Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Сушко, Сходимость ошибки дискретизации при вычислении сингулярных сверток, *Матем. заметки*, 1996, том 59, выпуск 6, 893–908

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1787>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 17:50:35

СХОДИМОСТЬ ОШИБКИ ДИСКРЕТИЗАЦИИ ПРИ ВЫЧИСЛЕНИИ СИНГУЛЯРНЫХ СВЕРТОК

Д. В. Сушко

1. *Сингулярной сверткой* будем называть следующее выражение

$$z(t) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega e^{-i\omega t} \hat{L}(\omega) \hat{u}(\omega), \quad (1)$$

$\hat{L}, \hat{u}$ – комплекснозначные функции одного вещественного переменного. В (1) и ниже, если пределы интегрирования (или суммирования) опущены, то оно ведется от $-\infty$ до $+\infty$. Функция $\hat{L}(\omega)$ является кусочно-непрерывной (т.е. может иметь не более конечного числа разрывов 1-го рода) и, вообще говоря, растущей на бесконечности. Функция $\hat{u}(\omega)$ является Фурьеобразом абсолютно интегрируемой функции $u(t)$, $\hat{u}(\omega) = \int dt e^{i\omega t} u(t)$, и предполагается достаточно быстро убывающей, так чтобы интеграл в (1) сходилсся абсолютно и равномерно. Задача *вычисления сингулярной свертки* состоит в том, чтобы по заданным отсчетам u_n , $u_n = u(n\Delta t)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, функции $u(t)$ построить приближение сингулярной свертки $z(t)$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Укажем, что к вычислению сингулярной свертки сводится задача численного решения уравнения свертки

$$\int K(t - t') z(t') dt' = u(t)$$

по известным отсчетам u_n правой части. В этом случае $\hat{L}(\omega) = \hat{K}^{-1}(\omega)$ и предполагается, что $\hat{K}(\omega) \neq 0$. В дальнейшем будем использовать терминологию уравнения свертки и называть L – *ядром*, u – *правой частью*, z – *решением*.

Для решения поставленной задачи используется метод регуляризации [1], который позволяет получить широкий класс алгоритмов построения приближения $z_A(t)$. Рассматривается регуляризованная свертка

$$z_\alpha(t) = \int H_\alpha(t - t') u(t') dt', \quad \hat{H}_\alpha(\omega) = \hat{L}(\omega) R_\alpha(\omega). \quad (2)$$

Зависящее от α семейство вещественнозначных функций $R_\alpha(\omega)$ называется *регуляризатором* (вещественный параметр α – параметр регуляризации). Регуляризатор выбирается таким образом, чтобы при любом α *регуляризованное ядро* $\hat{H}_\alpha(\omega)$ было абсолютно интегрируемым, а в пределе $\alpha \rightarrow 0$ происходило снятие регуляризации $R_\alpha(\omega) \rightarrow 1$. Формула (2), таким образом, корректно определяет *регуляризованное решение* $z_\alpha(t)$, и в силу теоремы о свертке имеет место равенство

$$z_\alpha(t) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega e^{-i\omega t} \hat{H}_\alpha(\omega) \hat{u}(\omega). \quad (3)$$

Искомое приближенное решение $z_A(t)$ получим, применив к (2) простейшую квадратурную формулу прямоугольников

$$z_A(t) \doteq z_{\alpha, \Delta t}(t) = \sum_n H_\alpha(t - n\Delta t) u_n \Delta t. \quad (4)$$

Полная ошибка восстановления $\Delta z_A(t) \doteq z_A(t) - z(t)$ естественным образом делится на две части: *ошибку регуляризации* $\Delta z_\alpha(t) = z_\alpha(t) - z(t)$ и *ошибку дискретизации* $\Delta z_{\alpha, \Delta t}(t) = z_{\alpha, \Delta t}(t) - z_\alpha(t)$. Поведение ошибки регуляризации рассматривалось в ряде работ (например, см. [1], [2]). В достаточно общей ситуации $\Delta z_\alpha(t) \rightarrow 0$ равномерно по t при снятии регуляризации $\alpha \rightarrow 0$.

Общая задача приближенного вычисления значения оператора (возможно нелинейного) по дискретной информации рассмотрена в [3] в рамках теории аппроксимации. В этой работе для операторов, удовлетворяющих определенным условиям, предложен эффективный метод оценивания точности дискретных приближений. В случае оператора сингулярной свертки в [4] был предложен другой подход к исследованию ошибки дискретизации. Там были получены формулы, позволяющие описать асимптотическое поведение (при $\alpha \rightarrow 0$, $\Delta t \rightarrow 0$) ошибки дискретизации для некоторого класса ядер степенного роста на бесконечности при использовании гладких однородных регуляризаторов ($R_\alpha(\omega) = S(\alpha\omega)$, $S(\xi)$ – заданная гладкая функция). В [5] было введено понятие алгоритма высокого разрешения и сформулирована задача сходимости ошибки дискретизации для алгоритмов высокого разрешения (см. ниже).

Настоящая работа является продолжением работ [4], [5]. В ней формулируется общая задача о сходимости ошибки дискретизации, содержащая задачу сходимости для алгоритмов высокого разрешения в качестве частного случая, и устанавливаются условия сходимости. При этом рассматриваются ядра произвольной скорости роста на бесконечности и регуляризаторы общего вида. В частности, работа содержит доказательства приведенных в [5] результатов.

2. Сформулируем общую задачу о сходимости ошибки дискретизации. Пусть ядро $\hat{L}(\omega)$ и регуляризатор (т.е. семейство функций) $R_\alpha(\omega)$ фиксированы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Ошибка дискретизации $\Delta z_{\alpha, \Delta t}(t)$ называется *сходящейся на классе $\{u\}$ правых частей во множестве $\mathcal{D}_{(\Delta t, \alpha)} \subset \{(\Delta t, \alpha) : \Delta t, \alpha > 0\}$ значений параметров*, если $\forall u \in \{u\}$ и $\forall t \in \mathbb{R}$ имеет место $\Delta z_{\alpha, \Delta t} \equiv z_{\alpha, \Delta t}(t) - z_\alpha(t) \rightarrow 0$ при $\Delta t \rightarrow 0$, $\Delta \alpha \rightarrow 0$, $(\Delta t, \alpha) \in \mathcal{D}_{(\Delta t, \alpha)}$. В случае, если сходимость равномерна по t , ошибка дискретизации называется *равномерно сходящейся*.

