Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Соловьев, Об интегральных уравнениях краевых задач Дирихле и Неймана в плоской области с острием на границе, *Матем. заметки*, 1996, том 59, выпуск 6, 881–892

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1786>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 17:13:42

ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДИРИХЛЕ И НЕЙМАНА В ПЛОСКОЙ ОБЛАСТИ С ОСТРИЕМ НА ГРАНИЦЕ

А. А. Соловьёв

В статье изучаются граничные уравнения внутренней задачи Дирихле и внешней задачи Неймана теории гармонического потенциала для области с пиком на границе. Приведены теоремы о разрешимости интегральных уравнений в L^p -пространствах. Работа продолжает исследование, начатое в [1], [2].

1. Предположим, что плоская односвязная область Ω ограничена замкнутой кусочно-гладкой кривой Γ с единственной точкой пика в начале координат. Допустим, что вблизи точки O область Ω или дополнительная к ней область Ω^- задана в декартовых координатах x, y неравенствами $\kappa_-(x) < y < \kappa_+(x)$, $0 < x < \delta$, где $\kappa_{\pm} \in C^\infty[0, \delta]$ удовлетворяют условиям $\kappa_{\pm}(0) = \kappa'_{\pm}(0) = 0$, $\kappa''_{\pm}(0) > \kappa''_{\mp}(0)$. Через $\Gamma_{\pm}$ обозначим дуги $\{(x, \kappa_{\pm}(x)) : x \in [0, \delta]\}$. Точки на $\Gamma_{\pm}$ с равными абсциссами будем обозначать $q_{\pm}$ соответственно.

Введем пространства $\mathfrak{N}_{p,\alpha}^o(\Gamma)$ и $\mathfrak{N}_{p,\alpha}^e(\Gamma)$ функций φ на Γ с конечными полунормами

$$\left\{ \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} |\varphi(q_+) - \varphi(q_-)|^p |q|^{\alpha-p} ds_q + \int_{\Gamma} |\varphi'(q)|^p |q|^{\alpha+p} ds_q \right\}^{1/p},$$

$$\left\{ \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} |\varphi(q_+) + \varphi(q_-)|^p |q|^{\alpha-p} ds_q + \int_{\Gamma} |\varphi'(q)|^p |q|^{\alpha+p} ds_q \right\}^{1/p}.$$

Символом $L_{p,\alpha}^k(\Gamma)$, $k = 0, 1$ ($L_{p,\alpha}^0 = L_{p,\alpha}$), обозначим пространство функций σ на Γ с конечной полунормой

$$\left\{ \int_{\Gamma} |\sigma^{(k)}(q)|^p |q|^{\alpha} ds_q \right\}^{1/p}.$$

Основные результаты. Пусть область Ω имеет острие на границе, направленное внутрь или во внешность.

ТЕОРЕМА 1. Для всякой функции φ из пространства $\mathfrak{N}_{p,\alpha}^o(\Gamma)$, где $0 < \alpha + 1 < p$, $\alpha + 1 \neq p/2$, интегральное уравнение

$$\int_{\Gamma} \sigma(q) \log \frac{|z|}{|z - q|} ds_q + c = \varphi(z) \quad (z \in \Gamma) \quad (1)$$

имеет решение в классе пар (σ, c) , где $\sigma \in L_{p,p+\alpha}(\Gamma)$ и $c \in \mathbb{R}$. Более того, имеет место равенство

$$V_0(L_{p,p+\alpha}(\Gamma)) = \mathfrak{N}_{p,\alpha}^o(\Gamma).$$

Здесь V_0 – прямое значение потенциала простого слоя.

В двух следующих теоремах предполагаем, что область Ω имеет на границе внешний пик.

ТЕОРЕМА 2. Для всякой функции φ из пространства $\mathfrak{N}_{p,\alpha}^o(\Gamma)$, где $0 < \alpha + 1 < p$, $\alpha + 1 \neq p/2$, интегральное уравнение внутренней задачи Дирихле

$$\pi\sigma(z) - \int_{\Gamma} \sigma(q) \frac{\partial}{\partial n_q} \log \frac{1}{|z - q|} ds_q = -\varphi(z) \quad (z \in \Gamma) \quad (2)$$

имеет решение в пространстве $L_{p,p+\alpha}^1(\Gamma)$. Кроме того, верно равенство

$$(\pi E - W_0)(L_{p,p+\alpha}^1(\Gamma)) = \mathfrak{N}_{p,\alpha}^o(\Gamma).$$

Здесь W_0 – прямое значение потенциала двойного слоя.

ТЕОРЕМА 3. Если функция ψ из $\mathfrak{N}_{p,\alpha}^e(\Gamma)$ и $p/2 < \alpha + 1 < p$, то интегральное уравнение внешней задачи Неймана

$$\pi\gamma - \left(\frac{\partial}{\partial n} V_0 \right) \gamma = -\frac{d}{ds} \psi$$

имеет решение в пространстве $L_{p,p+\alpha}(\Gamma)$. Выполняется равенство

$$\left(\pi E - \left(\frac{\partial}{\partial n} V_0 \right) \right) (L_{p,p+\alpha}(\Gamma)) = \frac{d}{ds} \mathfrak{N}_{p,\alpha}^e(\Gamma).$$

Предположим теперь, что Ω – область с внутренним пиком на границе.

