n^3 u_{n-1} = 0, \quad (2)$$

которому удовлетворяют числители v_n и знаменатели u_n этих подходящих дробей, и начальных условий

$$v_0 = 0, \quad v_1 = 6, \quad u_0 = 1, \quad u_1 = 5,$$

или с помощью явного задания этих последовательностей

$$u_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2, \quad v_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2 \cdot c_{n,k}, \quad n \geq 1, \quad (3)$$

где

$$c_{n,k} = \sum_{m=1}^n \frac{1}{m^3} + \sum_{m=1}^k \frac{(-1)^{m-1}}{2m^3} \binom{n}{m}^{-1} \binom{n+m}{m}^{-1}.$$

Наибольшие трудности в доказательстве вызывает проверка того, что последовательности (3) удовлетворяют рекуррентному уравнению (2).

Сам Аперия опубликовал лишь набросок рассуждений. Подробные изложения этого доказательства можно найти в работах [2], [3], [4].

За прошедшие с тех пор почти 20 лет не было получено ничего принципиально нового. В различных статьях, лишь осмысливался феномен, открытый Аперии.

Ф. Бейкерс (1979, [5]) предложил иную интерпретацию рациональных приближений Аперии к $\zeta(3)$. Справедливо равенство

$$J = \int_0^1 \int_0^1 -\frac{\ln(xy)}{1-xy} Q_n(x) Q_n(y) dx dy = 2(u_n \zeta(3) - v_n),$$

где $Q_n(x) = \frac{1}{n!} \cdot (d/dx)^n (x^n(1-x)^n) \in \mathbb{Z}[x]$ – многочлены Лежандра и u_n, v_n – числа Апери (3).

М. Хата (1990, [6]), видоизменяя интеграл J и, следовательно, изменяя рациональные приближения к $\zeta(3)$, доказал утверждение теоремы 1 при любом $\mu > 8.8302837\dots$

В 1979 г. в работе [7] Л. А. Гутник доказал, что при любом рациональном числе $q, q \neq 0$, среди чисел

$$3\zeta(3) + q \cdot \zeta(2), \quad \zeta(2) + 2q \cdot \ln 2$$

имеется иррациональное. Важную роль в доказательстве играют полилогарифмические функции

$$L_r(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^r}, \quad r \geq 1,$$

и, так называемые G -функции Мейера (см. [8]). С их помощью в [7] устанавливаются явные конструкции функций

$$\begin{aligned} G_n(z) &= 2A_n(z) \cdot L_3(z^{-1}) + B_n(z) \cdot L_2(z^{-1}) + C_n(z), \\ H_n(z) &= A_n(z) \cdot L_2(z^{-1}) + B_n(z) \cdot L_1(z^{-1}) + D_n(z), \end{aligned}$$

где A_n, B_n, C_n, D_n – многочлены от z с рациональными коэффициентами степени не выше n , удовлетворяющих условиям

$$\text{ord}_{z=\infty} G_n(z) \geq n+1, \quad \text{ord}_{z=\infty} H_n(z) \geq n+1.$$

Эта функциональная конструкция используется в [7] при $z = -1$. Для многочленов A_n, B_n, C_n, D_n также имеются явные выражения, из которых, в частности, следует, что $A_n(1) = u_n, C_n(1) = -2v_n$ и $B_n(1) = 0$.

В 1981 г. Ф. Бейкерс [9] доказал единственность многочленов, реализующих указанные совместные функциональные приближения.

Иные задачи о совместных функциональных приближениях, приводящие к доказательству иррациональности $\zeta(3)$ рассматривались в работе В. Н. Сорокина [10].

Ниже (§ 1) мы предлагаем доказательство теоремы 1, инициированное работой Л. А. Гутника [7], и затем (§ 2) доказываем следующую ниже теорему 2, где дается новое разложение $\zeta(3)$ в непрерывную дробь.

ТЕОРЕМА 2. *Справедливо следующее разложение в непрерывную дробь*

$$2\zeta(3) = 2 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{1}{3} + \frac{4}{2} + \frac{2}{4} + \frac{6}{6} + \frac{4}{5} + \frac{9}{4} + \frac{6}{6} + \frac{12}{8} + \frac{9}{7} + \frac{16}{6} + \dots, \quad (4)$$

где числители a_n , $n \geq 2$, и знаменатели b_n , $n \geq 1$, определяются по формулам

$$\begin{aligned} b_{4k+1} &= 2k + 2, & a_{4k+1} &= k(k + 1), \\ b_{4k+2} &= 2k + 4, & a_{4k+2} &= (k + 1)(k + 2), \\ b_{4k+3} &= 2k + 3, & a_{4k+3} &= (k + 1)^2, \\ b_{4k+4} &= 2k + 2, & a_{4k+4} &= (k + 2)^2. \end{aligned}$$

Уменьшенные вдвое подходящие дроби для (4) с номерами $n = 4k - 2$ дают все множество подходящих дробей непрерывной дроби Апери для $\zeta(3)$.