Задача исследования сходимости может быть поставлена одним из следующих способов. Во-первых, найти для данного класса правых частей область сходимости. Во-вторых, доказать сходимость в некотором множестве значений параметров. Наконец, найти дополнительные условия на регуляризатор, обеспечивающий сходимость в заданном множестве. Ниже в статье рассматриваются, в основном, постановки второго и третьего типа. При этом особый интерес представляет исследование сходимости на кривых высокого разрешения. Дадим соответствующее определение.

Пусть задан регуляризатор $R_\alpha(\omega)$. *Разрешением регуляризации* называется величина

$$g_R(\alpha) = \left[\frac{1}{2\pi} \int R_\alpha(\omega) d\omega \right]^{-1}. \quad (5)$$

Кривые $\alpha = \alpha_h(\Delta t)$ в области $(\Delta t, \alpha)$: $\Delta t, \alpha > 0$, определяемые условием

$$g_R(\alpha) = h\Delta t, \quad 0 < h = \text{const}, \quad (6)$$

называются *кривыми высокого разрешения*. Регуляризатор предполагается таковым, что (6) (хотя бы при достаточно малых Δt) имеет единственное решение $\alpha_h(\Delta t)$, и $\alpha_h(\Delta t) \rightarrow 0$ при $\Delta t \rightarrow 0$. Метод построения приближенного решения, при котором параметр регуляризации выбирается на основе (5), (6), называется *алгоритмом высокого разрешения*. Постановка задачи сходимости ошибки дискретизации для алгоритмов высокого разрешения (на кривых высокого разрешения) следующая: $z_{\alpha, \Delta t}(t) \rightarrow z_\alpha(t)$ при $\Delta t \rightarrow 0$ и $\alpha = \alpha_h(\Delta t)$.

3. Начнем с рассмотрения поставленной задачи для ядер произвольной скорости роста. Введем некоторые обозначения. Пусть $\Lambda(\omega)$ – некоторая вещественная, кусочно-непрерывная, четная, неотрицательная и не равная нулю тождественно, неубывающая при $\omega \geq 0$ функция. Будем говорить, что ядро $\hat{L}(\omega)$ растет не быстрее $\Lambda(\omega)$, если $|\hat{L}(\omega)| \leq \Lambda(\omega)$; весь класс таких ядер обозначим $\mathcal{L}(\Lambda)$.

Будем говорить, что правая часть u принадлежит классу допустимых (для данного класса ядер $\mathcal{L}(\Lambda)$) гладких (M -гладких) правых частей, если выполнены условия:

1) $u(t)$ – кусочно-непрерывна, абсолютно интегрируема и имеет ограниченную вариацию;

2) $\Lambda(\omega)\hat{u}(\omega) = O(|\omega|^{-M})$, $M \geq 1 + \delta$ при $|\omega| \rightarrow \infty$; здесь и ниже δ означает произвольное положительное число. Такой класс правых частей обозначается $\mathcal{U}_M(\Lambda)$. Второе из приведенных условий означает существование для каждого u константы $\tilde{u} > 0$ такой, что

$$\Lambda(\omega)|\hat{u}(\omega)| \leq \tilde{u}|\omega|^{-M}. \quad (7)$$

Это условие гарантирует корректное определение точного решения $z(t)$ формулой (1) для любых $L \in \mathcal{L}(\Lambda)$, $u \in \mathcal{U}_M(\Lambda)$. На практике использование такого условия соответствует наличию некоторой априорной информации о гладкости точного решения.

Наконец, будем говорить, что регуляризатор $R_\alpha(\omega)$ является допустимым (для данного класса ядер $\mathcal{L}(\Lambda)$), если выполнены условия:

R1) $\forall \alpha$ $R_\alpha(\omega)$ – кусочно-гладкая вещественная функция;

R2) $\forall \alpha$ $\Lambda(\omega)R_\alpha(\omega) = O(|\omega|^{-1-\delta})$, $|\omega| \rightarrow \infty$;

R3) $|R_\alpha(\omega)| \leq R_0$ равномерно для всех α ;

R4) $R_\alpha(\omega) \rightarrow 1$ при $\alpha \rightarrow 0$ равномерно на любом компакте в $\mathbb{R}$.

Весь класс регуляризаторов обозначается $\mathcal{R}(\Lambda)$. Отметим, что для $L \in \mathcal{L}(\Lambda)$, $u \in \mathcal{U}_M(\Lambda)$ и $R_\alpha \in \mathcal{R}(\Lambda)$ формула (2) корректно определяет регуляризованное решение $z_\alpha(t)$ (интеграл сходится абсолютно и равномерно); имеет место (3); равномерно по t имеет место $z_\alpha(t) \rightarrow z(t)$ при $\alpha \rightarrow 0$; формула (4) корректно определяет приближенное решение $z_{\alpha, \Delta t}(t)$ (ряд сходится абсолютно и равномерно). Кроме того, для ошибки дискретизации имеет место формула [4]

$$\Delta z_{\alpha, \Delta t}(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \neq 0} e^{-i2n\Omega t} \int d\omega e^{-i\omega t} \hat{H}_\alpha(\omega + 2n\Omega) \hat{u}(\omega), \quad (8)$$

в которой $\Omega = \pi/\Delta t$ – частота Найквиста. Формула (8) получается применением к (4) формулы суммирования Пуассона.

Представим ошибку дискретизации в виде двух слагаемых

$$\Delta z_{\alpha, \Delta t}(t) = \Delta_{\alpha, \Delta t}^a(t) + \Delta_{\alpha, \Delta t}^\infty(t), \quad (9)$$

где $0 < a \leq 1$. Первое слагаемое соответствует интегрированию в (8) по промежутку $|\omega| \leq a\Omega$, второе – интегрированию по $|\omega| \geq a\Omega$. Вклад второго слагаемого оценивает

ЛЕММА 1. Пусть $L \in \mathcal{L}(\Lambda)$, $R_\alpha \in \mathcal{R}(\Lambda)$, $u \in \mathcal{U}_M(\Lambda)$, $M \geq 1 + \delta$. Тогда если $\tilde{H}(\alpha)$ таково, что выполнено условие

$$|\hat{H}_\alpha(\omega)| \leq \tilde{H}(\alpha)|\omega|^{-1-\sigma}, \quad \sigma > 0, \quad (10)$$

то имеет место оценка

$$|\Delta_{\alpha, \Delta t}^\infty(t)| \leq C_1 \tilde{u} \frac{\tilde{H}(\alpha)}{\Lambda(a\Omega)} \Omega^{-M-\sigma} + C_2 \tilde{u} \Omega^{-M+1}, \quad (11)$$

где $\tilde{u}$ – константа из оценки (7) для $\hat{u}(\omega)$, C_1, C_2 – эффективно вычисляемые константы, не зависящие от α, Ω, t .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование $\tilde{H}(\alpha)$ следует из условий, налагаемых на регуляризатор.