ТЕОРЕМА 4. Для всякой функции $\varphi \in \mathfrak{N}_{p,\alpha}^e(\Gamma)$, где $p/2 < \alpha + 1 < p$, интегральное уравнение внутренней задачи Дирихле

$$\pi\sigma - W_0\sigma = -\varphi$$

разрешимо в пространстве $L_{p,p+\alpha}^1(\Gamma)$. Образ $(\pi E - W_0)(L_{p,p+\alpha}^1(\Gamma))$ совпадает с пространством $\mathfrak{N}_{p,\alpha}^e(\Gamma)$.

ТЕОРЕМА 5. Если функция ψ принадлежит $\mathfrak{N}_{p,\alpha}^o(\Gamma)$ и $0 < \alpha + 1 < p$, $\alpha + 1 \neq p/2$, то интегральное уравнение внешней задачи Неймана

$$\pi\gamma - \left(\frac{\partial}{\partial n} V_0 \right) \gamma = -\frac{d}{ds} \psi$$

имеет решение в пространстве $L_{p,p+\alpha}^1(\Gamma)$. Справедливо равенство

$$\left(\pi E - \left(\frac{\partial}{\partial n} V_0 \right) \right) (L_{p,p+\alpha}(\Gamma)) = \frac{d}{ds} \mathfrak{N}_{p,\alpha}^o(\Gamma).$$

2. Нам потребуется несколько вспомогательных утверждений. В этом пункте для определенности будем считать, что граница области имеет внешний пик.

Два следующих утверждения проверяются непосредственно. Пусть $z = \omega(\tau + i\nu)$ – конформное отображение полосы $\Omega = \{(\tau, \nu) : -\alpha_+ < \nu < -\alpha_-\}$ на область Ω , где $\alpha_{\pm} := \kappa_{\pm}''(0)/2$.

ЛЕММА 1. Функция φ на Γ удовлетворяет условию

$$\int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} |\varphi(q_+) \mp \varphi(q_-)|^p |q|^{\alpha-p} ds_q + \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} |\varphi'(q)|^p |q|^{\alpha+p} ds_q < +\infty$$

тогда и только тогда, когда для функции $\varphi(\tau - i\alpha_{\mp}) := \varphi(\omega(\tau - i\alpha_{\mp}))$ на $\partial\Pi$ конечен интеграл

$$\int_{\omega^{-1}(\Gamma_+ \cup \Gamma_-)} [|\varphi(\tau - i\alpha_-) \mp \varphi(\tau - i\alpha_+)|^p + |\varphi'(\tau - i\alpha_{\mp})|^p] |\tau|^{p-2-\alpha} d\tau.$$

Пусть $z = \theta(\eta + i\xi)$ – конформное отображение верхней полуплоскости $\{(\eta, \xi) : \xi > 0\}$ на область Ω с внутренней точкой заострения на границе.

ЛЕММА 2. Функция φ на Γ удовлетворяет условию

$$\int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} |\varphi(q_+) \mp \varphi(q_-)|^p |q|^{\alpha-p} ds_q + \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} |\varphi'(q)|^p |q|^{\alpha+p} ds_q < +\infty$$

тогда и только тогда, когда для функции $\varphi(\eta) := \varphi(\omega(\eta + i0))$, $\eta \in \mathbb{R}$, конечна сумма

$$\begin{aligned} \int_{\theta^{-1}(\Gamma_+ \cup \Gamma_-)} |\varphi(\eta) \mp \varphi(-\eta)|^p |\eta|^{2\alpha-2p+1} d\eta \\ + \int_{\theta^{-1}(\Gamma_+ \cup \Gamma_-)} |\varphi'(\eta)|^p |\eta|^{2\alpha+p+1} d\eta. \end{aligned}$$

Ниже формулируются две леммы, которые могут быть доказаны методом работы [3].

Рассмотрим интегральный оператор свертки

$$(Tf)(x) = \int_{\mathbb{R}} H(x-y)f(y) dy$$

с ядром $H(x)$ вида $H(x) = G(x)/x$, где функция $G(x)$ допускает оценку $|G(x)| \leq 1/(1 + |x|^n)$, $n \geq 1$. Предположим, что оператор T ограничен в пространстве $L_p(\mathbb{R})$.

