Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Л. Якимив, Тауберова теорема для преобразования Стильеса, *Матем. заметки*, 2003, том 73, выпуск 2, 305–314

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm179>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 16:58:38

УДК 517.5

ТАУБЕРОВА ТЕОРЕМА ДЛЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СТИЛТЬЕСА

А. Л. ЯКЫМИВ

В статье при слабых ограничениях на сравниваемые положительные функции из асимптотической эквивалентности на бесконечности их преобразований Стилттьеса выводится асимптотическая эквивалентность на бесконечности самих функций.

Библиография: 14 названий.

Функция $f(x)$, определенная и измеримая при $x \in \mathbb{R}_+ = \{y : y > 0\}$, называется *медленно колеблющейся на бесконечности* [1, с. 55], если при $x \rightarrow \infty$, $y = x + o(x)$ выполнено

$$f(y) - f(x) \rightarrow 0.$$

Положительная функция $f(x)$, определенная при $x \in \mathbb{R}_+$, называется *слабо осциллирующей на бесконечности*, если функция $\ln f(x)$ медленно колеблется на бесконечности.

Пусть функция $f(x)$ слабо осциллирует на бесконечности. Тогда для нее, как и для всякой RO -функции [2, с. 87] при некотором $s > 0$ справедливо представление

$$f(x) = \exp\left(\eta(x) + \int_s^x \frac{\varepsilon(t)}{t} dt\right), \quad x \geq s, \quad (1)$$

где функции $\eta(x)$ и $\varepsilon(x)$ измеримы и ограничены на $[s, \infty)$.

Зафиксируем некоторое $l > 0$. Преобразования Стилттьеса и Лапласа функции $f(x)$ на $\mathbb{R}_+$ будем обозначать соответственно через $\tilde{f}(\lambda)$ и $\hat{f}(\lambda)$:

$$\tilde{f}(\lambda) = \int_0^\infty \frac{f(x) dx}{(\lambda + x)^l}, \quad \hat{f}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} f(x) dx$$

(в предположении существования интегралов при $\lambda > 0$). В настоящей заметке доказывается следующая тауберова теорема.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 00-15-96136, № 03-01-00064 и № 02-01-01080.

ТЕОРЕМА 1. Пусть функция $f(x)$ слабо осциллирует на бесконечности; пусть $g(x) = r(x)h(x)$, $x \in \mathbb{R}_+$, где функция $r(x)$ неотрицательна и монотонна при $x \in \mathbb{R}_+$, а функция $h(x)$ слабо осциллирует на бесконечности. Предположим, что для некоторого представления $f(x)$ в форме (1) выполнены неравенства

$$-1 < \inf_{x \geq s} \varepsilon(x) \leq \sup_{x \geq s} \varepsilon(x) < l - 1 \quad (2)$$

и при $\lambda \rightarrow \infty$

$$\tilde{g}(\lambda) = (1 + o(1))\tilde{f}(\lambda). \quad (3)$$

Тогда при $x \rightarrow \infty$

$$g(x) = (1 + o(1))f(x). \quad (4)$$

Теорема 1 обобщает соответствующие утверждения из статей [3], [4] (см. также книгу [5, гл. X]). Основное отличие теоремы 1 от предыдущих исследований – отказ от предположения о монотонности функций $f(x)$ и $g(x)$. Тауберова теорема 1 доказывается с помощью некоторых утверждений работы [6]. Из других результатов в этом направлении отметим книгу [7] и работы [8]–[13].

При доказательстве теоремы 1 будут использоваться три леммы, которые приводятся ниже.

ЛЕММА 1. Пусть функция $f(x)$ слабо осциллирует на бесконечности; пусть $g(x) = r(x)h(x)$, $x \in \mathbb{R}_+$, где функция $r(x)$ неотрицательна и монотонна при $x \in \mathbb{R}_+$, а функция $h(x)$ слабо осциллирует на бесконечности. Предположим, что для некоторого представления $f(x)$ в форме (1) выполнено неравенство

$$\inf_{x \geq s} \varepsilon(x) > -1$$

и при $\lambda \downarrow 0$

$$\hat{g}(\lambda) = (1 + o(1))\hat{f}(\lambda).$$

Тогда при $x \rightarrow \infty$ выполнено $g(x) = (1 + o(1))f(x)$.

Лемма 1 следует из теоремы 11 статьи [6].