Оценку (11) достаточно доказать для каждой из величин

$$\Delta_\pm^\infty(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} e^{\mp i 2n\Omega t} \int_{|\omega| \geq a\Omega} d\omega e^{-i\omega t} \hat{H}^R(\omega \pm 2n\Omega) \hat{u}(\omega).$$

Рассмотрим, например, Δ_+^∞ . Ясно, что

$$|\Delta_+^\infty| \leq \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} I_n, \quad I_n = \int_{|\omega| \geq a\Omega} d\omega |\hat{H}^R(\omega + 2n\Omega)| \cdot |\hat{u}(\omega)|.$$

Оценим I_n , для чего разобьем область интегрирования на шесть частей: $(-\infty, -3n\Omega], [-3n\Omega, -(2n+1)\Omega], [-(2n+1)\Omega, -(2n-1)\Omega], [-(2n-1)\Omega, -n\Omega], [-n\Omega, -a\Omega]$ и $[a\Omega, +\infty)$. Интегралы по указанным промежуткам обозначим I_n^p , $p = 1, \dots, 6$. Учитывая свойства $\Lambda(\omega)$, оценку (7) и, используя (10), имеем

$$\begin{aligned} I_n^1 &\leq C^1 \tilde{u} \frac{\tilde{H}(\alpha)}{\Lambda(a\Omega)} n^{-M-\sigma} \Omega^{-M-\sigma}; \\ I_n^p &\leq C^p \tilde{u} \frac{\tilde{H}(\alpha)}{\Lambda(a\Omega)} n^{-M} \Omega^{-M-\sigma}, \quad p = 2, 4; \\ I_n^3 &\leq C^3 \tilde{u} n^{-M} \Omega^{-M+1}, \\ I_n^p &\leq C^p \tilde{u} \frac{\tilde{H}(\alpha)}{\Lambda(a\Omega)} n^{-1-\sigma} \Omega^{-M-\sigma}, \quad p = 5, 6. \end{aligned}$$

Константы $C^1, \dots, C^6$ эффективно вычисляются и не зависят от n . Сложив полученные оценки и просуммировав по n (с учетом $M \geq 1 + \delta$), имеем искомое.

Достаточное условие сходимости ошибки дискретизации для ядра произвольной скорости роста дает

ТЕОРЕМА 1. Пусть $L \in \mathcal{L}(\Lambda)$, $R_\alpha \in \mathcal{R}(\Lambda)$ фиксированы. Пусть область $\mathcal{D}_{(\Delta t, \alpha)} \equiv \mathcal{D}$ такова, что $\forall(\Delta t, \alpha) \in \mathcal{D}$ выполнено условие

$$|\hat{H}_\alpha(\omega)| \leq C_H |\omega|^{-1-\sigma} \quad \text{при} \quad |\omega| \geq \Omega, \quad (12)$$

где C_H — константа, не зависящая от α и Ω , $\sigma > 0$. Тогда ошибка дискретизации равномерно сходится на классе $\mathcal{U}_M(\Lambda)$, $M \geq 1 + \delta$, во множестве $\mathcal{D}$, и имеет место оценка

$$|\Delta z_{\alpha, \Delta t}(t)| \leq C_3 \tilde{u} \Omega^{-M+1} + C_4 \|\hat{u}\|_{L^1} \Omega^{-1-\sigma}, \quad (13)$$

константы C_3, C_4 эффективно вычисляются и не зависят от α, Ω, t .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы находимся в условиях леммы 1. Возьмем $a = 1$. Используя свойства регуляризатора, функции $\Lambda(\omega)$ и условие (12), получим для всех ω

$$|\hat{H}_\alpha(\omega)| \leq (R_0 \Lambda(\Omega) \Omega^{1+\sigma} + C_H) |\omega|^{-1-\sigma}.$$

Это означает, что для $\tilde{H}(\alpha)$ в (11) имеет место оценка

$$\tilde{H}(\alpha) \leq R_0 \Lambda(\Omega) \Omega^{1+\sigma} + C_H.$$

Теперь (11) дает

$$|\Delta_{\alpha, \Delta t}^\infty(t)| \leq C_3 \tilde{u} \Omega^{-M+1}.$$

Слагаемое $\Delta_{\alpha, \Delta t}^{a=1}(t)$ в (9) оценивается следующим образом:

$$|\Delta_{\alpha, \Delta t}^{a=1}(t)| \leq \frac{1}{2\pi} \sum_{n \neq 0} C_H (n\Omega)^{-1-\sigma} \int d\omega |\hat{u}(\omega)| \leq C_4 \|\hat{u}\|_{L^1} \Omega^{-1-\sigma}.$$

Оценка (13), а с ней и теорема доказаны.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть в условиях теоремы 1 регуляризатор финитный (т.е. $\forall \alpha \quad R_\alpha(\omega)$ — финитная функция). Пусть, кроме того, $\forall(\Delta t, \alpha) \in \mathcal{D}$ выполнено условие

$$R_\alpha(\omega) = 0 \quad \text{при} \quad |\omega| > \Omega. \quad (14)$$

Тогда ошибка дискретизации равномерно сходится на $\mathcal{U}_M$ в $\mathcal{D}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО состоит в том, чтобы заметить, что теперь в (12) $C_H = 0$ и $\Delta_{\alpha, \Delta t}^{a=1}(t) \equiv 0$. В оценке (13) для ошибки дискретизации отсутствует второе слагаемое.

Условие (14) известно как *условие Найквиста*. Теорема 2 показывает, что при выходе регуляризатора за интервал Найквиста ($R_\alpha(\omega) \neq 0$ при $|\omega| > \Omega$) ошибка дискретизации может оставаться сходящейся. Однако выход за интервал Найквиста, допускаемый (12), весьма незначительный. Следующий пример показывает, что для быстро (экспоненциально) растущих ядер условие Найквиста нельзя существенно ослабить.