ЛЕММА 3. *Оператор T действует непрерывно из пространства $L_{p,\alpha}(1, +\infty)$ в $L_{p,\alpha}(\mathbb{R})$, если показатель α удовлетворяет неравенству $0 < \alpha + 1 < p(n + 1)$.*

Пусть ядро $H(x)$ интегрального оператора T имеет оценку

$$|H(x)| \leq |\log |x|| (1 + |x|^n), \quad n \geq 1.$$

ЛЕММА 4. *Оператор свертки T действует непрерывно из пространства $L_{p,\alpha}(1, +\infty)$ в пространство $L_{p,\alpha}(\mathbb{R})$, если выполнено условие $0 < \alpha + 1 < pn$.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Пусть $\varphi \in \mathfrak{N}_{p,\alpha}^o(\Gamma)$ и $\alpha + 1 < p$. Тогда существует гармоническое продолжение функции φ в область Ω , нормальная производная которого принадлежит пространству $L_{p,p+\alpha}(\Gamma)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Через $z = \omega(\tau + i\nu)$ обозначим конформное отображение полосы Π_* на область Ω . Будем считать, что

$$\partial\P_* \cap \{(\tau, \nu) : \tau \geq 0\} = \{(\tau, \nu) : \nu = -\alpha_{\mp}, \tau \geq 0\}.$$

Рассмотрим краевую задачу Дирихле для оператора Лапласа в полосе $\Pi = \{(\tau, \nu) : -\alpha_+ < \nu < -\alpha_-\}$, полагая, что граничная функция $\varphi(\tau - i\alpha_{\mp}) := \varphi(\omega(\tau - i\alpha_{\mp}))$ сосредоточена в окрестности $+\infty - i\alpha_{\mp}$, принадлежит пространству $L_{p,p-2-\alpha}^1(\partial\P)$ и удовлетворяет условию $\varphi_e(\tau) := \varphi(\tau - i\alpha_-) = \varphi(\tau - i\alpha_+)$. Преобразование Фурье $\widehat{F}_e(\xi, \nu)$ по переменной τ решения F задачи Дирихле равно

$$\widehat{\varphi}_e(\xi) \operatorname{ch} \left(|\xi| \left(\frac{\alpha_+ + \alpha_-}{2} + \nu \right) \right) / \operatorname{ch} \left(|\xi| \frac{\alpha_+ - \alpha_-}{2} \right).$$

Поэтому

$$\left(\frac{\partial \widehat{F}_e}{\partial n} \right) (\xi, -\alpha_{\mp}) = \widehat{\varphi}'_e(\xi) i \operatorname{th} \left(\xi \frac{\alpha_+ - \alpha_-}{2} \right).$$

Значит,

$$\left(\frac{\partial F_e}{\partial n} \right) (\tau, -\alpha_{\mp}) = \operatorname{const} \int_{\mathbb{R}} \varphi'(t) \left(\operatorname{sh} \frac{\pi(\tau - t)}{\alpha_+ - \alpha_-} \right)^{-1} dt.$$

По лемме 3 функция $(\partial F_e / \partial n)(\tau, -\alpha_{\mp})$ является элементом пространства $L_{p,p-2-\alpha}(\partial\Pi)$ для всех показателей α , удовлетворяющих неравенству $\alpha < p - 1$.

Пусть граничная функция $\varphi(\tau - i\alpha_{\mp})$ сосредоточена в окрестности $+\infty - i\alpha_{\mp}$, принадлежит пространству $L_{p,p-2-\alpha} \cap L^1_{p,p-2-\alpha}(\partial\Pi)$ и удовлетворяет условию

$$\varphi_o(\tau) := \varphi(\tau - i\alpha_-) = -\varphi(\tau - i\alpha_+).$$

Преобразование Фурье по переменной τ решения задачи Дирихле имеет вид

$$\widehat{F}_o(\xi, \nu) = \widehat{\varphi}_o(\xi) \operatorname{sh} \left(\xi \left(\frac{\alpha_+ + \alpha_-}{2} + \nu \right) \right) / \operatorname{sh} \left(\xi \frac{\alpha_+ - \alpha_-}{2} \right).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widehat{F}_o}{\partial n}(\xi, -\alpha_{\mp}) &= \pm |\xi| \widehat{\varphi}_o(\xi) \operatorname{ch} \left(|\xi| \frac{\alpha_+ - \alpha_-}{2} \right) / \operatorname{sh} \left(|\xi| \frac{\alpha_+ - \alpha_-}{2} \right) \\ &= \pm \widehat{\varphi}_o(\xi) \frac{\xi}{\operatorname{sh}(\xi(\alpha_+ - \alpha_-)/2)} \pm \widehat{\varphi}'_o(\xi) i \operatorname{th} \left(\xi \frac{\alpha_+ - \alpha_-}{2} \right). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial n}(\tau, -\alpha_{\mp}) &= \pm \operatorname{const} \int_{\mathbb{R}} \varphi_o(t) \left(\operatorname{ch} \frac{\pi(\tau - t)}{\alpha_+ - \alpha_-} \right)^{-2} dt \\ &\quad \pm \operatorname{const} \int_{\mathbb{R}} \varphi'_o(t) \left(\operatorname{sh} \frac{2\pi(\tau - t)}{\alpha_+ - \alpha_-} \right)^{-1} dt. \end{aligned}$$