Согласно [6, с. 177] последовательность функций $\{g_m(x), m \in \mathbb{N}\}$, определенную в $\mathbb{R}_+$, назовем *асимптотически непрерывной* в $\mathbb{R}_+$, если для произвольного $x \in \mathbb{R}_+$

$$g_m(x) - g_m(y) \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty, \quad y \rightarrow x.$$

ЛЕММА 2 [6, с. 178]. Пусть последовательность функций $\{g_m(x), m \in \mathbb{N}\}$ асимптотически непрерывна в $\mathbb{R}_+$. Тогда для того чтобы она была предкомпактна в топологии поточечной сходимости, необходимо и достаточно, чтобы для всякого $x \in \mathbb{R}_+$ выполнялась оценка

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} |g_m(x)| < \infty.$$

Функцию $a(x)$, определенную в $\mathbb{R}_+$, назовем *слабо осциллирующей в нуле*, если функция $a(1/x)$ слабо осциллирует на бесконечности.

Если функция $a(x)$ слабо осциллирует в нуле, то из соотношения (1) следует, что для некоторого $p > 0$ при $x \in (0, p]$ справедливо представление

$$a(x) = \exp\left(\omega(x) + \int_x^p \frac{\psi(u)}{u} du\right), \quad (5)$$

где функции $\omega(x)$ и $\psi(x)$ определены, ограничены и измеримы при $x \in (0, p]$.

ЛЕММА 3. Пусть

$$a(x) = x^k a_1(x) > 0, \quad b(x) = x^k b_1(x) > 0, \quad x \in \mathbb{R}_+,$$

где $a_1(x)$ и $b_1(x)$ — убывающие функции на $\mathbb{R}_+$, $k > -1$, функция $a(x)$ слабо осциллирует в нуле, причем для некоторого представления $a(x)$ в форме (5) выполнено неравенство

$$\sup_{0 < u \leq p} \psi(u) < 1.$$

Если при $y \rightarrow +\infty$

$$\hat{a}(y) = (1 + o(1))\hat{b}(y), \quad (6)$$

то при $x \downarrow 0$

$$a(x) = (1 + o(1))b(x). \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, а именно: пусть для некоторой последовательности $\{x_m, m \in \mathbb{N}\}$ такой, что $x_m \downarrow 0, m \rightarrow \infty$, выполнено

$$\frac{b(x_m)}{a(x_m)} \rightarrow c \neq 1, \quad c \in [0, \infty). \quad (8)$$

При $\lambda > 0$ мы имеем

$$\hat{a}\left(\frac{\lambda}{x_m}\right) = \int_0^\infty e^{-\lambda y/x_m} a(y) dy = x_m a(x_m) \int_0^\infty \frac{a(x_m x)}{a(x_m)} e^{-\lambda x} dx. \quad (9)$$

Заметим, что последовательность

$$f_m(x) = \frac{a(x_m x)}{a(x_m)}, \quad x \in \mathbb{R}_+, \quad (10)$$

асимптотически непрерывна на $\mathbb{R}_+$. В самом деле, при $m \rightarrow \infty, y \rightarrow x > 0$

$$f_m(x) - f_m(y) = \frac{a(x_m x) - a(x_m y)}{a(x_m)} = \frac{a(x_m x)}{a(x_m)} \left(1 - \frac{a(x_m y)}{a(x_m x)}\right) = o(1),$$

так как

$$1 - \frac{a(x_m y)}{a(x_m x)} \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty, \quad y \rightarrow x > 0,$$

в силу определения слабо осциллирующей функции, и, как это следует из представления (5),

$$\frac{a(x_m x)}{a(x_m)} = O(1)$$

при $m \rightarrow \infty$ и фиксированном $x > 0$. Далее, при $t \leq p$ для некоторой константы $c_1 < \infty$ согласно (5) имеем

$$\frac{a(tx)}{a(t)} = \exp\left(\omega(tx) - \omega(t) + \int_{tx}^t \frac{\psi(v)}{v} dv\right) \leq \varphi(x) = \begin{cases} c_1 x^\alpha, & 1 \leq x \leq \frac{p}{t}, \\ c_1 x^\beta, & 0 < x \leq 1, \end{cases}$$

где

$$\alpha = \sup_{0 < v \leq p} (-\psi(v)), \quad \beta = - \sup_{0 < v \leq p} \psi(v).$$

Положим

$$g_m(x) = \begin{cases} f_m(x), & x \leq \frac{p}{x_m}, \\ 0, & x > \frac{p}{x_m}. \end{cases}$$