Рассмотрим $\hat{L}(\omega) = e^{\omega^2}$; $\hat{u}(\omega) = e^{-\omega^2} [1 + \omega^{2n}]^{-1}$, $n \in \mathbb{N}$. Пусть регуляризатор $R_\alpha(\omega)$ неотрицательный, т.е. $\forall \alpha$ имеет место $R_\alpha(\omega) \geq 0$. Пусть, кроме того, для всех $(\Delta t, \alpha) \in \mathcal{D}_{(\Delta t, \alpha)} \equiv \mathcal{D}$ ($\mathcal{D}$ – некоторая область) имеет место

$$R_\alpha(\omega) \geq C_R = \text{const} \quad \text{при} \quad \Omega \leq |\omega| \leq \kappa \Omega,$$

где $C_R > 0$, $1 < \kappa < 2$. Нетрудно видеть, что ошибка дискретизации в этом случае неограничено возрастает,

$$\Delta z_{\alpha, \Delta t}(0) \geq \frac{C_R}{2\pi} [1 + ((2 + \kappa)\Omega)^{2n}]^{-1} \left(\frac{\kappa - 1}{2} \right) e^{\frac{1+\kappa}{2} \cdot \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \cdot \frac{4}{\kappa} \cdot \Omega^2} \rightarrow +\infty,$$

при $\Omega \rightarrow +\infty$ ($\Delta t \rightarrow 0$), $(\Delta t, \alpha) \in \mathcal{D}$. Отметим, что поскольку в нашем примере $M = 2n$, то расходимость остается при любой априорной гладкости решения $z(t)$. Таким образом, в классе быстрорастущих ядер для обеспечения сходимости ошибки дискретизации естественно требовать выполнения условия Найквиста.

Завершим рассмотрение ядер произвольной скорости роста показав, что условие Найквиста (14) совместимо с условиями (5), (6) высокого разрешения. Пусть

$$R_\alpha(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{при } |\omega| \leq 1/\alpha, \\ 0 & \text{при } |\omega| > 1/\alpha. \end{cases} \quad (15)$$

Тогда условие Найквиста выполнено при $\alpha\Omega \equiv \alpha\pi/\Delta t \geq 1$. Кривые высокого разрешения отвечают выбору $\alpha = h\Omega^{-1} = (h/\pi)\Delta t$. Таким образом, условие Найквиста выполнено на кривых высокого разрешения с $h \geq 1$.

4. Рассмотрим теперь задачу сходимости ошибки дискретизации для ядер медленного (не более чем степенного) роста: $L \in \mathcal{L}(\bar{\rho}) \equiv \mathcal{L}(\Lambda)$, где

$$\Lambda(\omega) = \begin{cases} \lambda_0 & \text{при } |\omega| \leq \omega_\Lambda, \\ \lambda_0 \left| \frac{\omega}{\omega_\Lambda} \right|^{\bar{\rho}} & \text{при } |\omega| \geq \omega_\Lambda, \end{cases}$$

и $\bar{\rho}, \omega_\Lambda, \lambda_0$ – некоторые положительные константы. Допустимый класс гладких правых частей в этом случае будем обозначать $\mathcal{U}_M(\bar{\rho})$. Вместо (7) удобнее использовать

$$|\hat{u}(\omega)| \leq \tilde{u}|\omega|^{-\bar{\rho}-M}, \quad M \geq 1 + \delta. \quad (16)$$

Допустимый класс регуляризаторов будем обозначать $\mathcal{R}(\bar{\rho})$ и записывать условие R2) в виде

$$R_\alpha(\omega) = O_\alpha(|\omega|^{-\bar{\rho}-1-\delta}).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть регуляризатор $R_\alpha \in \mathcal{R}(\bar{\rho})$ фиксирован. Область $\mathcal{D} \equiv \mathcal{D}_{(\Delta t, \alpha)}(\kappa, \sigma, C_R) \subset \{(\Delta t, \alpha)\}$, $\kappa > 0$, $\sigma > 0$, $C_R \geq 0$, называется областью квазифинитности, если $\forall (\Delta t, \alpha) \in \mathcal{D}$ выполнено условие

$$|R_\alpha(\omega)| \leq C_R |\omega|^{-\bar{\rho}-1-\sigma} \quad \text{при} \quad |\omega| \geq \kappa \Omega \quad \left(\Omega = \frac{\pi}{\Delta t} \right). \quad (17)$$

Рассмотрим задачу сходимости на областях квазифинитности регуляризатора. Имеет место следующая

ЛЕММА 2. Пусть $L \in \mathcal{L}(\bar{\rho})$, $R_\alpha \in \mathcal{R}(\bar{\rho})$ и $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{(\Delta t, \alpha)}(\kappa, \sigma, C_R)$ – область квазифинитности. Пусть $u \in \mathcal{U}_M(\bar{\rho})$, $M \geq 1 + \delta$. Тогда для всех $(\Delta t, \alpha) \in \mathcal{D}$ имеет место неравенство

$$|\Delta z_{\alpha, \Delta t}(t) - \Delta_{\alpha, \Delta t}^{a, n_0}(t)| \leq C_5 \tilde{u} \Omega^{-M+1} + C_6 \|\hat{u}\|_{L^1} \Omega^{-1-\delta}, \quad (18)$$

где $0 < a \leq 1$, $n_0 \in \mathbb{N}$ и $n_0 \geq \frac{1}{2}(\kappa + a)$, и

$$\Delta_{\alpha, \Delta t}^{a, n_0}(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \neq 0, |n| < n_0} e^{-i2n\Omega t} \int_{-a\Omega}^{a\Omega} d\omega e^{-i\omega t} \hat{H}_\alpha(\omega + 2n\Omega) \hat{u}(\omega). \quad (19)$$

Константы C_5, C_6 не зависят от α, Ω, t и эффективно вычисляемые.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя (17), а также свойства ядра и регуляризатора, получим (для достаточно больших Ω)

$$|\hat{H}^R(\omega)| \leq \begin{cases} \frac{\tilde{R}_0 \lambda_0}{\omega_\Lambda^{\bar{\rho}}} \kappa^{\bar{\rho}+1+\sigma} \Omega^{\bar{\rho}+1+\sigma} |\omega|^{-1-\sigma} & \text{при } |\omega| \leq \kappa \Omega, \\ \frac{C_R \lambda_0}{\omega_\Lambda^{\bar{\rho}}} |\omega|^{-1-\sigma} & \text{при } |\omega| \geq \kappa \Omega. \end{cases}$$

Поэтому для $\tilde{H}(\alpha)$ в лемме 1 имеем

$$\tilde{H}(\alpha) \leq C \Omega^{\bar{\rho}+1+\sigma}.$$

Оценка (11) легко дает для второго слагаемого в (9)

$$|\Delta_{\alpha, \Delta t}^{\infty}(t)| \leq C_5 \tilde{u} \Omega^{-M+1},$$

причем C_5 нетрудно выписать. Далее, используя (17), получаем

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi} \sum_{|n| \geq n_0} e^{-i2n\Omega t} \int_{-a\Omega}^{a\Omega} d\omega e^{-i\omega t} \hat{H}_{\alpha}(\omega + 2n\Omega) \hat{u}(\omega) \right| \\ \leq \frac{1}{\pi} \zeta(1 + \sigma) \frac{\lambda_0 C_R}{\omega_{\Lambda}^{\bar{\rho}}} \|\hat{u}\|_{L^1} \Omega^{-1-\sigma} = C_6 \|\hat{u}\|_{L^1} \Omega^{-1-\sigma}, \end{aligned}$$

$\zeta(\cdot)$ – дзета-функция Римана. Утверждение леммы доказано.