Из лемм 3 и 4 при выполнении условия $\alpha + 1 < p$ следует

$$\left\| \frac{\partial F_o}{\partial n} \right\|_{L_{p,p-2-\alpha}} \leq \operatorname{const} (\|\varphi_o\|_{L_{p,p-2-\alpha}} + \|\varphi'_o\|_{L_{p,p-2-\alpha}}).$$

Через χ обозначим функцию класса $C^\infty(\mathbb{R})$, равную единице на $\operatorname{supp} \varphi$ и равную нулю при $t < 0$. Тогда $\Phi := \Delta((F_o + F_e)\chi)$ имеет ограниченный носитель и принадлежит пространству $L_p(\Pi_*)$. Пусть Z является решением задачи Дирихле: $\Delta Z = -\Phi$ в Π_* , $Z = 0$ на $\partial\Pi_*$ – в пространстве $W^2_p \cap \dot{W}^1_p(\Pi_*)$. Согласно [4] функция Z принадлежит $W^2_{p,\beta}(\Pi_*)$, где $0 < \beta < 1/2$. Используя локальную оценку, можно доказать, что $z \in W^3_{p,\beta}(\Pi_*)$. Из теоремы вложения теперь следует, что Z и ∇Z не превосходят $\operatorname{const} \exp(-\beta\tau)$. Таким образом, функция $G = Z + \chi F$ является решением задачи Дирихле в полуполосе Π_* с граничной функцией φ , и производная $\partial G / \partial n$ принадлежит $L_{p,p-\alpha-2}(\partial\Pi_*)$, если показатель α удовлетворяет неравенству $\alpha + 1 < p$.

Для функции φ из пространства $\mathfrak{N}^o_{p,\alpha}(\Gamma)$, равной нулю в окрестности точки пика, существует гармоническое продолжение в область Ω , принадлежащее пространству $W^1_2(\Omega)$. Согласно [4] это продолжение и его градиент экспоненциально стремятся к нулю при $\operatorname{Re} z \rightarrow 0$. Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть φ принадлежит пространству $\mathfrak{N}_{p,\alpha}^e(\Gamma)$, где $p/2 < \alpha + 1 < p$. Тогда существует гармоническое продолжение функции φ в область Ω^- , нормальная производная которого принадлежит $L_{p,p+\alpha}(\Gamma)$, и одна из сопряженных гармонических функций является элементом $\mathfrak{N}_{p,\alpha}^o(\Gamma)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что функция φ сосредоточена в окрестности точки пика на Γ . Тогда функция $\varphi(\eta) := \varphi(\theta(\eta + i0))$ является элементом пространства $L_{p,p+2\alpha+1}^1(\mathbb{R})$ и ее четная составляющая $\varphi_e(\eta)$ принадлежит $L_{p,2\alpha-2p+1}(\mathbb{R})$. Поэтому отношение $\varphi_e(\eta)/\eta$ суммируемо в окрестности начала координат. Искомым гармоническим продолжением функции $\varphi(\eta)$ на верхнюю полуплоскость $\{\zeta = \eta + i\xi : \xi > 0\}$ является

$$F(\zeta) = -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \varphi'(\tau) \operatorname{Im} \left(\log(\zeta - \tau) - \log \zeta + \frac{\tau}{\zeta} \right) d\tau.$$

Тогда

$$\frac{\partial F}{\partial \xi}(\eta + i0) = -\frac{1}{\pi} \frac{1}{\eta^2} \int_{\mathbb{R}} \varphi'(\tau) \tau^2 \frac{d\tau}{\eta - \tau}.$$

Так как $\partial F/\partial \xi \in L_{p,p+2\alpha+1}(\mathbb{R})$, то сопряженная гармоническая функция G принадлежит $L_{p,p+2\alpha+1}^1(\mathbb{R})$. Нечетная составляющая G_o функции G равна

$$\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \varphi_e(\tau) \frac{\eta - \tau}{(\eta - \tau)^2 + \xi^2} d\tau + \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \varphi_e(\tau) \frac{d\tau}{\tau} - \frac{1}{\pi} \frac{\eta}{\eta^2 + \xi^2} \int_{\mathbb{R}} \varphi_e(\tau) d\tau.$$

Сужение $G_o(\zeta)$ на граничную прямую имеет вид

$$\begin{aligned} G_o(\eta + i0) &= \frac{1}{\pi} \eta \int_{\mathbb{R}} \varphi_e(\tau) \frac{1}{\tau} \frac{d\tau}{\eta - \tau} - \frac{1}{\pi} \frac{1}{\eta} \int_{\mathbb{R}} \varphi_e(\tau) d\tau \\ &= G_{oo}(\eta) - \frac{1}{\pi} \frac{1}{\eta} \int_{\mathbb{R}} \varphi_e(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (3)$$

Функция G_{oo} принадлежит пространству $L_{p,2\alpha-2p+1}(\mathbb{R})$. Так как

$$\left(\frac{\partial G}{\partial \eta} \right) (\eta + i0) = - \left(\frac{\partial F}{\partial \xi} \right) (\eta + i0) = O(\eta^{-2})$$

на бесконечности, то сужение $G_{oo}(z) := G_{oo}(\theta^{-1}(z))$ ($z \in \Omega^-$) на граничную кривую принадлежит пространству $\mathfrak{N}_{p,\alpha}^o(\Gamma)$.

