Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Г. Ткачёв, Теорема о радиусе просвета для минимальных поверхностей, *Матем. заметки*, 1996, том 59, выпуск 6, 909–913

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1788>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 14:21:17

ТЕОРЕМА О РАДИУСЕ ПРОСВЕТА ДЛЯ МИНИМАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

В. Г. Ткачёв

Недавно в [1] Микс и Хоффман анонсировали теорему “о полупространстве”, согласно которой не существует собственно погруженной минимальной поверхности в $\mathbb{R}^3$, отличной от плоскости и содержащейся в некотором полупространстве $\mathbb{R}_+^3$. Однако хорошо известно, что уже при $p \geq 3$ существуют минимальные собственно погруженные гиперповерхности в $\mathbb{R}^{p+1}$, которые лежат в слое между двумя параллельными гиперплоскостями (относительно примеров см. [1], [2]). В работах [3]–[6] было показано, что этим свойством при $p \geq 3$ обладает любая минимальная поверхность произвольной коразмерности, если все ее сечения некоторой системой параллельных гиперплоскостей суть компактные множества. Более того, в [3], [5], [6] даны оценки ширины слоя Δ в терминах минимального радиуса шара r , описанного около таких сечений:

$$\Delta \leq 2c_p r, \quad (1)$$

где

$$c_p = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t^{2p} - 1}}. \quad (2)$$

В настоящей заметке мы доказываем в определенном смысле обратную оценку.

ТЕОРЕМА. Пусть $\mathcal{M}$ – p -мерная собственно погруженная связная минимальная гиперповерхность, лежащая в параллельном гиперслое ширины Δ . Предположим, что проекция $\mathcal{M}$ на граничные гиперплоскости слоя выпускает открытый шар радиуса R . Тогда

$$R \leq \frac{\Delta}{2c_p}, \quad (3)$$

где c_p определена в (2).

Работа выполнена при поддержке фонда “Культурная инициатива. Математика”.

ЗАМЕЧАНИЕ. Постоянная в неравенстве (3) неувлучшаема, как показывают примеры минимальных поверхностей вращения, используемые в процессе нашего доказательства.

Данную оценку можно интерпретировать как ограничение на существование “слишком широких” дыр у поверхностей нулевой средней кривизны. Тем не менее, не сложно построить примеры минимальных поверхностей, расположенных в слое, у которых указанная выше проекция является неограниченным множеством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $x: M \rightarrow \mathbb{R}^{p+1}$ изометрическое погружение p -мерного многообразия M , реализующее данную поверхность $\mathcal{M}$.

Так как класс рассматриваемых поверхностей включает поверхности с самопересечениями, будем сохранять различие между точкой $m \in M$ на многообразии и ее образом $x(m) \in \mathcal{M}$ на поверхности.

Предположим, что неравенство (3) не выполнено, т.е.

$$k^4 \equiv \frac{2Rc_p}{\Delta} > 1.$$

Принимая тогда во внимание, что условие минимальности и неравенство (3) инвариантны относительно гомотетии и параллельного переноса в пространстве $\mathbb{R}^{p+1}$, можно, не ограничивая общности, считать $\mathcal{M}$ расположенной в гиперслое $x_{p+1} < \Delta/2$, где

$$\Delta = \frac{2c_p}{k^2} < 2c_p, \quad (4)$$

и проекция $\mathcal{M}$ на гиперплоскость $x_{p+1} = 0$ выпускает шар радиуса $R \equiv k^2 > 1$ с центром в начале координат. Обозначим через $B(R)$ упомянутый шар и введем в рассмотрение специальную минимальную гиперповерхность вращения $\mathcal{C}^+$, задаваемую формулой [3], [2]

$$x_{p+1} = \Phi_\beta(\sqrt{x_1^2 + \dots + x_p^2}), \quad x_{p+1} > 0, \quad (5)$$

с краем, совпадающем со сферой $\partial B(1)$ в гиперплоскости $x_{p+1} = 0$. Здесь и далее

$$\Phi_p(t) = \int_1^t \frac{d\tau}{\sqrt{\tau^{2p} - 1}}.$$

Далее удобно использовать следующую естественную терминологию. А именно, пусть имеются две поверхности $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$, погруженные в $\mathbb{R}^{p+1}$. Скажем, что $\mathcal{N}$ *лежит строго выше (выше) поверхности $\mathcal{M}$* , если для любой пары точек $m = (x_1, \dots, x_p, x_{p+1}) \in \mathcal{M}$ и $n = (x_1, \dots, x_p, y_{p+1}) \in \mathcal{N}$ с одинаковыми первыми p координатами, выполняется неравенство $y_{p+1} > x_{p+1}$ (нестрогое неравенство $y_{p+1} \geq x_{p+1}$ соответственно).