Так как последовательность $\{f_m(x), m \in \mathbb{N}\}$ асимптотически непрерывна на $\mathbb{R}_+$, то и последовательность $\{g_m(x), m \in \mathbb{N}\}$ тоже асимптотически непрерывна на $\mathbb{R}_+$. Согласно лемме 2 без ограничения общности будем считать, что для некоторой непрерывной функции $f(x)$ на $\mathbb{R}_+$

$$g_m(x) \rightarrow f(x), \quad m \rightarrow \infty, \quad (11)$$

для произвольного $x > 0$. Из (10) и определения функций $g_m(x)$ следует, что при $m \in \mathbb{N}$ и $x > 0$

$$g_m(x) \leq \varphi(x). \quad (12)$$

При этом для всех $\lambda > 0$

$$\widehat{\varphi}(\lambda) < \infty, \quad (13)$$

поскольку по условию леммы 3

$$\beta = - \sup_{0 < v \leq p} \psi(v) > -1.$$

Из (11), (12) и (13) по теореме Лебега выводим, что для всех $\lambda > 0$

$$\widehat{g}_m(\lambda) \rightarrow \widehat{f}(\lambda) < \infty, \quad m \rightarrow \infty. \quad (14)$$

Далее, при $\lambda > 0$

$$\int_0^\infty \frac{a(x_m x)}{a(x_m)} e^{-\lambda x} dx = \widehat{g}_m(\lambda) + \frac{1}{x_m a(x_m)} \int_p^\infty a(y) e^{-\lambda y/x_m} dy. \quad (15)$$

Согласно (5) при $x \in (0, p]$ для некоторой постоянной $c_2 > 0$ имеем

$$a(x) \geq c_2 x^\gamma, \quad (16)$$

где

$$\gamma = - \inf_{0 < v \leq p} \psi(v).$$

Из (16) следует, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{x_m a(x_m)} \int_p^\infty a(y) e^{-\lambda y/x_m} dy &\leq \frac{1}{x_m a(x_m)} e^{-\lambda p/(2x_m)} \int_p^\infty a(y) e^{-\lambda y/(2x_m)} dy \\ &= O\left(\frac{e^{-\lambda p/(2x_m)}}{x_m a(x_m)}\right) o(1) = o(1) \end{aligned}$$

при $m \rightarrow \infty$. Учитывая (14), из (15) выводим, что

$$\int_0^\infty \frac{a(x_m x)}{a(x_m)} e^{-\lambda x} dx \rightarrow \widehat{f}(\lambda). \quad (17)$$

Заметим, что при $\lambda > 0$

$$\widehat{b}\left(\frac{\lambda}{x_m}\right) = x_m a(x_m) \int_0^\infty \frac{b(x_m x)}{a(x_m)} e^{-\lambda x} dx. \quad (18)$$

В силу (6), (9), (17) и (18) при $m \rightarrow \infty$

$$\int_0^\infty \frac{b(x_m x)}{a(x_m)} e^{-\lambda x} dx \rightarrow \widehat{f}(\lambda), \quad \lambda > 0. \quad (19)$$

По теореме непрерывности для преобразования Лапласа [14, с. 488, теорема 2а] для произвольного отрезка $A \subseteq \mathbb{R}_+$ имеем

$$\int_A \frac{b(x_m x)}{a(x_m)} dx \rightarrow \int_A f(x) dx. \quad (20)$$

Зафиксируем произвольное $\delta \in (0, 1)$. Покажем, что для некоторой постоянной $c_3 < \infty$ и всех $m \in \mathbb{N}$

$$\frac{b_1(x_m)}{a_1(x_m)} \leq c_3. \quad (21)$$

В самом деле, согласно (20) существует константа $c_4 < \infty$ такая, что для всех $m \in \mathbb{N}$ выполнена оценка

$$\int_{1-\delta}^1 \frac{b(x_m x)}{a(x_m)} dx = \int_{1-\delta}^1 \frac{b_1(x_m x)x^k}{a_1(x_m)} dx \leq c_4,$$