Лемма 2 сводит задачу сходимости ошибки дискретизации на области квазифинитности к анализу величины (19). Достаточные условия сходимости, более слабые, чем условие Найквиста, дает

ТЕОРЕМА 2. Пусть задано медленно растущее ядро $L \in \mathcal{L}(\bar{\rho})$ и допустимый регуляризатор $R_{\alpha} \in \mathcal{R}(\bar{\rho})$. Пусть $\mathcal{D} \equiv \mathcal{D}_{(\Delta t, \alpha)}(\kappa, \sigma, C_R)$ – область квазифинитности. Тогда при выполнении любого из двух условий

- 1) $\exists a' (0 < a' \leq 1)$ такое, что $\forall (\Delta t, \alpha) \in \mathcal{D} \quad R_{\alpha}(\omega) = 0$ при $\omega \in \bigcup_{n \neq 0, |n| \leq [\kappa/2]} [(2n - a')\Omega, (2n + a')\Omega]$, $[\cdot]$ – целая часть числа;
- 2) $\kappa < 2$;

ошибка дискретизации равномерно сходится на классе $\mathcal{U}_M(\bar{\rho})$, $M \geq 1 + \delta$, во множестве $\mathcal{D}$. При этом имеет место оценка

$$|\Delta z_{\alpha, \Delta t}(t)| \leq C_5 \tilde{u} \Omega^{-M+1} + C_6 \|\hat{u}\|_{L^1} \Omega^{-1-\sigma} \quad (20)$$

с теми же константами, что в (18).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае, если выполнено условие 1), в лемме 2 нужно положить $a = \min(a', 2 - 2\{\kappa/2\})$ ($\{\cdot\}$ – дробная часть числа), $n_0 = [\kappa/2] + 1$. Ясно, что при этом $n_0 \geq \frac{1}{2}(\kappa + a)$, и в силу условия 1) $\hat{H}_{\alpha}(\omega + 2n\Omega) = 0$ при $\omega \in [-a\Omega, a\Omega]$, $n = \pm 1, \dots, \pm(n_0 - 1)$. Теперь (18) дает (20), поскольку $\Delta_{\alpha, \Delta t}^{a, n_0}(t) \equiv 0$. Если выполнено условие 2), то, взяв в лемме 2 $a = \min(1, 2 - \kappa)$, видим, что $1 \geq \frac{1}{2}(\kappa + a)$, поэтому можно взять $n_0 = 1$. При этом (18) превращается в (20).

Обратимся теперь к рассмотрению *монотонных* регуляризаторов. Будем называть регуляризатор монотонным, если $\exists \omega_R \geq 0$, не зависящее от α , такое что при всех (достаточно малых) α функция $R_{\alpha}(\omega)$ не возрастает

при $\omega \geq \omega_R$ и не убывает при $\omega \leq -\omega_R$. Отметим, что для монотонного регуляризатора выполнено

$$R_\alpha(\omega) \geq 0 \quad \text{при } |\omega| > \omega_R.$$

Предположим, кроме того, что ядро $L \in \mathcal{L}(\bar{\rho})$ имеет точно степенной рост, т.е.

$$\hat{L}(\omega) = \lambda_0^\pm \left| \frac{\omega}{\omega_\Lambda} \right|^{\rho_0^\pm} + O(|\omega|^{\rho_0^\pm - \delta}), \quad (21)$$

где $\rho_0^+, \rho_0^- \leq \bar{\rho}$, $\lambda_0^\pm$ — комплексные константы, знак “+” относится к $\omega \geq \omega_\Lambda$, “—” — к $\omega \leq -\omega_\Lambda$. В этом случае можно доказать не только достаточное, но и необходимое условие сходимости.

ТЕОРЕМА 3. Пусть задано ядро $L \in \mathcal{L}(\bar{\rho})$ степенного роста (имеет место (21)). Пусть задан регуляризатор $R_\alpha \in \mathcal{R}(\bar{\rho})$ и $\mathcal{D} \equiv \mathcal{D}_{(\Delta t, \alpha)}(\varkappa, \sigma, C_R)$ — область квазифинитности. Тогда для равномерной сходимости ошибки дискретизации на классе $\mathcal{U}_M(\bar{\rho})$, $M \geq 1 + \delta$, во множестве $\mathcal{D}$ достаточно

$$\Omega^{\rho_0^\pm} R_\alpha(\pm(2 - a')\Omega) \rightarrow 0 \quad \text{при некотором } a' \quad (0 < a' < 2), \quad (22)$$

и необходимо

$$\Omega^{\rho_0^\pm} R_\alpha(\pm 2\Omega) \rightarrow 0 \quad (23)$$

при $\Delta t \rightarrow 0$, $\alpha \rightarrow 0$, $(\Delta t, \alpha) \in \mathcal{D}$. При выполнении (22) скорость сходимости ошибки дискретизации определяется скоростью сходимости в этом условии и правой частью (18).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность. В соответствии с леммой 2 нам нужно оценить $\Delta_{\alpha, \Delta t}^{a, n_0}(t)$ из (19). Возьмем $a = \min(1, a', 2 - 2\{\varkappa/2\})$, $n_0 = [\varkappa/2] + 1$; $[\cdot]$, $\{\cdot\}$ — целая и дробная части соответственно. Условие $n_0 \geq (\varkappa + a)/2$ при этом выполнено. При достаточно больших Ω ($\Omega \geq \omega_\Lambda$), $n \neq 0$ и $|\omega| < \Omega$ для ядра вида (21) имеется оценка

$$|\hat{L}(\omega + 2n\Omega)| \leq \frac{\lambda_0^\pm}{\omega_\Lambda^{\rho_0^\pm}} |\omega + 2n\Omega|^{\rho_0^\pm} (1 + C\Omega^{-\delta}),$$