Покажем сначала, что $\mathcal{C}^+$ лежит строго выше $\mathcal{M}$. С этой целью предположим противное, т.е. найдется общая точка в пересечении внутренности $\mathcal{C}^+$ и $\mathcal{M}$. Рассмотрим вспомогательное семейство поверхностей $\mathcal{C}^+(\varepsilon)$, получаемых с помощью сдвига вдоль $(p+1)$ -й координаты поверхности $\mathcal{C}^+$ на $\varepsilon \geq 0$. Заметим, что $\mathcal{C}^+(\varepsilon)$ снова являются минимальными и при $\varepsilon > \Delta/2$ не пересекаются с $\mathcal{M}$.

Рассмотрим $\varepsilon_0 = \sup\{\varepsilon \geq 0 : \mathcal{M} \cap \mathcal{C}^+(\varepsilon) \neq \emptyset\}$, где $\mathcal{C}^+(0) \equiv \mathcal{C}^+$. Тогда, в силу сказанного выше, ε_0 определено корректно. Если $\varepsilon_0 > 0$, то можно выбирать последовательность $\varepsilon_k \uparrow \varepsilon_0$ и пусть m_k – общая точка поверхностей $\mathcal{M}$ и $\mathcal{C}^+(\varepsilon_k)$. Отметим, что

$$x_1^2(m_k) + \dots + x_p^2(m_k) = \Psi_p(x_{p+1}(m_k) - \varepsilon_k) < \Psi_p\left(\frac{\Delta}{2}\right) < +\infty,$$

где $\Psi_p(t)$ – функция, обратная (в смысле композиции) к $\Phi_p(\rho)$. Таким образом, все точки m_k содержатся внутри ограниченного цилиндра

$$\left\{x \in \mathbb{R}^p : |x_{p+1}| < \frac{\Delta}{2}, \sqrt{x_1^2 + \dots + x_p^2} < \Psi_p\left(\frac{\Delta}{2}\right)\right\}.$$

В самом деле, в силу сделанного предположения (4)

$$\Psi_p(\Delta/2) < \Psi_p(c_p) = +\infty.$$

Поскольку $\mathcal{M}$ задана собственным погружением, найдется предельная точка $m_0 \in M$ последовательности $\{m_k\}$. Ясно, что $x(m_0) \in \mathcal{M} \cap \mathcal{C}^+(\varepsilon_0)$, и в силу определения ε_0 поверхность $\mathcal{C}^+(\varepsilon_0)$ лежит выше $\mathcal{M}$.

Отметим, что, как в случае $\varepsilon_0 = 0$, так и в случае $\varepsilon_0 > 0$, общая точка $x(m_0)$ поверхностей $\mathcal{M}$ и $\mathcal{C}^+(\varepsilon_0)$ лежит во внутренности поверхности $\mathcal{C}^+(\varepsilon_0)$. Однако, анализ, проведенный выше, означает, что $x(m_0)$ – это точка касания $\mathcal{M}$ и $\mathcal{C}^+(\varepsilon_0)$.

Заметим, что поверхность $\mathcal{C}^+(\varepsilon_0)$ задана в непараметрическом виде как график над проколотой гиперплоскостью $\mathbb{R}^p \setminus \bar{B}(1)$. Тем самым, общее касательное пространство $T_{m_0}\mathcal{M} \equiv T_{m_0}\mathcal{C}^+(\varepsilon_0)$ к обеим поверхностям расположено под ненулевым углом к оси координаты x_{p+1} .

Следовательно, некоторая окрестность θ точки $m_0 \in M$ на поверхности $\mathcal{M}$ также имеет вид графика над гиперповерхностью x_{p+1} , и в θ поверхность $\mathcal{C}^+(\varepsilon_0)$ расположена выше $\mathcal{M}$ (за исключением точки m_0). Применяя сильный принцип максимума [7, лемма 3.4, с. 41] к $(p+1)$ -м координатным функциям поверхностей $\mathcal{C}^+(\varepsilon_0)$ и $\mathcal{M}$ в окрестности точки m_0 (напомним, что уравнение минимальных поверхностей, заданных в явной форме, является равномерно эллиптическим в окрестности любой точки с ненулевым углом наклона $\alpha(m_0)$ касательной плоскости к вектору e_{p+1}),

мы приходим к выводу, что в этой окрестности $\mathcal{M} \equiv \mathcal{C}^+(\varepsilon_0)$. Отсюда вытекает, что множество M_0 точек m_0 , для которых выполняется последнее тождество, должно быть открытым в M . Действительно, если m_1 – произвольная граничная для $\mathcal{C}$ и одновременно внутренняя точка для $\mathcal{C}^+(\varepsilon_0)$, то угол $\alpha(m_1)$ отличен от нуля, и мы находим аналогичным образом требуемую окрестность. Более того, множество M_0 должно быть также и замкнутым, так как условие равенства в силу непрерывности погружения продолжается в граничные точки. Следовательно, в силу связности поверхностей, $\overline{\mathcal{C}^+(\varepsilon_0)} \in \mathcal{M}$. Последнее, однако, невозможно, так как по условию $\mathcal{M}$ выпускает шар радиуса R , строго меньшего единицы.