откуда

$$\frac{b_1(x_m)}{a_1(x_m)} \int_{1-\delta}^1 x^k dx \leq c_4,$$

или же выполнено (21) с константой

$$c_3 = c_4 \left(\int_{1-\delta}^1 x^k dx \right)^{-1}.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \frac{b(x_m)}{a(x_m)} &= \frac{1}{\delta} \int_{1-\delta}^1 \frac{b(x_m)}{a(x_m)} dx \\ &= \frac{1}{\delta} \left(\int_{1-\delta}^1 \frac{b(x_m) - b(x_m x)}{a(x_m)} dx + \int_{1-\delta}^1 \frac{b(x_m x)}{a(x_m)} dx \right) \\ &= \frac{1}{\delta} \left(\int_{1-\delta}^1 \frac{b(x_m x)}{a(x_m)} dx + \int_{1-\delta}^1 \frac{b_1(x_m) - b_1(x_m x)x^k}{a_1(x_m)} dx \right) \\ &\leq \frac{1}{\delta} \left(\int_{1-\delta}^1 \frac{b(x_m x)}{a(x_m)} dx + \frac{b_1(x_m)}{a_1(x_m)} \int_{1-\delta}^1 (1 - x^k) dx \right) \\ &= \frac{1}{\delta} \int_{1-\delta}^1 \frac{b(x_m x)}{a(x_m)} dx + \frac{(k+1)\delta - (1 - (1-\delta)^{k+1})}{(k+1)\delta} \cdot \frac{b_1(x_m)}{a_1(x_m)}. \end{aligned} \quad (22)$$

Из (20), (21) и (22) следует, что

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{b(x_m)}{a(x_m)} \leq \frac{1}{\delta} \int_{1-\delta}^1 f(x) dx + c_3 \frac{(k+1)\delta - (1 - (1-\delta)^{k+1})}{(k+1)\delta}.$$

Устремляя в правой части выписанного неравенства δ к нулю и пользуясь непрерывностью $f(x)$, получаем, что

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{b(x_m)}{a(x_m)} \leq f(1).$$

Точно так же, используя интегрирование от 1 до $1 + \delta$, получаем, что

$$\liminf_{m \rightarrow \infty} \frac{b(x_m)}{a(x_m)} \geq f(1).$$

Стало быть, существует

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{b(x_m)}{a(x_m)} = f(1).$$

Вспоминая (11) и определение функций $g_m(x)$, убеждаемся в том, что

$$f(1) = 1.$$

Итак, мы получили, что

$$\frac{b(x_m)}{a(x_m)} \rightarrow 1, \quad m \rightarrow \infty.$$

Последнее соотношение противоречит (8). Лемма 3 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Покажем, что для некоторого $p < 1/s$ при $\lambda \in (0, p]$ функция $\hat{f}(\lambda)$ представима в виде

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \exp \left(\int_{1/p}^{1/\lambda} \frac{\varepsilon(t)}{t} dt + \xi(\lambda) \right), \quad (23)$$

где $\varepsilon(t)$ – функция из представления $f(x)$ в форме (1), а $\xi(\lambda)$ ограничена при $\lambda \in (0, 1/p]$. Доопределим $\varepsilon(x)$ и $\eta(x)$ нулем при $x < s$. Так как

$$\inf_{x \geq s} \varepsilon(x) > -1,$$

то $\hat{f}(\lambda) \rightarrow \infty$, $\lambda \downarrow 0$. Поэтому при $\lambda \downarrow 0$ выполнено

$$\begin{aligned} \hat{f}(\lambda) &= \int_0^\infty e^{-\lambda x} \exp \left(\eta(x) + \int_0^x \frac{\varepsilon(t)}{t} dt \right) dx + O(1) \\ &= (1 + o(1)) \int_0^\infty e^{-\lambda x} \exp \left(\eta(x) + \int_0^x \frac{\varepsilon(t)}{t} dt \right) dx. \end{aligned}$$

Поэтому достаточно получить такое же представление для

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x} \exp\left(\eta(x) + \int_0^x \frac{\varepsilon(t)}{t} dt\right) dx.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-\lambda x} \exp\left(\eta(x) + \int_0^x \frac{\varepsilon(t)}{t} dt\right) dx &= \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty e^{-u} \exp\left(\eta\left(\frac{u}{\lambda}\right) + \int_0^{u/\lambda} \frac{\varepsilon(t)}{t} dt\right) du \\ &= \frac{1}{\lambda} \exp\left(\int_0^{1/\lambda} \frac{\varepsilon(t)}{t} dt\right) I(\lambda), \end{aligned}$$

где

$$I(\lambda) = \int_0^\infty e^{-u} \exp\left(\eta\left(\frac{u}{\lambda}\right) + \int_{1/\lambda}^{u/\lambda} \frac{\varepsilon(t)}{t} dt\right) du.$$