Закон образования числителей a_n и знаменателей b_n непрерывной дроби (4) можно также задать равенствами

$$\begin{aligned} b_{n+4} &= b_n + 2, & n &\geq 1, \\ a_{n+4} &= a_n + b_n, & n &\equiv 1, 2, 3 \pmod{4}, \\ a_{n+4} &= a_n + b_n + 3, & n &\equiv 0 \pmod{4}, \end{aligned} \quad n \geq 2.$$

Подходящие дроби непрерывной дроби Апери (1) все меньше, чем $\zeta(3)$ и образуют возрастающую последовательность. Числители и знаменатели непрерывной дроби (4) положительны. Поэтому, в соответствии с общей теорией (см. [11, § 2.1.1]), можно утверждать, что все подходящие дроби непрерывной дроби (4) с четными номерами меньше $2\zeta(3)$ и возрастают, а с нечетными – больше $2\zeta(3)$ и убывают.

Отметим, что фактически в § 2 строится разложение в непрерывную дробь для некоторого семейства чисел, зависящих от двух параметров α и β . При $\alpha = \beta = 0$ получается указанная в теореме 2 непрерывная дробь числа $2\zeta(3)$. Вероятно, какие-то арифметические результаты могут быть получены и при других рациональных значениях α и β . Это представляется нам интересной задачей.

В § 3 приводятся явные представления для знаменателей подходящих дробей (4), а также строится некоторое рекуррентное уравнение четвертого порядка, вырождающееся при $z = 1$ в рекуррентные уравнения непрерывной дроби (4).

§ 1. Доказательство теоремы Апери

Пусть n – натуральное число, в дальнейшем достаточно большое. Важную роль в доказательстве играет следующая рациональная функция

$$R(z) = \frac{(z-1)^2 \cdots (z-n)^2}{z^2(z+1)^2 \cdots (z+n)^2},$$

ЛЕММА 1. *Справедливо равенство*

$$I = \sum_{\nu=1}^{\infty} R'(\nu) = A_n \zeta(3) + B_n, \quad (5)$$

где $A_n \in \mathbb{Z}$, $B_n \in \mathbb{Q}$. Если $D_n = \prod_{p \leq n} p^{\lfloor \log 2n / \log p \rfloor}$, то $D_n^3 B_n \in \mathbb{Z}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разложим функцию $R(z)$ в сумму простейших дробей:

$$R(z) = \sum_{k=0}^n \left(\frac{B_{k2}}{(z+k)^2} + \frac{B_{k1}}{z+k} \right),$$

где

$$B_{k2} = (z+k)^2 R(z) \Big|_{z=-k} = \binom{n+k}{k}^2 \binom{n}{k}^2,$$

$$B_{k1} = \frac{d}{dz} ((z+k)^2 R(z)) \Big|_{z=-k} = -2B_{k2} \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{k+j} - \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \frac{1}{k-j} \right).$$

Из этих представлений следует, что $B_{k2} \in \mathbb{Z}$ и $D_n B_{k1} \in \mathbb{Z}$. Так как функция $R(z)$ имеет в точке $z = \infty$ нуль второго порядка, то

$$\sum_{k=0}^n B_{k1} = -\operatorname{Res}_{z=\infty} R(z) = 0. \quad (6)$$

Имеем, пользуясь (6),

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} R'(\nu) = \sum_{k=0}^n \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(-2 \frac{B_{k2}}{(\nu+k)^3} - \frac{B_{k1}}{(\nu+k)^2} \right) = A_n \zeta(3) + B_n,$$

где

$$A_n = -2 \sum_{k=0}^n B_{k2} = -2u_n, \quad B_n = \sum_{k=1}^n \sum_{r=1}^k (2B_{k2} r^{-3} + B_{k1} r^{-2}).$$

Следовательно, $A_n \in \mathbb{Z}$ и $D_n^3 B_n \in \mathbb{Z}$. Это доказывает лемму 1.

ЛЕММА 2. Для суммы ряда (5) справедливо представление

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_L \left(\frac{\pi}{\sin \pi z} \right)^2 R(z) dz, \quad (7)$$

где L – вертикальная прямая $\operatorname{Re} z = C$, $0 < C < n + 1$, проходящая сверху вниз.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $T = N + 1/2$, где N – достаточно большое целое число ($N > n$). На контуре квадрата с вершинами в точках $(\pm T, \pm T)$ функция $(\pi / \sin \pi z)^2$ ограничена и, кроме того, $R(z) = O(T^{-2})$. Отсюда следует, что указанный в формулировке леммы 2 интеграл равен сумме вычетов подынтегральной функции в точках $n + 1, n + 2, \dots$. Поскольку в окрестности целой точки $z = k$, $k > 0$, справедливы равенства

$$\left(\frac{\pi}{\sin \pi z} \right)^2 = \frac{1}{(z - k)^2} + O(1), \quad R(z) = R(k) + R'(k)(z - k) + O((z - k)^2),$$

то

$$\operatorname{Res}_{z=k} \left(\left(\frac{\pi}{\sin \pi z} \right)^2 R(z) \right) = R'(k),$$

и, учитывая, что $R'(k) = 0$ при $k = 1, 2, \dots, n$, получаем нужное представление суммы ряда I .