Предположим теперь, что φ равна нулю в окрестности точки пика. Гармоническое продолжение F функции φ в область Ω^- и градиент ∇F , допускают оценки

$$F(z) = O(|z|^\beta), \quad \nabla F(z) = O(|z|^{\beta-1})$$

для любого β , удовлетворяющего неравенству $0 < \beta < 1/2$. Для сопряженной гармонической функции G имеем $(\partial G/\partial s)(q) = (\partial F/\partial n)(q) = O(|q|^{\beta-1})$ на Γ . Поэтому $\partial G/\partial s$ принадлежит $L_{p,p+\alpha}(\Gamma)$. Функция $(F \circ \theta)(\eta + i0)$ удовлетворяет условию Липшица с показателем 2β , $0 < 2\beta < 1$. По теореме Привалова функция $(G \circ \theta)(\eta + i0)$ обладает тем же свойством. Значит, сужение G на Γ допускает оценку $G(q) = O(|q|^\beta)$. Отсюда следует, что $G \in L_{p,\alpha-p}(\Gamma)$. Таким образом, функция G принадлежит пространству $\mathfrak{N}_{p,\alpha}^o(\Gamma)$.

Представим функцию φ из $\mathfrak{N}_{p,\alpha}^e(\Gamma)$ в виде суммы $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, где φ_1 сосредоточена в малой окрестности точки пика, φ_2 равна нулю вблизи точки O и $\varphi_1(\eta) := (\varphi \circ \theta)(\eta + i0)$ удовлетворяет условию В.Р. $\int_{\mathbb{R}} \varphi_1(\eta) d\eta = 0$. При выполнении последнего условия функция $G_o(\eta)$ в (3) совпадает с $G_{oo}(\eta)$ и, значит, принадлежит $L_{p,2\alpha-2p+1}(\mathbb{R})$. Предложение доказано.

Следующие два предложения доказываются аналогично предыдущему.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть функция φ принадлежит $L_{p,p+\alpha}^1(\Gamma)$, где $0 < \alpha + 1 < p$, $\alpha + 1 \neq p/2$. Тогда существует гармоническое продолжение φ в область Ω^- , нормальная производная которого является элементом пространства $L_{p,p+\alpha}(\Gamma)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть ψ лежит в пространстве $L_{p,p+\alpha}(\Gamma)$, где $0 < \alpha + 1 < p$, $\alpha + 1 \neq p/2$. Тогда внешняя задача Неймана: $\Delta F = 0$ в Ω^- , $\partial F/\partial n = \psi$ на Γ , $F = O(1)$ на бесконечности, имеет решение, сужение которого на Γ принадлежит пространству $L_{p,p+\alpha}^1(\Gamma)$.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть F^i и F^e – гармонические продолжения функции φ в области Ω и Ω^- , построенные в предложениях 2 и 1 соответственно. Решением задачи (1), как известно, является пара

$$\left((2\pi)^{-1} \left(\frac{\partial F^i}{\partial n} - \frac{\partial F^e}{\partial n} \right), F^e(\infty) \right).$$

Отсюда следует, что образ $V_0(L_{p,p+\alpha}(\Gamma))$ содержит $\mathfrak{N}_{p,\alpha}^o(\Gamma)$.

Для того, чтобы доказать обратное включение, достаточно рассмотреть оператор

$$(V_*\sigma)(z) = \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} \sigma(q) \log \frac{|z|}{|z-q|} ds_q.$$

Пусть $z = z_+ \in \Gamma_+$ и z_- – точка на Γ_- такая, что $\operatorname{Re} z_+ = \operatorname{Re} z_-$. Через $\Gamma_{\pm}^\varepsilon(z)$ обозначим дуги кривых $\Gamma_{\pm}$, проектируемые на отрезок $[(1-\varepsilon)\operatorname{Re} z, (1+\varepsilon)\operatorname{Re} z]$. Представим $\partial V_*\sigma(z)/\partial s$ в виде суммы

$$\left(\int_{\Gamma_-^\varepsilon(z)} + \int_{\Gamma_+^\varepsilon(z)} \right) \sigma(q) \frac{\partial}{\partial s} \log \frac{|z|}{|z-q|} ds_q + I(z). \quad (4)$$

Нетрудно видеть, что последнее слагаемое $I(z)$ принадлежит $L_{p,p+\alpha}(\Gamma)$. Далее, найдутся такие положительные ε и M , не зависящие от z , что для всех $q \in \Gamma_-^\varepsilon(z)$ выполняется соотношение $1/M \leq |q-z|^2 / ((x-\tau)^2 + \tau^4) \leq M$. Здесь и ниже $\tau = \operatorname{Re} q$, $x = \operatorname{Re} z$. Поэтому

$$\left| \frac{\partial}{\partial s} \log \frac{|z|}{|z-q|} \right| \leq \operatorname{const} \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{|x-\tau| + \tau^2} \right].$$