Для доказательства (23) достаточно показать, что для некоторых постоянных c_1, c_2 при $\lambda \in (0, 1/s]$ выполнены оценки

$$0 < c_1 \leq I(\lambda) \leq c_2 < \infty. \quad (24)$$

Представим интеграл $I(\lambda)$ в виде суммы интегралов $I_1(\lambda)$ и $I_2(\lambda)$ по u соответственно от 0 до 1 и от 1 до ∞ :

$$I(\lambda) = I_1(\lambda) + I_2(\lambda). \quad (25)$$

При $\lambda \in (0, 1/s]$ мы имеем

$$I_1(\lambda) = \int_0^1 e^{-u} \exp\left(\eta\left(\frac{u}{\lambda}\right) - \int_{u/\lambda}^{1/\lambda} \frac{\varepsilon(t)}{t} dt\right) du \leq e^{c_3} \int_0^1 \exp(-\alpha(-\ln u)) du,$$

где

$$c_3 = \sup_{v \geq 0} \eta(v), \quad \alpha = \inf_{t \geq s} \varepsilon(t).$$

Поэтому при $\lambda \in (0, 1/s]$ выполнено

$$I_1(\lambda) \leq e^{c_3} \int_0^1 u^\alpha du = \frac{e^{c_3}}{\alpha + 1}, \quad (26)$$

так как согласно неравенствам (2) $\alpha > -1$. Далее,

$$\begin{aligned} I_2(\lambda) &= \int_1^\infty e^{-u} \exp\left(\eta\left(\frac{u}{\lambda}\right) + \int_{1/\lambda}^{u/\lambda} \frac{\varepsilon(t)}{t} dt\right) du \\ &\leq e^{c_3} \int_1^\infty e^{-u} \exp(\beta \ln u) du = e^{c_3} \int_1^\infty e^{-u} u^\beta du < \infty, \end{aligned} \quad (27)$$

где

$$\beta = \sup_{t \geq s} \varepsilon(t).$$

Кроме того,

$$I_1(\lambda) \geq e^{c_4} \int_0^1 e^{-u} \exp(-\beta(-\ln u)) du = e^{c_4} \int_0^1 e^{-u} u^\beta du > 0 \quad (28)$$

и

$$I_2(\lambda) \geq e^{c_4} \int_1^\infty e^{-u} \exp(\alpha \ln u) du = e^{c_4} \int_1^\infty e^{-u} u^\alpha du > 0, \quad (29)$$

где

$$c_4 = \inf_{v \geq 0} \eta(v).$$

Из соотношений (25)–(29) следует (24). Далее, покажем, что $\widehat{f}(\lambda)$ слабо осциллирует в нуле. Пусть $\mu, \lambda \downarrow 0, \mu/\lambda \rightarrow 1$. Тогда

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\lambda) &= \int_0^\infty e^{-\lambda x} f(x) dx = \frac{\mu}{\lambda} \int_0^\infty e^{-\mu u} f\left(\frac{\mu}{\lambda} u\right) du \\ &= (1 + o(1)) \int_0^\infty e^{-\mu u} f\left(\frac{\mu}{\lambda} u\right) du \\ &= (1 + o(1)) \left(\widehat{f}(\mu) + \int_0^\infty e^{-\mu u} f(u) \left(1 - \frac{f(\mu u/\lambda)}{f(u)}\right) du \right). \end{aligned}$$

Поэтому достаточно показать, что

$$\int_0^\infty e^{-\mu u} f(u) \left(1 - \frac{f(\mu u/\lambda)}{f(u)}\right) du = o(\widehat{f}(\mu)) \quad (30)$$

при $\lambda, \mu \downarrow 0, \lambda/\mu \rightarrow 1$. Покажем это. Заметим, прежде всего, что для произвольного фиксированного $t > 0$ выполнено

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{-\mu u} f(u) \left(1 - \frac{f(\mu u/\lambda)}{f(u)}\right) du &= \int_0^t e^{-\mu u} f(u) du - \int_0^t e^{-\mu u} f\left(\frac{\mu}{\lambda} u\right) du \\ &= O(1) = o(\widehat{f}(\mu)) \end{aligned} \quad (31)$$

при $\lambda, \mu \downarrow 0, \lambda/\mu \rightarrow 1$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Для этого ε подберем такие $t > 0$ и $\delta > 0$, чтобы при $u \geq t$ и $|\mu/\lambda - 1| \leq \delta$ было выполнено неравенство

$$\left| 1 - \frac{f(\mu u/\lambda)}{f(u)} \right| \leq \varepsilon. \quad (32)$$