ЛЕММА 3. При $n \rightarrow \infty$ справедлива асимптотическая формула

$$I = -\frac{\pi^{3/2} 2^{3/4}}{n^{3/2}} (\sqrt{2} - 1)^{4n+2} (1 + o(1)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеет место тождество

$$\left(\frac{\pi}{\sin \pi z} \right)^2 R(z) = \left(\frac{\Gamma(n + 1 - z) \Gamma(z)^2}{\Gamma(n + 1 + z)} \right)^2.$$

Выберем теперь $C = (n + 1)/\sqrt{2}$ (через точку C проходит контур интегрирования L) и сделаем в интеграле (7) замену $z = (n + 1)t$. Так как на контуре интегрирования L величины $\operatorname{Re}(n + 1 + z)$, $\operatorname{Re}(n + 1 - z)$, $\operatorname{Re} z$ эквивалентны положительным константам, умноженным на n , то для

$$F(z) = \left(\frac{\Gamma(n + 1 - z) \Gamma(z)^2}{\Gamma(n + 1 + z)} \right)^2$$

на контуре интегрирования с помощью формулы

$$\ln \Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2} \right) \ln z - z + \frac{1}{2} \ln 2\pi + r(z), \quad |r(z)| \leq K |\operatorname{Re} z|^{-1},$$

где K – абсолютная постоянная, имеем

$$\begin{aligned} \ln F(z) &= (2n+1-2z)\ln(n+1-z) - 2(n+1-z) + (4z-2)\ln z - 4z \\ &\quad - (2n+1+2z)\ln(n+1+z) + (2n+2+2z) + 2\ln 2\pi + O(n^{-1}) \\ &= \ln h(t) + 2(n+1)f(t) - 2\ln(n+1) + 2\ln 2\pi + O(n^{-1}), \end{aligned}$$

где постоянная в $O(\cdot)$ абсолютна и

$$h(t) = \frac{1+t}{(1-t)t^2}, \quad f(t) = (1-t)\ln(1-t) + 2t\ln t - (1+t)\ln(1+t).$$

Таким образом,

$$I = -\frac{2\pi}{ni} \cdot \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{2(n+1)f(t)} \frac{1+t}{(1-t)t^2} (1 + O(n^{-1})) dt,$$

где $c = 1/\sqrt{2}$ и постоянная в $O(\cdot)$ абсолютна.

Точка $t = 1/\sqrt{2}$ является единственной точкой максимума для $\operatorname{Re} f(t)$ на контуре интегрирования. Действительно, если $g(u) = \operatorname{Re} f(c + iu)$, то $g'(u) = -\operatorname{Im} f'(t) = \operatorname{Im}(\ln(t^{-2} - 1))$ и, следовательно, $g'(u)$ обращается в нуль только при $u = 0$. В окрестности этой точки

$$f(t) = f(c) + 2\sqrt{2}(t-c)^2 + O((t-c)^3),$$

а на контуре $t = c + iu$, $-\infty < u < +\infty$, в окрестности точки c имеем

$$f(t) = f(c) - 2\sqrt{2}u^2 + O(u^3).$$

С помощью метода Лапласа теперь получаем

$$I = -2\pi n^{-1} \cdot 2(\sqrt{2}+1)^2(\sqrt{2}-1)^{4n+4} \left(\frac{2\pi}{n+1} (8\sqrt{2})^{-1} \right)^{1/2} (1 + O(n^{-1})),$$

и это дает требуемую эквивалентность. Лемма 3 доказана.

Иррациональность $\zeta(3)$ легко следует из лемм 1 и 3. Действительно, если $\zeta(3) = b/a \in \mathbb{Q}$, $a > 0$, то $2aD_n^3 \cdot I$ есть отличное от нуля целое число. Так что

$$1 \leq 2aD_n^3 \cdot |I| = O\left(D_n^3(\sqrt{2}-1)^{4n}\right).$$

Последнее неравенство противоречиво, так как при любом $\varepsilon > 0$ и любом достаточно большом n справедлива оценка $D_n < e^{(1+\varepsilon)n}$ и, кроме того, $e^3(\sqrt{2}-1)^4 < 1$.

Количественный результат выводится из лемм 1 и 3 традиционными средствами.

Отметим, что любопытно было бы найти элементарное доказательство иррациональности $\zeta(3)$ в духе доказательства Фурье иррациональности e , основанное на равенстве (5). Для этого достаточно получить элементарными средствами “хорошую” оценку его левой части и доказать, что сумма ряда отлична от нуля.

§ 2. Рекуррентные соотношения и доказательство теоремы 2

Пусть $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$, a и b отличны от чисел $1, 2, 3, \dots$,

$$G(a, b, c, d | z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \Gamma(-s)^4 \frac{\Gamma(1-a+s)}{\Gamma(c-s)} \cdot \frac{\Gamma(1-b+s)}{\Gamma(d-s)} z^s ds, \quad |z| < \pi,$$

где контур L разделяет полюса функций $\Gamma(-s)$ и $\Gamma(1-a+s)$, $\Gamma(1-b+s)$, уходит вертикально вверх и вниз до ∞ и проходит снизу вверх; интеграл абсолютно сходится. Так определенная функция является очень специальным случаем

$$G_{4,4}^{4,2} \left(a, b, c, d \mid 0, \dots, 0 \mid z \right)$$

так называемых G -функций Мейера (см. [8]).