верхний знак соответствует $n \geq 1$, нижний — $n \leq -1$, константа C соответствует O в (21). Поэтому

$$\begin{aligned} |\Delta_{\alpha, \Delta t}^{a, n_0}(t)| &\leq \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{[\varkappa/2]} \int_{-a\Omega}^{a\Omega} d\omega |\hat{u}(\omega)| \\ &\quad \times \left[\frac{|\lambda_0^+|}{\omega_\Lambda^{\rho_0^+}} |\omega + 2n\Omega|^{\rho_0^+} (1 + C\Omega^{-\delta}) |R_\alpha(\omega + 2n\Omega)| \right. \\ &\quad \left. + \frac{|\lambda_0^-|}{\omega_\Lambda^{\rho_0^-}} |\omega - 2n\Omega|^{\rho_0^-} (1 + C\Omega^{-\delta}) |R_\alpha(\omega - 2n\Omega)| \right]. \end{aligned}$$

Теперь, используя монотонность регуляризатора, получаем для достаточно больших Ω ($\Omega \geq \omega_\Lambda$, $\Omega \geq \omega_R$)

$$|\Delta_{\alpha, \Delta t}^{a, n_0}(t)| \leq C' \Omega^{\rho_0^+} R_\alpha((2 - a')\Omega) + C'' \Omega^{\rho_0^-} R_\alpha(-(2 - a')\Omega),$$

поскольку $a \leq a'$. Константы C' , C'' нетрудно выписать явно. Последнее неравенство доказывает достаточность условий (22). Обратим внимание на то обстоятельство, что если $\rho_0^+, \rho_0^- < 0$, то условие (22) выполнено автоматически; в этом случае ошибка дискретизации равномерно сходится в $\mathcal{D}$.

Необходимость. В соответствии с теоремой 2 при $\kappa < 2$ ошибка дискретизации сходится, и условия (23) выполнены автоматически. То же относится к случаю, когда одновременно $\rho_0^+, \rho_0^- < 0$. Поэтому утверждение нетривиально при $\kappa \geq 2$ и одном из чисел (например, ρ_0^+) большем либо равном нулю. Итак, считая $\kappa \geq 2$, $\rho_0^+ \geq 0$ и $\lambda_0^+ \neq 0$, покажем, что равномерная сходимость ошибки дискретизации влечет $\Omega^{\rho_0^+} R_\alpha(+2\Omega) \rightarrow 0$ (необходимость второго условия в (23) доказывается аналогично).

Пусть $\Delta z_{\alpha, \Delta t}(t) \rightarrow 0$ равномерно по t . В силу леммы 2 это означает, что при любой $u \in \mathcal{U}_M$ $\Delta_{\alpha, \Delta t}^{a, n_0}(t) \rightarrow 0$ равномерно по t . Поскольку мы считаем $\kappa \geq 2$, то выражение (19) для $\Delta_{\alpha, \Delta t}^{a, n_0}(t)$ содержит не менее двух слагаемых. Рассмотрим величины

$$I_\pm(\Omega, \alpha; \hat{u}) \equiv I_\pm = \int_{-\pi}^{\pi} \Delta_{\alpha, \Delta t}^{a, n_0}(t) e^{\pm i 2 \Omega t} dt.$$

В силу равномерной сходимости $I_\pm \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow 0$, $\Omega \rightarrow \infty$ ($\Delta t \rightarrow 0$), $(\Delta t, \alpha) \in \mathcal{D}$ для любой $u \in \mathcal{U}_M$. Вычислив интеграл по t , получим

$$\begin{aligned} I_\pm &= \int_{-a\Omega}^{a\Omega} d\omega \frac{\sin \omega \pi}{\omega \pi} \hat{u}(\omega) \hat{L}(\omega \pm 2\Omega) R_\alpha(\omega \pm 2\Omega) \\ &+ \sum_{|n| < n_0, n \neq 0, \pm 1} \int_{-a\Omega}^{a\Omega} d\omega \frac{\sin(2(n \mp 1)\Omega + \omega)\pi}{(2(n \mp 1) + \frac{\omega}{\Omega})\pi} \\ &\times \frac{1}{\Omega} \hat{u}(\omega) \times \hat{L}(\omega + 2n\Omega) R_\alpha(\omega + 2n\Omega). \end{aligned}$$

Выберем теперь $u_\pm \in \mathcal{U}_M$ так, чтобы они удовлетворяли следующим условиям:

- 1) $\hat{u}_\pm(\omega)$ – вещественные и $\hat{u}_\pm(\omega) \geq 0$;
- 2) $\int d\omega \hat{u}_\pm(\omega) = 1$;
- 3) $\text{supp } \hat{u}_+ \subset [-1/2, 0]$, $\text{supp } \hat{u}_- \subset [0, 1/2]$.

Тогда с учетом вида ядер и монотонности регуляризатора получаем

$$I_{\pm}(\Omega, \alpha; \hat{u}_{\pm}) = \lambda_0^{\pm} C^{\pm} \Omega^{\rho_0^{\pm}} \mathcal{J}^{\pm}(\alpha, \Omega) + O(\Omega^{\rho_0^{\pm} - \delta}) R_{\alpha}(\pm 2\Omega) \\ + O(\Omega^{\rho_0^{\mp} - \delta}) R_{\alpha}(\mp 2\Omega). \quad (24)$$

В (24) $C_{\pm} > 0$ – вещественные положительные эффективно вычисляемые константы, O -оценки равномерны по α , и

$$\mathcal{J}^{\pm}(\alpha, \Omega) = \int_{\supp \hat{u}_{\pm}} d\omega \frac{\sin \omega \pi}{\omega \pi} \hat{u}_{\pm}(\omega) R_{\alpha}(\omega \pm 2\Omega).$$

С учетом свойств $\hat{u}_{\pm}$ и монотонности регуляризатора мы видим, что $\mathcal{J}^{\pm}(\alpha, \Omega)$ вещественно и

$$\mathcal{J}^{\pm}(\alpha, \Omega) \geq \frac{2}{\pi} R_{\alpha}(\pm 2\Omega) \geq 0.$$

Мы хотим доказать, что $\Omega^{\rho_0^+} R_{\alpha}(+2\Omega) \rightarrow 0$ в предположении $\lambda_0^+ \neq 0$. Нам нужно для этого рассмотреть восемь различных случаев:

- 1) $\operatorname{Re} \lambda_0^+ > 0, \operatorname{Re} \lambda_0^- \geq 0$;
- 2) $\operatorname{Re} \lambda_0^+ < 0, \operatorname{Re} \lambda_0^- \leq 0$;
- 3) $\operatorname{Re} \lambda_0^+ > 0, \operatorname{Re} \lambda_0^- \leq 0$;
- 4) $\operatorname{Re} \lambda_0^+ < 0, \operatorname{Re} \lambda_0^- \geq 0$;
- 5) $\operatorname{Im} \lambda_0^+ > 0, \operatorname{Im} \lambda_0^- \geq 0$;
- 6) $\operatorname{Im} \lambda_0^+ < 0, \operatorname{Im} \lambda_0^- \leq 0$;
- 7) $\operatorname{Im} \lambda_0^+ > 0, \operatorname{Im} \lambda_0^- \leq 0$;
- 8) $\operatorname{Im} \lambda_0^+ < 0, \operatorname{Im} \lambda_0^- \geq 0$.