Отсюда и из леммы 4 следует, что первое слагаемое в (4) принадлежит $L_{p,p+\alpha}(\Gamma)$. Наконец, имеем

$$\frac{\partial}{\partial s} \log \frac{|z|}{|z-q|} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-\tau} + O(1) \quad (q \in \Gamma_+^\varepsilon(z)).$$

Из теоремы об ограниченности преобразования Гильберта в весовом L^p -пространстве следует принадлежность интеграла

$$\frac{1}{x} \int_{|x-\tau| < \varepsilon x} \sigma(\tau) \tau \frac{d\tau}{x-\tau},$$

где $\sigma(\tau) := \sigma(q)$, пространству $L_{p,p+\alpha}(0, \delta)$. Поэтому производная $\partial V_* \sigma(z) / \partial s$ принадлежит $L_{p,p+\alpha}(\Gamma)$.

Для $z = z_+ \in \Gamma_+$ положим

$$(V_* \sigma)_o(z) := V_* \sigma(z_+) - V_* \sigma(z_-) = \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} \sigma(q) \log \left| \frac{1-q/z_-}{1-q/z_+} \right| ds_q.$$

Сделаем замену $z = 1/\zeta$, $\zeta = \eta + i\xi$. Тогда интеграл справа перепишется в виде

$$\int_{l_+ \cup l_-} \sigma(t) \log \left| \frac{\zeta_- - t}{\zeta_+ - t} \right| dt = I_+ + I_-.$$

Здесь тем же символом $\sigma(t)$ обозначена функция $\sigma(1/t)(1/t^2)$ и через $l_\pm$ — образы кривых $\Gamma_\mp$. Найдется положительная константа M , для которой

$$\begin{aligned} M^{-1} &< \frac{|\zeta_+ - t|}{|\tau - \eta|} < M, \\ M^{-1} &< \frac{\sqrt{(\tau - \eta)^2 + (\alpha_+ - \alpha_-)^2}}{|\zeta_- - t|} < M \quad (t \in l_+), \end{aligned}$$

где $\tau = \operatorname{Re} t$. Поэтому

$$|I_+| \leq \operatorname{const} \int_{1/\delta}^\infty |\sigma(\tau)| \log \left(1 + \frac{(\alpha_+ - \alpha_-)^2}{(\tau - \eta)^2} \right) d\tau. \quad (5)$$

Функция $\log(1 + a^2/t^2)$ удовлетворяет условиям леммы 4. Так как весовой показатель $p - \alpha - 2$ принадлежит промежутку $(-1, p - 1)$, то интеграл в (5) является элементом $L_{p,p-2-\alpha}(1, \infty)$. Аналогично рассматривается другое слагаемое I_- . Это доказывает, что оператор V_* отображает пространство $L_{p,p+\alpha}(\Gamma)$ в $\mathfrak{R}_{p,\alpha}^o(\Gamma)$. Теорема доказана.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Пусть F^{di} гармоническое продолжение функции φ в область Ω , построенное в предложении 2. Через F^{ne} обозначим решение из пространства $L_{p,p+\alpha}^1(\Gamma)$ внешней задачи Неймана с граничной функцией $\partial F^{di}/\partial n$ (см. предложение 4). Решением интегрального уравнения (2) является функция

$$\sigma = (2\pi)^{-1}(F^{ne} - \varphi)$$

(см [1]). Таким образом, $(\pi E - W_0)(L_{p,p+\alpha}^1(\Gamma))$ содержит $\mathfrak{N}_{p,\alpha}^o(\Gamma)$.

Докажем обратное включение. Представим $(\pi E - W_0)\sigma(z)$ в виде

$$\begin{aligned} \pi \left[\sigma(z_+) + \sigma(z_-) - \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} \sigma(q) \frac{\partial}{\partial n_q} \log \frac{1}{|q|} ds_q \right. \\ \left. - \left[\int_{\Gamma_-^\varepsilon(z)} \sigma(q) \frac{\partial}{\partial n_q} \log \frac{1}{|z - q|} ds_q + \pi \sigma(z_-) \right] \right] + I(z). \end{aligned} \quad (6)$$

Нетрудно видеть, что последнее слагаемое $I(z)$ принадлежит $L_{p,\alpha-p}(\Gamma)$. Для некоторого положительного ε в локальных координатах имеет место представление

$$\frac{\partial}{\partial n_q} \log \frac{1}{|z - q|} = \frac{1}{(x - \tau)^2 + g^2} + O(1),$$