Укажем некоторые свойства $G(a, b, c, d | z)$ (см. [8, гл. 5]). Для краткости не будем далее писать аргумент z у функций G . Функция $G(a+1, b+1, c+1, d+1)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$[z(\delta-a)(\delta-b)(\delta-c)(\delta-d) - \delta^4]y = 0, \quad \delta = z \frac{d}{dz}. \quad (8)$$

Кроме того, справедливы тождества

$$\begin{aligned} (\delta-a)G(a+1, b, c, d | z) &= G(a, b, c, d | z), \\ (\delta-c)G(a, b, c+1, d | z) &= -G(a, b, c, d | z). \end{aligned} \quad (9)$$

Тождества сохраняются при перестановке a и b или c и d под знаком функций G .

ЛЕММА 4. 1) *Справедливо следующее тождество*

$$(c-a)\delta G(a+1, b, c+1, d) = cG(a, b, c+1, d) + aG(a+1, b, c, d). \quad (10)$$

2) *Если $a+b+c+d=0$, то*

$$\begin{aligned} a^3\delta G(a+1, b+1, c+1, d) + bc(d-a)G(a, b+1, c+1, d) \\ + d^3\delta G(a, b+1, c+1, d+1) = (z-1)(d-a)G(a, b, c, d). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Из (9) находим

$$\begin{aligned} (\delta-a)G(a+1, b, c+1, d | z) &= G(a, b, c+1, d | z), \\ (\delta-c)G(a+1, b, c+1, d | z) &= -G(a+1, b, c, d | z). \end{aligned}$$

Умножая первое равенство на c , второе на a , и вычитая, получим (10).

2) Так как обе части равенства непрерывны в зависимости от параметров a и d , то, не уменьшая общности, можно считать, что $a \neq d$. Выберем

комплексные числа λ, μ, ν так, что справедливо следующее тождество относительно δ

$$\lambda \cdot \delta(\delta - d) + \mu \cdot (\delta - a)(\delta - d) + \nu \cdot \delta(\delta - a) = \delta^4 - (\delta - a)(\delta - b)(\delta - c)(\delta - d). \quad (11)$$

Поставляя для этого в (11) последовательно $\delta = a$, $\delta = 0$ и $\delta = d$, находим

$$\lambda = \frac{a^3}{a - d}, \quad \mu = -bc, \quad \nu = \frac{d^3}{d - a}.$$

Применим теперь обе части тождества (11) к функции $G(a + 1, b + 1, c + 1, d + 1 \mid z)$ и воспользуемся равенствами (8) и (9). Тогда получится нужное соотношение.

Пусть α и β – комплексные числа. Положим $\alpha_0 = \alpha$, $\alpha_1 = \beta$ и

$$\alpha_{n+2} = \alpha_n + 1, \quad n \geq 0.$$

Обозначим также для $n \geq 0$

$$\begin{aligned} r_{2n} &= G(-\alpha_{n+1}, -\alpha_{n+2}, \alpha_{n+1} + 1, \alpha_{n+2} + 1 \mid 1), \\ r_{2n+1} &= \frac{\alpha_{n+3}^2}{\alpha_{n+2}\alpha_{n+4}} \delta G(-\alpha_{n+1}, -\alpha_{n+2}, \alpha_{n+1} + 2, \alpha_{n+2} + 1 \mid 1). \end{aligned}$$

ЛЕММА 5. *Справедливы следующие соотношения:*

$$\begin{aligned} \alpha_{n+3}^2 r_{2n+2} &= 2\alpha_{n+2}\alpha_{n+4}r_{2n+1} + \alpha_{n+3}^2 r_{2n}, & n \geq 0, \\ \alpha_{n+4}r_{2n+1} &= (\alpha_{n+2} + \alpha_{n+3})r_{2n} + \alpha_{n+1}r_{2n-1}, & n \geq 1. \end{aligned}$$

Если положить

$$r_{-1} = \frac{\alpha_2^2}{\alpha_3} \delta G(-\alpha_0, -\alpha_1, \alpha_0 + 2, \alpha_1 + 1 \mid 1),$$

то будет также выполняться равенство

$$\alpha_4 r_1 = (\alpha_2 + \alpha_3) r_0 + r_{-1}. \quad (12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства первого соотношения нужно применить первое тождество леммы 4 с $a = -\alpha_{n+3}$, $b = -\alpha_{n+2}$, $c = \alpha_{n+3}$, $d = \alpha_{n+2} + 1$.