Рассмотрим, например, случай 1). В этом случае сложим действительные части (24), соответствующие разным знакам. Это дает

$$\operatorname{Re} I_+(\Omega, \alpha; \hat{u}_+) + \operatorname{Re} I_-(\Omega, \alpha; \hat{u}_-) \\ = \operatorname{Re} \lambda_0^+ \cdot C^+ \Omega^{\rho_0^+} R_{\alpha}(+2\Omega) \left[\frac{\mathcal{J}^+(\alpha, \Omega)}{R_{\alpha}(+2\Omega)} + \operatorname{Re} O(\Omega^{-\delta}) \right] \\ + \operatorname{Re} \lambda_0^- \cdot C^- \Omega^{\rho_0^-} R_{\alpha}(-2\Omega) \left[\frac{\mathcal{J}^-(\alpha, \Omega)}{R_{\alpha}(-2\Omega)} + \operatorname{Re} O(\Omega^{-\delta}) \right].$$

В силу наших предположений (случай 1) выражения перед квадратными скобками неотрицательны. Кроме того, $\mathcal{J}^{\pm}(\alpha, \Omega)/R_{\alpha}(\pm 2\Omega) \geq 2/\pi$. Поэтому при достаточно больших Ω

$$\operatorname{Re} I_+ + \operatorname{Re} I_- \geq \frac{1}{2} \operatorname{Re} \lambda_0^+ C^+ \Omega^{\rho_0^+} R_{\alpha}(2\Omega) + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \lambda_0^- C^- \Omega^{\rho_0^-} R_{\alpha}(-2\Omega) \\ \geq \frac{1}{2} \operatorname{Re} \lambda_0^+ C^+ \Omega^{\rho_0^+} R_{\alpha}(2\Omega) \geq 0.$$

Поскольку при $(\Delta t, \alpha) \in \mathcal{D}$, $\Delta t \rightarrow 0$ ($\Omega \rightarrow \infty$), $\alpha \rightarrow 0$, имеет место $I_{\pm}(\Omega, \alpha; \hat{u}_{\pm}) \rightarrow 0$, то и $\operatorname{Re} I_{+}(\Omega, \alpha; \hat{u}_{+}) + \operatorname{Re} I_{-}(\Omega, \alpha; \hat{u}_{-})$ в этом случае должно стремиться к нулю. В силу последнего неравенства это возможно лишь при $\Omega^{\rho_0^+} R_{\alpha}(2\Omega) \rightarrow 0$. Аналогично рассматриваются и остальные семь случаев.

5. Полученные в п. 4 условия сходимости относились к областям квазифинитности регуляризатора. Практическая ценность таких условий определяется, во-первых, тем, удастся ли независимо описать область квазифинитности, и, во-вторых, включает ли область квазифинитности кривые высокого разрешения (6). Рассмотрим содержательные примеры.

Начнем с рассмотрения *однородных* регуляризаторов. Регуляризатор R_{α} называется однородным, если $R_{\alpha}(\omega) = S(\alpha\omega)$, где $S(\xi)$ – функция, удовлетворяющая условиям:

- S1) $S(\xi)$ – кусочно-гладкая вещественная функция;
- S2) $S(\xi) = O(|\xi|^{-\bar{\rho}-1-\delta})$ при $|\xi| \rightarrow \infty$;
- S3) $|S(\xi)| \leq \bar{S}_0$, что, впрочем, следует из S1), S2);
- S4) $S(\xi)$ непрерывна в нуле и $S(0) = 1$;
- S5) $\int S(\xi) d\xi > 0$.

Нетрудно видеть, что если S удовлетворяет S1)–S4), то соответствующий однородный регуляризатор удовлетворяет условиям R1)–R4) и $R_{\alpha} \in \mathcal{R}(\bar{\rho})$. В силу S5) имеем для разрешения регуляризации (см. (5))

$$g_R(\alpha) = \left[\frac{1}{2\pi} \int S(\xi) d\xi \right]^{-1} \cdot \alpha > 0.$$

Условие (6), определяющее кривые высокого разрешения, удобно записывать для однородных регуляризаторов в виде $\alpha\Omega = \varepsilon_S = \text{const}$. Случай $\alpha\Omega = \varepsilon_S \rightarrow +\infty$ отвечает низкому разрешению ($g_R(\alpha) \ll \Delta t$), $\alpha\Omega = \varepsilon_S \rightarrow 0$ отвечает сверхвысокому разрешению.

Пусть мы имеем *финитный* однородный регуляризатор, т.е. $S(\xi)$ финитна; без ограничения общности, можно считать, что $\operatorname{supp} S \subset [-1, 1]$. Легко видеть, что область, определяемая условием $\alpha\Omega \geq \varepsilon_S = \text{const}$, является областью квазифинитности с $\varkappa = 1/\varepsilon_S$, $\sigma = +\infty$, $C_R = 0$. Таким образом, в этом случае область квазифинитности описана явно и содержит кривые высокого разрешения. Из теоремы 2 следует, что на классе правых частей $\mathcal{U}_M(\bar{\rho})$, $M \geq 1 + \delta$, ошибка дискретизации равномерно сходится

- 1) во множестве $\mathcal{D}$, определяемом условием

$$\alpha\Omega \geq \varepsilon_S > \frac{1}{2};$$

- 2) на кривых высокого разрешения $\alpha\Omega = \varepsilon_S = \text{const}$, если $\exists a'$ ($0 < a' \leq 1$) такое, что

$$S(\xi) = 0 \quad \text{при} \quad \xi \in \bigcup_{\substack{n \neq 0 \\ |n| \leq [1/(2\varepsilon_S)]}} [(2n - a')\varepsilon_S, (2n + a')\varepsilon_S],$$

где $[\cdot]$ — целая часть числа.