где $g = (\alpha_+ - \alpha_-)x^2$. Поэтому выражение в квадратных скобках в (6) не превосходит

$$\begin{aligned} \text{const} \left\{ \left| \pi \sigma(x) - \int_{|x-\tau| < \varepsilon x} \sigma(\tau) \frac{g}{(x - \tau)^2 + g^2} d\tau \right| \right. \\ \left. + \int_{|x-\tau| < \varepsilon x} |\sigma(\tau)| d\tau \right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Второе слагаемое в (7) принадлежит $L_{p,\alpha-p}(0, \delta)$. В первом слагаемом выполним замену $\nu = 1/\tau$ и введем обозначения $\sigma(\nu) := \sigma(1/\tau)$, $a = (\alpha_+ - \alpha_-)$. Получим

$$\begin{aligned} \pi \sigma(x) - \int_{x/(1+\varepsilon)}^{x/(1-\varepsilon)} \sigma(\nu) \frac{a}{(x - \nu)^2 + a^2 \nu^2 / x^2} d\nu \\ = \pi \sigma(x) - \int_{\mathbb{R}} \sigma(\nu) \frac{a}{(x - \nu)^2 + a^2} d\nu + I(x). \end{aligned} \quad (8)$$

Слагаемое $I(x)$ в (8) принадлежит $L_{p,p-\alpha-2}(1, +\infty)$. Преобразование Фурье первого слагаемого в (8) представим в виде

$$-\pi i \operatorname{sign} \xi \widehat{\sigma'}(\xi) \frac{1 - \exp(-a|\xi|)}{|\xi|}.$$

Так как обратное преобразование Фурье функции $(1 - \exp(-a|\xi|))/|\xi|$ равно $\text{const} \log(1 + a^2/x^2)$ и показатель $p - 2 - \alpha$ из промежутка $(-1, p - 1)$, то по лемме 4 рассматриваемое слагаемое в (8) является элементом $L_{p, p-2-\alpha}(1, +\infty)$. Это доказывает, что разность $(\pi E - W_0)\sigma(z_+) - (\pi E - W_0)\sigma(z_-)$ принадлежит $L_{p, \alpha-p}(\Gamma)$.

Далее имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \left(\pi \sigma(z) - \int_{\Gamma} \sigma(q) \frac{\partial}{\partial n_q} \log \frac{1}{|z - q|} ds_q \right) \\ = -\pi \sigma'(z) + \int_{\Gamma} \sigma'(q) \frac{\partial}{\partial n_z} \log \frac{|z|}{|z - q|} ds_q. \end{aligned}$$

Слагаемое $I(z)$ принадлежит $L_{p, p+\alpha}(\Gamma)$. Так как

$$\left| \frac{\partial}{\partial n_z} \log \frac{|z|}{|z - q|} \right| \leq \text{const} \left(\frac{d}{|z - q|^2} \frac{|q|}{|z|} + 1 \right) \quad (q \in \Gamma_-^\varepsilon(z)),$$

то в локальных координатах имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_-^\varepsilon(z)} \sigma'(q) \frac{\partial}{\partial n_z} \log \frac{|z|}{|z - q|} ds_q \right| \\ \leq \text{const} \left[\frac{1}{x} \int_{|x-\tau| < \varepsilon x} |\sigma'(\tau)| \tau \frac{g}{(x - \tau)^2 + g^2} d\tau \right. \\ \left. + \frac{1}{x} \int_{|x-\tau| < \varepsilon x} |\sigma'(\tau)| \tau d\tau \right]. \quad (9) \end{aligned}$$

По лемме 4 правая часть в (9) из пространства $L_{p, p+\alpha}(0, \delta)$. Таким образом, производная $\partial(\pi E - W_0)\sigma(z)/\partial s$ принадлежит $L_{p, p+\alpha}(\Gamma)$. Значит,

$$(\pi E - W_0)(L_{p, p+\alpha}^1(\Gamma)) \subset \mathfrak{N}_{p, \alpha}^o(\Gamma).$$

Теорема доказана.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Пусть F^{di} – гармоническое продолжение ψ в область Ω^- , нормальная производная которого принадлежит $L_{p, p+\alpha}(\Gamma)$, и G – сопряженная гармоническая функция из $\mathfrak{N}_{p, \alpha}^o(\Gamma)$ (см. предложение 2). Так как

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \frac{\partial F^{de}}{\partial s} = \frac{d\psi}{ds},$$

то функция G является решением задачи Неймана в Ω^- с краевым условием $d\psi/ds$. Гармоническое продолжение в область Ω сужения G на Γ обозначим через F^{di} . По предложению 3 нормальная производная $\partial F^{di}/\partial n$ принадлежит $L_{p, p+\alpha}(\Gamma)$. Тогда функция

$$\gamma = (2\pi)^{-1} \left(\frac{\partial F^{di}}{\partial n} - \frac{d\psi}{ds} \right)$$

(см [2]) из пространства $L_{p,p+\alpha}(\Gamma)$ является решением интегрируемого уравнения внешней задачи Неймана. Отсюда следует, что

$$\left(\pi E - \frac{\partial}{\partial n} V_0\right)(L_{p,p+\alpha}(\Gamma)) \supset \frac{d}{ds} \mathfrak{N}_{p,\alpha}^e(\Gamma).$$