Для доказательства второго соотношения и (12) применим тождество из пункта 2) леммы 4 с $a = -\alpha_{n+2}$, $b = -\alpha_{n+3}$, $c = \alpha_{n+2}$, $d = \alpha_{n+3}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Выберем $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$, т.е. $\alpha_n = [n/2]$. В этом случае последовательность α_n возрастает и α_{n+3} равняется либо α_{n+2} , либо α_{n+4} , так что в первом соотношении происходит сокращение. В результате рекуррентные уравнения для r_n принимают вид

$$\begin{aligned} 2r_1 &= 2r_0 + r_{-1}, \\ (k+2)r_{4k+1} &= (2k+2)r_{4k} + kr_{4k-1}, & k \geq 1, \\ (k+1)r_{4k+2} &= (2k+4)r_{4k+1} + (k+1)r_{4k}, & k \geq 0, \\ (k+2)r_{4k+3} &= (2k+3)r_{4k+2} + (k+1)r_{4k+1}, & k \geq 0, \\ (k+2)r_{4k+4} &= (2k+2)r_{4k+3} + (k+2)r_{4k+2}, & k \geq 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Непосредственным вычислением легко проверяется, что

$$r_{-1} = -1, \quad r_0 = 2\zeta(3) - 1,$$

Определим последовательности $g_n, h_n, n \geq -1$, с помощью полученных рекуррентных уравнений и начальных значений

$$g_{-1} = 0, \quad g_0 = 1, \quad h_{-1} = 1, \quad h_0 = 1.$$

Тогда имеют место равенства

$$r_n = g_n \cdot 2\zeta(3) - h_n, \quad n \geq -1. \quad (14)$$

Этот факт легко доказывается по индукции с помощью рекуррентных уравнений.

Рекуррентные уравнения (13) (см. также лемму 5) определяют непрерывную дробь с элементами

$$\begin{aligned} a'_1 &= \frac{1}{\alpha_4}, & b'_1 &= \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{\alpha_4}, \\ a'_{2n+1} &= \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_{n+4}}, & b'_{2n+1} &= \frac{\alpha_{n+2} + \alpha_{n+3}}{\alpha_{n+4}}, & n \geq 1, \\ a'_{2n+2} &= 1, & b'_{2n+2} &= 2 \frac{\alpha_{n+2}\alpha_{n+4}}{\alpha_{n+3}^2}, & n \geq 0. \end{aligned}$$

Определим числа $\rho_j, j \geq 0$, равенствами

$$\rho_0 = 1, \quad \rho_{2n+1} = \alpha_{n+4}, \quad \rho_{2n+2} = \alpha_{n+3}, \quad n \geq 0.$$

Получившаяся выше непрерывная дробь будет иметь ту же последовательность подходящих дробей, что и дробь с элементами $b_n = b'_n \rho_n, a_n = a'_n \rho_n \rho_{n-1}$, т.е.

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, & b_1 &= \alpha_2 + \alpha_3, \\ a_{2n+1} &= \alpha_{n+1}\alpha_{n+2}, & b_{2n+1} &= \alpha_{n+2} + \alpha_{n+3}, & n \geq 1, \\ a_{2n+2} &= \alpha_{n+3}\alpha_{n+4}, & b_{2n+2} &= 2 \frac{\alpha_{n+2}\alpha_{n+4}}{\alpha_{n+3}}, & n \geq 0 \end{aligned}$$

(см. [11, гл. 2, теорема 2.6]). Но эта новая непрерывная дробь совпадает с дробью, указанной в теореме 2. Следовательно, отношения h_n/g_n являются подходящими дробями непрерывной дроби, указанной в теореме 2, и для доказательства сходимости непрерывной дроби (4) к $2\zeta(3)$ достаточно установить, что последовательность h_n/g_n стремится к $2\zeta(3)$.

Докажем сначала ограниченность последовательности r_n . Подобно (7) при целых положительных числах a и b справедливо представление

$$G(-a, -b, a+1, b+1 | 1) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \left(\frac{\pi}{\sin \pi z} \right)^2 R_{a,b}(z) dz,$$

где

$$R_{a,b}(z) = z^{-2} \prod_{k=1}^a \frac{z+k}{z-k} \cdot \prod_{k=1}^b \frac{z+k}{z-k},$$

а контур интегрирования L есть вертикальная прямая $\operatorname{Re} z = -1$. Учитывая, что на этой прямой $|z+k| < |z-k|$, заключаем, что функция $R_{a,b}(z)$ ограничена на L . Интеграл по этому контуру от функции $(\pi/\sin \pi z)^2$ абсолютно сходится. Это доказывает ограниченность множества чисел $G(-a, -b, a+1, b+1 | 1)$ при целых неотрицательных a и b и, следовательно, ограниченность множества чисел r_{2n} . Ограниченность последовательности r_{2n+1} можно вывести подобным же образом, или с помощью первого из рекуррентных уравнений леммы 5.

Рекуррентные уравнения (13) могут быть переписаны в виде

$$u_{n+1} = a(n)u_n + b(n)u_{n-1}.$$

Предельное характеристическое уравнение для них имеет вид

$$x^2 - 2x - 1 = 0,$$

а его корни равны $1 \pm \sqrt{2}$. Отсюда, поскольку $g_n > 0$ при $n \geq 1$, легко следует, что последовательность g_n стремится к $+\infty$, и это, в силу соотношений (14) и ограниченности r_n , дает нам $h_n/g_n \rightarrow 2\zeta(3)$, т.е. сходимость непрерывной дроби (4) к $2\zeta(3)$.