Тогда в силу (31) и (32) имеет место оценка

$$\limsup_{\mu \downarrow 0, \lambda/\mu \rightarrow 1} \frac{1}{\widehat{f}(\mu)} \left| \int_0^\infty e^{-\mu u} f(u) \left(1 - \frac{f(\mu u/\lambda)}{f(u)}\right) du \right| \leq \varepsilon.$$

Так как ε – произвольное положительное число, из последнего неравенства следует (30). Как известно [8, с. 41], преобразование Стильтьеса есть двойное преобразование Лапласа, а именно, при $\lambda > 0$

$$\tilde{f}(\lambda) = \int_0^\infty a(x)e^{-x\lambda} dx, \quad \tilde{g}(\lambda) = \int_0^\infty b(x)e^{-x\lambda} dx, \quad (33)$$

где

$$a(x) = \frac{x^{l-1}\hat{f}(x)}{\Gamma(l)}, \quad b(x) = \frac{x^{l-1}\hat{g}(x)}{\Gamma(l)}. \quad (34)$$

Как было показано ранее, $\hat{f}(x)$ слабо осциллирует в нуле, стало быть, слабо осциллирует в нуле и функция $a(x)$, причем из (23) следует, что при $x \in (0, 1/p]$ выполняются равенства

$$\begin{aligned} a(x) &= x^{l-2} \exp\left(\int_{1/p}^{1/x} \frac{\varepsilon(t)}{t} dt + \xi(x) - \ln \Gamma(l)\right) \\ &= x^{l-2} \exp\left(\int_x^p \frac{\varepsilon(1/u)}{u} du + \xi(x) - \ln \Gamma(l)\right) = \exp\left(\int_x^p \frac{\psi(u)}{u} du + \omega(x)\right), \end{aligned}$$

где

$$\psi(x) = 2 - l + \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right), \quad \omega(x) = \xi(x) - \ln \Gamma(l) + (2 - l) \ln p.$$

Заметим, что согласно (2)

$$\sup_{0 < x \leq p} \psi(x) = 2 - l + \sup_{0 < x \leq p} \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) < 1.$$

Применяя лемму 3, получаем, что при $x \downarrow 0$

$$a(x) = (1 + o(1))b(x),$$

откуда в силу (34) следует, что при $x \downarrow 0$

$$\hat{f}(x) = (1 + o(1))\hat{g}(x).$$

Из последнего соотношения и леммы 1 следует, что при $x \rightarrow \infty$

$$f(x) = (1 + o(1))g(x).$$

Теорема 1 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Постников А. Г. Тауберова теория и ее применения. М.: Наука, 1979.
- [2] Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. М.: Наука, 1985.
- [3] Келдыш М. В. Об одной тауберовой теореме // Тр. МИАН. 1951. Т. 38. С. 77–86.
- [4] Мадаев В. И., Палант Ю. А. О распределении спектра полиномиального операторного пучка // Докл. АН АрмССР. 1966. Т. 42. № 5. С. 836–845.
- [5] Костюченко А. Г., Саргсян И. С. Распределение собственных значений. М.: Наука, 1979.
- [6] Якимив А. Л. Асимптотика вероятности продолжения критических ветвящихся процессов Беллмана–Харриса // Тр. МИАН. 1986. Т. 177. С. 177–205.
- [7] Pilipović S., Stancović B., Takači A. Asymptotic behaviour and Stieltjes transformation of distributions. Teubner-Texte zur Mathematik. V. 116. Leipzig: Teubner, 1990.
- [8] Белогрудь В. П. Об одной тауберовой теореме // Матем. заметки. 1974. Т. 15. № 2. С. 187–190.
- [9] Султанаев Я. Т. О спектре неполуограниченных обыкновенных дифференциальных операторов. Дисс. ... к. ф.-м. н. М.: МГУ, 1974.
- [10] Nicolić-Despotović D., Pilipović S. Tauberian theorems for the distributional Stieltjes Transformation // Intern. J. Math. Math. Sci. 1986. V. 9. № 3. P. 531–524.
- [11] Pilipović S. On the quasiasymptotic behaviour of the Stieltjes transformation of distributions // Publ. Inst. Math. 1987. V. 40. P. 143–152.
- [12] Selander T. Bilateral Tauberian theorems of Keldysh type // Ark. Mat. 1963. V. 5. № 6. P. 85–96.
- [13] Станкович Б. Абелевы и тауберовы теоремы для преобразования Стильтьеса обобщенных функций // УМН. 1985. V. 40. № 4. P. 91–103.
- [14] Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1984.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: arsen@mi.ras.ru

Поступило
28.11.2001