Аналогично доказывается, что $\mathcal{M}$ лежит всюду строго выше поверхности $\mathcal{C}^-$:

$$x_{p+1} = -\Phi_p(\sqrt{x_1^2 + \dots + x_p^2}),$$

но $\mathcal{C} \equiv \overline{\mathcal{C}^-} \cup \mathcal{C}^+$ есть полная минимальная поверхность вращения и $\mathcal{M} \cap \mathcal{C} = \emptyset$. В частности, выполнено неравенство

$$|x_{p+1}(m)| < \Phi_p(\sqrt{x_1^2 + \dots + x_p^2}). \quad (6)$$

Рассмотрим новое семейство $\mathcal{C}(t)$ поверхностей, получаемых гомотетией $\mathcal{C}$ с коэффициентом $t \geq 1$:

$$\mathcal{C}(t) \sim x_{p+1} = t \cdot \Phi_p(t^{-1}\sqrt{x_1^2 + \dots + x_p^2}).$$

Тогда ввиду (6) корректно определено значение

$$t_0 = \sup\{t \geq 1 : \mathcal{C}(t) \cap \mathcal{M} = \emptyset\} < +\infty.$$

Применяя метод, изложенный выше и, принимая во внимание, что $\mathcal{C}(t)$ лежит в слое ширины, строго большей Δ при $t > 1$, можно вывести существование точки m_0 касания $\mathcal{C}(t_0)$ и $\mathcal{M}$. При этом всюду на $\mathcal{M}$ выполняется неравенство

$$t_0 \cdot \Phi_p(t_0^{-1}\sqrt{x_1^2 + \dots + x_p^2}) \geq |x_{p+1}(m)|.$$

Рассмотрим два случая.

Случай 1. Пусть угол $\alpha(m_0)$ между общим касательным пространством к $\mathcal{M}$ и $\mathcal{C}(t_0)$ в точке m_0 и вектором e_{p+1} отличен от нуля. Тогда мы находимся в ситуации, аналогичной рассмотренной выше, и поэтому $\mathcal{C}(t_0) \equiv \mathcal{M}$. Но ширина слоя для $\mathcal{C}(t_0)$ строго больше Δ , и мы приходим к противоречию.

СЛУЧАЙ 2. Пусть теперь $\alpha(m_0) = 0$. Из способа задания $\mathcal{C}(t_0)$ вытекает, что соответствующая общая точка $x(m_0) \in \mathcal{M} \cap \mathcal{C}(t_0)$ лежит на талии катеноида $\mathcal{C}(t_0)$, т.е. в гиперплоскости $x_{p+1} = 0$.

Учитывая условие из [2], введем в рассмотрение минимальную поверхность $\widetilde{\mathcal{M}}$, полученную из $\mathcal{M}$ параллельным сдвигом вдоль вектора e_{p+1} , такую, что она еще по-прежнему остается в слое $|x_{p+1}| \leq \Delta_1 \leq c_p$ ширины, меньшей $2c_p$. Тогда, возвращаясь к началу доказательства, мы в итоге получим аналогичную поверхность $\mathcal{C}(t_1)$. При этом, в силу гомотетичности катеноидов $\mathcal{C}(t_0)$ и $\mathcal{C}(t_1)$ заключаем, что $t_1 < t_0$, т.е. радиус талии у нового катеноида $\mathcal{C}(t_1)$ строго меньше, чем у $\mathcal{C}(t_0)$. Значит, общая точка $\tilde{m}$ поверхностей $\widetilde{\mathcal{M}}$ и $\mathcal{C}(t_1)$ не может лежать на талии $\mathcal{C}(t_0)$ и, тем самым, выполнено условие невырожденности $\alpha(\tilde{m}) \neq 0$. Следовательно, для поверхностей $\widetilde{\mathcal{M}}$ и $\mathcal{C}(t_1)$ выполняются предположения случая 1 как и выше. Получаемое на этом пути противоречие окончательно доказывает теорему.

Автор выражает благодарность В.М. Милюкову за полезные обсуждения данной работы.

Волгоградский государственный университет

Поступило

23.08.93

Переработанный вариант

22.12.94

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Hoffman D., Meeks W. H. Embedded minimal surfaces of finite topology // Ann. Math. 1990. V. 131. P. 1–34.
- [2] Dierkes U. Maximum principles and nonexistence results for minimal submanifolds // Manuscr. Math. 1990. V. 69. P. 203–218.
- [3] Веденяпин А. Д., Милюков В. М. Внешние размеры трубчатых минимальных гиперповерхностей // Матем. сб. 1986. Т. 131. № 2. С. 240–250.
- [4] Милюков В. М., Ткачёв В. Г. Некоторые свойства трубчатых минимальных поверхностей произвольной коразмерности // Матем. сб. 1989. Т. 180. № 9. С. 1278–1295.
- [5] Клячин В. А. Оценка протяженности трубчатых минимальных поверхностей произвольной коразмерности // Сиб. матем. ж. 1992. № 33. С. 201–205.
- [6] Ткачёв В. Г. Внешние оценки радиуса обхвата эллиптических гиперповерхностей // Деп. ВИНТИ. № 2031–В92.
- [7] Гилбарг Д., Трудингер М. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989.