Заметим, что с помощью теоремы Пуанкаре (см. [12, гл. 5, § 5]) получаются оценки $g_n = O(\mu^n)$, $r_n = O(\lambda^n)$ при любых постоянных λ и μ , удовлетворяющих неравенствам

$$\mu > 1 + \sqrt{2}, \quad \lambda > \sqrt{2} - 1.$$

С помощью (13) легко выписать рекуррентное уравнение, которым связаны члены последовательности r_{4n-2} , $n \geq 1$, и проверить, что оно в точности совпадает с уравнением (2). Учитывая, что две последовательности g_n и h_n удовлетворяют уравнениям (13), заключаем, что каждая из последовательностей g_{4n-2} и h_{4n-2} также удовлетворяет уравнению (2). Сравнивая начальные члены последовательностей, убеждаемся в равенствах

$$g_{4n-2} = u_n, \quad h_{4n-2} = 2v_n, \quad n \geq 1,$$

что и завершает доказательство теоремы 2.

§ 3. Рекуррентные уравнения и явные представления

Здесь будут найдены явные представления для чисел g_n . Это можно сделать так же, как и в доказательстве теоремы 1, получив одновременно и представления чисел h_n . Мы используем иные соображения.

Функция

$$\begin{aligned} H(a_1, a_2, b_1, b_2 | z) &= \frac{\Gamma(1-a_1)\Gamma(1-a_2)}{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)} \cdot {}_3F_4\left(\begin{matrix} 1-a_1, 1-a_2, 1-b_1, 1-b_2 \\ 1, 1, 1 \end{matrix} \middle| z\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1+n-a_1)\Gamma(1+n-a_2)}{\Gamma(b_1-n)\Gamma(b_2-n)} \cdot \frac{z^n}{(n!)^4} \end{aligned}$$

удовлетворяет тому же дифференциальному уравнению, что и функция $G(a_1, a_2, b_1, b_2 | z)$, и, кроме того, для нее выполняются тождества (9) (см. [8]). Следовательно, она удовлетворяет тождествам из леммы 4, а следовательно

$$\begin{aligned} C_{2n} &= H(-\alpha_{n+1}, -\alpha_{n+2}, \alpha_{n+1} + 1, \alpha_{n+2} + 1 | 1), \\ C_{2n+1} &= \frac{\alpha_{n+3}^2}{\alpha_{n+2}\alpha_{n+4}} \delta H(-\alpha_{n+1}, -\alpha_{n+2}, \alpha_{n+1} + 2, \alpha_{n+2} + 1 | 1), \end{aligned}$$

удовлетворяют рекуррентным уравнениям леммы 5. Проверяя совпадение начальных членов, легко установить, что $C_n = g_n$, $n \geq 0$.

Имеем

$$H(-a, -b, c+1, d+1 | z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1+a+i)\Gamma(1+b+i)}{\Gamma(1+c-i)\Gamma(1+d-i)} \cdot \frac{z^i}{(i!)^4}$$

и, если a, b, c, d — целые неотрицательные числа, $d \geq c$, то

$$H(-a, -b, c+1, d+1 | z) = \frac{a!b!}{c!d!} \sum_{i=0}^c \binom{a+i}{i} \binom{b+i}{i} \binom{c}{i} \binom{d}{i} z^i.$$

Отсюда получаем также два представления

$$\begin{aligned} \frac{(a+1)^2}{b(b+1)} \delta H(-a, -b, a+2, b+1 | z) &= \frac{a+1}{b+1} \sum \binom{a+i}{i} \binom{b+i}{i} \binom{a+1}{i} \binom{b-1}{i-1} z^i \\ &= \frac{a+1}{b} \sum \binom{a+i}{i} \binom{b+i}{i-1} \binom{a+1}{i} \binom{b}{i} z^i, \end{aligned}$$

где индекс суммирования меняется в интервале $1 \leq i \leq \min(a+1, b)$.

Применяя найденные соотношения, находим теперь, что при $k \geq 1$

$$\begin{aligned} g_{4k} &= \sum_{i=0}^k \binom{k+i}{i} \binom{k+1+i}{i} \binom{k}{i} \binom{k+1}{i}, \\ g_{4k-1} &= \sum_{i=1}^k \binom{k+i}{i} \binom{k+i}{i} \binom{k+1}{i} \binom{k-1}{i-1}, \\ g_{4k-2} &= \sum_{i=0}^k \binom{k+i}{i} \binom{k+i}{i} \binom{k}{i} \binom{k}{i}, \\ g_{4k-3} &= \sum_{i=0}^k \binom{k+i}{i-1} \binom{k-1+i}{i} \binom{k}{i} \binom{k}{i}, \end{aligned}$$

т.е. $g_n \in \mathbb{Z}$. Найденные формулы дают еще одно доказательство равенства $g_{4k-2} = u_k$.

Рассмотрим последовательность функций

$$f_n(z) = G(-\alpha_{n+1}, -\alpha_{n+2}, \alpha_{n+1} + 1, \alpha_{n+2} + 1 \mid z), \quad n \geq 0.$$

Соображения, подобные использованным при доказательстве леммы 4, позволяют выписать рекуррентные уравнения четвертого порядка, которым удовлетворяет эта последовательность.