Откажемся теперь от финитности и рассмотрим однородный регуляризатор общего вида. Условие S2) удобно записать в виде

$$|S(\xi)| \leq \bar{S}|\xi|^{-\bar{\rho}-1-\delta_S}.$$

Легко видеть, что в этом случае

$$|R_\alpha(\omega)| \leq \bar{S}\alpha^{-\bar{\rho}-1-\delta_S}|\omega|^{-\bar{\rho}-1-\delta_S}. \quad (25)$$

Область $\mathcal{D}$ является областью квазифинитности, если выполнено условие

$$\alpha^{-\bar{\rho}-1-\delta_S}\Omega^{-(\delta_S-\delta)} \leq \text{const}, \quad 0 < \delta < \delta_S. \quad (26)$$

При этом можно считать $\kappa < 2$ (это обеспечивается выбором C_R). В соответствии с теоремой 2 ошибка дискретизации равномерно сходится в областях, задаваемых последним условием. Однако, (26) отвечает случаю низкого разрешения и не включает кривые высокого разрешения, которые должны быть рассмотрены отдельно.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $L \in \mathcal{L}(\bar{\rho})$, регуляризатор $R_\alpha \in \mathcal{R}(\bar{\rho})$ является однородным, $R_\alpha(\omega) = S(\alpha\omega)$. Пусть задана кривая высокого разрешения $\alpha\Omega = \varepsilon_S = \text{const}$. Тогда если $\exists a'$ ($0 < a' \leq 1$) такое, что

$$S(\xi) = 0 \quad \text{при} \quad \xi \in \bigcup_{n \neq 0} [(2n - a')\varepsilon_S, (2n + a')\varepsilon_S], \quad (27)$$

то ошибка дискретизации равномерно сходится на классе правых частей $\mathcal{U}_M(\bar{\rho})$, $M \geq 1 + \delta$, на заданной кривой. При этом имеет место оценка

$$|\Delta z_{\alpha, \Delta t}(t)| \leq C\tilde{\eta}\Omega^{-M+1},$$

где $\tilde{\eta}$ определяется (16), а C — эффективно вычисляемая константа, не зависящая от α, Ω, t .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя (25) и медленный рост ядра ($L \in \mathcal{L}(\bar{\rho})$), получаем для $\tilde{H}(\alpha)$ из (10)

$$\tilde{H}(\alpha) = C' \alpha^{-\bar{\rho}-1-\delta_S},$$

где C' — эффективно вычисляется. Возьмем теперь в лемме 1 $a = a'$, $\sigma = \delta_S$. На кривой высокого разрешения (11) дает

$$|\Delta_{\alpha, \Delta t}^\infty(t)| \leq C \tilde{u} \Omega^{-M+1},$$

а в силу условий (27) $|\Delta_{\alpha, \Delta t}^{a=a'}(t)| \equiv 0$. Таким образом, последняя оценка имеет место и для ошибки дискретизации.

Обратимся теперь к неоднородным регуляризаторам и рассмотрим

$$R_\alpha(\omega) = \left[1 + \alpha \left| \frac{\omega}{\omega_0} \right|^h \exp \left| \frac{\omega}{\omega_0} \right|^q \right]^{-1}, \quad (28)$$

где $\omega_0 > 0$, $q > 0$, $h \geq 0$ — константы. Данный регуляризатор является монотонным. Область $\mathcal{D}_{(\Delta t, \alpha)}$, задаваемая условием

$$\left(\ln \frac{1}{\alpha} \right)^{1/q} \leq \bar{r} \frac{\Omega}{\omega_0}, \quad \bar{r} > 0, \quad (29)$$

является областью квазифинитности; при этом $\varkappa > \bar{r}$, $\sigma = +\infty$. Из теоремы 2 получаем, что ошибка дискретизации равномерно сходится (на классе $\mathcal{U}_M(\bar{\rho})$, $M \geq 1 + \delta$) в области (29) с $\bar{r} < 2$. Далее, пусть мы имеем ядро степенного роста (21) $\rho = \max(\rho_0^+, \rho_0^-) \geq 0$. Если область $\mathcal{D}_{(\Delta t, \alpha)}$ такова, что среди сколь угодно малых Δt и α найдутся удовлетворяющие условию

$$\left(\ln \frac{1}{\alpha} \right)^{1/q} \geq r \frac{\Omega}{\omega_0}, \quad 2 < r \leq \bar{r},$$

то в силу теоремы 3 в такой области ошибка дискретизации не является равномерно сходящейся.

Рассмотрим кривые высокого разрешения. При любом фиксированном ω значение $R_\alpha(\omega)$ растет с уменьшением α ; $R_{+\infty} = 0$, $R_0 = 1$. Разрешение $g_R(\alpha)$ для регуляризатора (28) очевидным образом непрерывно по α . Кроме того, в силу сказанного выше, $g_R(\alpha)$ монотонно убывает до нуля при уменьшении α до нуля. Это означает, что (6), которое более удобно записать в виде

$$k\Omega = \int_0^\infty R_\alpha(\omega) d\omega, \quad k = \text{const}, \quad (30)$$

корректно определяет кривые высокого разрешения $\alpha = \alpha_k(\Omega)$. Функция $\alpha_k(\Omega)$ имеет при больших Ω следующее асимптотическое поведение

$$\left(\ln \frac{1}{\alpha}\right)^{1/q} = k \frac{\Omega}{\omega_0} [1 + O(\Omega^{-\delta})],$$

O -оценка равномерна по α и эффективна. Поэтому кривые высокого разрешения попадают в области квазифинитности. Ясно, что для степенных ядер на кривых высокого разрешения (30) ошибка дискретизации сходится при $k < 2$ и расходится при $k > 2$. Отдельного исследования требует случай $k = 2$. Используя необходимое условие сходимости из теоремы 3 можно показать, что в этом случае ошибка дискретизации расходится (не является сходящейся).

В заключение автор выражает признательность Д. А. Попову за постоянное внимание к работе.

Институт проблем передачи информации РАН

Поступило

23.06.94

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.
- [2] Groetsh C. W. The Theory of Tikhonov Regularization of Fredholm Equation of the First Kind. Boston: Pitman, 1984.
- [3] Peetre J. Approximation of norms // J. Approxim. Theory. 1970. V. 3. № 3. P. 243–260.
- [4] Попов Д. А. О применении гладких регуляризаторов для вычисления свертки // Докл. АН СССР. 1984. Т. 276. № 1. С. 38–42.
- [5] Попов Д. А., Сушко Д. В. О сходимости алгоритмов численного решения уравнения свертки // Докл. АН СССР. 1990. Т. 315. № 2. С. 309–313.