Докажем обратное включение. Пусть $\gamma \in L_{p,p+\alpha}(\Gamma)$ и μ — первообразная функции γ . Тогда μ принадлежит $L_{p,p+\alpha}^1(\Gamma)$. Через $\psi(z)$, $z \in \Gamma$, обозначим функцию

$$\psi(z) = \pi \mu(z) + \int_{\Gamma} \mu(q) \frac{\partial}{\partial n_q} \log \frac{1}{|z - q|} ds_q.$$

Как в теореме 2 доказывается, что $\psi(z_+) + \psi(z_-)$ является элементом $L_{p,\alpha-p}(\Gamma)$. Далее имеем

$$\frac{d}{ds} \psi(z) = \pi \gamma(z) - \int_{\Gamma} \gamma(q) \frac{\partial}{\partial n_z} \log \frac{|z|}{|z - q|} ds_q.$$

Принадлежность функции $d\psi/ds$ пространству $L_{p,p+\alpha}(\Gamma)$ доказана в теореме 2. Теорема доказана.

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Пусть F^{di} — гармоническое продолжение функции φ в область Ω и G — сопряженная гармоническая функция такая, что G на Γ принадлежит $\mathfrak{N}_{p,\alpha}^o(\Gamma)$. По предложению 1 существует гармоническое продолжение F^{de} сужения функций G на Γ в область Ω^- такое, что $\partial F^{de}/\partial n \in L_{p,p+\alpha}(\Gamma)$. Обозначим через F^{ne} одну из сопряженных гармонических функций. Имеем

$$\frac{\partial F^{ne}}{\partial s} = -\frac{\partial F^{de}}{\partial n} \in L_{p,p+\alpha}(\Gamma).$$

Значит, сужение F^{ne} на Γ принадлежит $L_{p,p+\alpha}^1(\Gamma)$. Так как

$$\frac{\partial F^{ne}}{\partial n} = \frac{\partial F^{de}}{\partial s} = \frac{\partial G}{\partial s} = \frac{\partial F^{di}}{\partial n}$$

на Γ , то функция F^{ne} является решением задачи Неймана: $\Delta F^{ne} = 0$ в Ω^- , $\partial F^{ne}/\partial n = \partial F^{di}/\partial n$ на Γ . Тогда функция $\sigma = (2\pi)^{-1}(F^{ne} - \varphi)$ из $L_{p,p+\alpha}^1(\Gamma)$ удовлетворяет интегральному уравнению внутренней задачи Дирихле. Значит, образ $(\pi E - W_0)(L_{p,p+\alpha}^1(\Gamma))$ содержит $\mathfrak{N}_{p,\alpha}^e(\Gamma)$.

Обратное включение доказывается как в теореме 2. Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5. Пусть ψ принадлежит $\mathfrak{N}_{p,\alpha}^o(\Gamma)$. Внешняя задача Дирихле с граничной функцией ψ имеет решение F^{de} , нормальная производная которого принадлежит $L_{p,p+\alpha}(\Gamma)$. Сопряженную гармоническую функцию обозначим через G . Имеем $\partial G/\partial n = \partial F^{de}/\partial s = \psi'_s$ на Γ . Так как $\partial G/\partial s = -\partial F^{de}/\partial s \in L_{p,p+\alpha}(\Gamma)$, то функция G принадлежит $L_{p,p+\alpha}^1(\Gamma)$. Гармоническое продолжение в область Ω сужения функции G на Γ , построенное в предложении 1, обозначим через F^{di} . Тогда функция

$$\gamma = (2\pi)^{-1} \left(\frac{\partial F^{di}}{\partial n} - \frac{d\psi}{ds} \right)$$

является решением интегрального уравнения задачи Неймана в пространстве $L_{p,p+\alpha}(\Gamma)$. Значит, образ

$$\left(\pi E - \frac{\partial}{\partial n} V_0 \right) (L_{p,p+\alpha}(\Gamma))$$

содержит $(d/ds)\mathfrak{N}_{p,\alpha}^o(\Gamma)$.

Обратное включение доказывается как в теореме 3. Теорема доказана.

Челябинский государственный университет

Поступило

02.07.93

Переработанный вариант

27.06.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Мазья В. Г., Соловьёв А. А. Об интегральном уравнении задачи Дирихле в плоской области с острыми на границе // Матем. сб. 1989. Т. 180. № 9. С. 1211–1233.
- [2] Мазья В. Г., Соловьёв А. А. Ограничном уравнении задачи Неймана для области с пиком // Тр. ЛМО. 1991. Т. 1. С. 109–134.
- [3] Stein E. M. Note on singular integrals // Proc. Amer. Math. Soc. 1957. V. 8. P. 250–254.
- [4] Мазья В. Г., Пламеневский Б. А. Оценки в L^p и в классах Гёльдера и принцип максимума Миранда–Агмона для решений эллиптических краевых задач в областях с особыми точками на границе // Math. Nachr. 1978. V. 81. P. 25–82.