Выберем постоянные x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 так, чтобы выполнялось тождество

$$\begin{aligned} \delta^4 &= x_0(\delta - c)(\delta - c - 1)(\delta - d)(\delta - d - 1) \\ &\quad + x_1(\delta - b - 1)(\delta - c)(\delta - c - 1)(\delta - d - 1) \\ &\quad + x_2(\delta - a - 1)(\delta - b - 1)(\delta - c - 1)(\delta - d - 1) \\ &\quad + x_3(\delta - a - 1)(\delta - b)(\delta - b - 1)(\delta - c - 1) \\ &\quad + x_4(\delta - a)(\delta - a - 1)(\delta - b)(\delta - b - 1). \end{aligned} \quad (15)$$

Для этого нужно решить систему из 5 уравнений с 5 неизвестными. Подставляя в это тождество $\delta = b + 1$, находим

$$x_0 = \frac{(b+1)^4}{(b-c)(b-c+1)(b-d)(b-d+1)}.$$

В дальнейшем вместо параметров a, b, c, d будут подставляться такие числа, что x_0 , а также и $x_1, \dots, x_4$ будут определены. Подставляя в тождество (15) $\delta = c + 1$, находим

$$x_4 = \frac{(c+1)^4}{(c-a)(c-a+1)(c-b)(c-b+1)}.$$

Подставляя $\delta = a + 1$ и затем в получившееся равенство найденное значение x_0 , получаем

$$x_1 = \frac{a+1-d}{a-b} \cdot \left(\frac{(a+1)^4}{(a-c)(a-c+1)(a-d)(a-d+1)} - \frac{(b+1)^4}{(b-c)(b-c+1)(b-d)(b-d+1)} \right).$$

Аналогично, подставляя $\delta = d + 1$, находим

$$x_3 = \frac{d+1-a}{d-c} \cdot \left(\frac{(d+1)^4}{(d-a)(d-a+1)(d-b)(d-b+1)} - \frac{(c+1)^4}{(c-a)(c-a+1)(c-b)(c-b+1)} \right).$$

Наконец,

$$x_2 = 1 - x_0 - x_1 - x_3 - x_4.$$

Применяя это тождество к функции $G(a+2, b+2, c+2, d+2)$, получаем

$$\begin{aligned} zG(a+1, b+1, c+1, d+1) \\ = x_0G(a+2, b+2, c, d) - x_1G(a+2, b+1, c, d+1) \\ + x_2G(a+1, b+1, c+1, d+1) - x_3G(a+1, b, c+1, d+2) \\ + x_4G(a, b, c+2, d+2). \end{aligned}$$

Параметры функции G во всех слагаемых имеют вид $(a+i, b+j, c+k, d+l)$, причем $i, j, k, l \geq 0$, $i+k=2$, $j+l=2$, $j+1 \geq i \geq j$. Подставляя в это тождество

$$a = -\alpha_{n+4}, \quad b = -\alpha_{n+3}, \quad c = \alpha_{n+2}, \quad d = \alpha_{n+1}, \quad (16)$$

получаем рекуррентное уравнение четвертого порядка

$$zf_n = x_0f_{n-2} - x_1f_{n-1} + x_2f_n - x_3f_{n+1} + x_4f_{n+2}. \quad (17)$$

Его предельное уравнение проще всего получить, если в тождестве (15) при значениях параметров (16) сделать замену $\delta = nt$ и перейти к пределу при n стремящемся к ∞ . Тождество примет вид

$$\begin{aligned} t^4 = x_0 \left(t - \frac{1}{2} \right)^4 - x_1 \left(t + \frac{1}{2} \right) \left(t - \frac{1}{2} \right)^3 + x_2 \left(t + \frac{1}{2} \right)^2 \left(t - \frac{1}{2} \right)^2 \\ - x_3 \left(t + \frac{1}{2} \right)^3 \left(t - \frac{1}{2} \right) + x_4 \left(t + \frac{1}{2} \right)^4. \end{aligned}$$

Операции, аналогичные проделанным ранее, позволяют найти

$$x_0 = x_4 = \frac{1}{16}, \quad x_1 = x_3 = \frac{1}{4}, \quad x_2 = \frac{3}{8},$$

и предельное уравнение имеет вид

$$t^4 - 4t^3 + (6 - 16z)t^2 - 4t + 1 = 0,$$

или

$$(t - 1)^4 - 16zt^2 = 0.$$

При $z = 1$ (случай Апери) оно может быть преобразовано к виду

$$t^4 - 4t^3 - 10t^2 - 4t + 1 = (t + 1)^2(t^2 - 6t + 1) = 0,$$

а при $z = -1$ (случай [7]) к

$$t^4 - 4t^3 + 22t^2 - 4t + 1 = (t - 1)^4 + 16t^2 = 0.$$

Последовательность $f_n(1)$ удовлетворяет рекуррентному уравнению второго порядка. Его можно получить из рекуррентных уравнений леммы 5 или непосредственно с помощью тождества следующей леммы.

ЛЕММА 6. Если $a + b + c + d = 0$, то

$$\begin{aligned} & \frac{d^4}{b-d} G(a, b, c+1, d+1) + \left(\frac{bd^3}{b-d} + \frac{ca^3}{a-c} + bc(a-d) \right) G(a, b+1, c+1, d) \\ & + \frac{a^4}{a-c} G(a+1, b+1, c, d) = (z-1)(a-d)G(a, b, c, d). \end{aligned} \quad (18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим неизвестные λ, μ, ν так, что

$$\begin{aligned} & \lambda \cdot (\delta - a)(\delta - b) + \mu \cdot (\delta - a)(\delta - d) + \nu \cdot (\delta - c)(\delta - d) \\ & = \delta^4 - (\delta - a)(\delta - b)(\delta - c)(\delta - d). \end{aligned}$$

Применяя затем это тождество к $G(a+1, b+1, c+1, d+1)$, получим (18).

Из (18) при $a = -\alpha_{n+2}$, $b = -\alpha_{n+3}$, $c = \alpha_{n+2}$, $d = \alpha_{n+3}$ находим

$$\begin{aligned} & \alpha_{n+3}^3 f_{n+1}(z) - (\alpha_{n+3}^3 + 2\alpha_{n+3}^2 \alpha_{n+2} + 2\alpha_{n+3} \alpha_{n+2}^2 + \alpha_{n+2}^3) f_n(z) \\ & + \alpha_{n+2}^3 f_{n-1}(z) \\ & = 2(z-1)(\alpha_{n+2} + \alpha_{n+3}) G(-\alpha_{n+2}, -\alpha_{n+3}, \alpha_{n+2}, \alpha_{n+3}). \end{aligned} \quad (19)$$

Подставим $z = 1$ в последнее равенство. В результате получится искомое рекуррентное уравнение

$$\begin{aligned} & \alpha_{n+3}^3 r_{2n+2} - (\alpha_{n+3}^3 + 2\alpha_{n+3}^2 \alpha_{n+2} + 2\alpha_{n+3} \alpha_{n+2}^2 + \alpha_{n+2}^3) r_{2n} \\ & + \alpha_{n+2}^3 r_{2n-2} = 0. \end{aligned}$$

Его предельное характеристическое уравнение имеет вид

$$t^2 - 6t + 1 = 0.$$

Можно выписать тождества, подобные (19) при замене n на $n - 1$ и на $n + 1$. В правых частях этих трех тождеств будут присутствовать функции

$$G(-\alpha_{n+i}, -\alpha_{n+i+1}, \alpha_{n+i}, \alpha_{n+i+1}), \quad i = 1, 2, 3. \quad (20)$$

Выберем теперь числа $\lambda, \mu, \nu, \gamma$ так, чтобы выполнялось тождество

$$\lambda \cdot (\delta - d)(\delta - c) + \mu \cdot (\delta - c)(\delta - b) + \nu \cdot (\delta - b)(\delta - a) + \gamma = 0.$$

Применяя это тождество к функции $G(a + 1, b + 1, c + 1, d + 1 \mid z)$ и выбирая $a = -\alpha_{n+3}$, $b = -\alpha_{n+2}$, $c = \alpha_{n+1}$, $d = \alpha_n$, получим равенство, связывающее функции (20). Это дает еще один вывод тождества (17).

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: nest@nw.math.msu.su

Поступило
29.11.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Apéry R. Irrationalite de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$ // Asterisque. 1979. V. 61. P. 11–13.
- [2] Cohen H. Demonstration de l'irrationalite de $\zeta(3)$ (d'apres R. Apéry) // Semin. de theorie des nombres. Grenoble, 1978.
- [3] Poorten A. van der. A proof that Euler missed – Apéry's proof of the irrationality of $\zeta(3)$ // Math. Intell. 1979. V. 1. P. 195–203.
- [4] Reyssat E. Irrationalite de $\zeta(3)$, selon Apéry // 20 annee. Sem Delange–Pisot–Poitou, 1978/79. P. 6.
- [5] Beukers F. A note on the irrationality of $\zeta(2)$ and $\zeta(3)$ // Bull. London Math. Soc. 1979. V. 11. P. 268–272.
- [6] Hata M. On the linear independence of the values of polylogarithmic functions // J. Math. pures et appl. 1990. V. 69. P. 133–173.
- [7] Гутник Л. А. Об иррациональности некоторых величин, содержащих $\zeta(3)$ // УМН. 1979. Т. 34. № 3. С. 190; // Acta Arith. 1983. V. 42. № 3. P. 255–264.
- [8] Люк Ю. Специальные математические функции и их аппроксимации. М.: Мир, 1980.
- [9] Beukers F. Pade approximations in number theory // Lecture Notes in Math. V. 888. New York–Berlin: Springer, 1981. P. 90–99.
- [10] Сорокин В. Н. Аппроксимации Эрмита–Падэ для систем Никишина и иррациональность $\zeta(3)$ // УМН. 1994. Т. 49. № 2. С. 167–168.
- [11] Джоунс У., Трон В. Непрерывные дроби. М.: Мир, 1985.
- [12] Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей. М.: Наука, 1967.