Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Андрианов, Аналог теоремы Джексона–Никольского для приближения суперпозициями сигмоидальных функций, *Матем. заметки*, 1996, том 59, выпуск 6, 915–918

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1790>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 12:02:00

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ ДЖЕКСОНА–НИКОЛЬСКОГО ДЛЯ ПРИБЛИЖЕНИЯ СУПЕРПОЗИЦИЯМИ СИГМОИДАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

А. В. Андрианов

Ограниченная функция $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ называется *сигмоидальной*, если $\varphi(x) \rightarrow 1$ при $x \rightarrow \infty$ и $\varphi(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow -\infty$. Обозначим через $M(X)$ пространство всех ограниченных на X функций, снабженное нормой $\|f\|_{M(X)} = \sup_{x \in X} |f(x)|$. Определим для фиксированной функции $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ошибку ее приближения суммами вида

$$S_n^\varphi(x) = \sum_{i=0}^n c_i \varphi(a_i x + b_i), \quad a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R},$$

через $\sigma_n^\varphi(f)$, т.е.

$$\sigma_n^\varphi(f) = \inf_{S_n^\varphi} \|f - S_n^\varphi\|_{M[-1, 1]}.$$

В [1] было доказано, что для любой функции f ограниченной вариации $\sigma_n^\varphi(f) = O(1/n)$.

В настоящее время наибольший интерес представляет многомерный случай (см. [2] и литературу там). Однако, даже одномерная теория таких приближений еще далека от завершения. С. М. Никольский первым заметил, что для приближений многочленами поточечные приближения можно улучшить на концах (см. [3]).

Пусть $\omega(f, \delta) = \sup_{h \leq \delta} \sup_{x \in [-1, 1-h]} |f(x+h) - f(x)|$ – первый модуль непрерывности функции f . Цель настоящей работы – доказать следующий результат.

ТЕОРЕМА. Для любой функции $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in M[-1, 1]$, и для любой сигмоидальной функции $\varphi(x)$, для любого $q > 1$ и для любого $n = 1, 2, \dots$ существует $S_n^\varphi(x)$ такая, что для любого $x \in [-1, 1]$

$$|f(x) - S_n^\varphi(x)| \leq C(q, \varphi) \omega\left(f, \frac{(1-|x|)^{1-1/q}}{n} + \frac{1}{n^q}\right),$$

где $C(q, \varphi)$ зависит только от q и $\|\varphi\|_{M(\mathbb{R})}$.

Доказательство теоремы проведем по схеме, похожей на приведенную в [4]. Пусть $n = 2m$, где $m \in \mathbb{N}$, и пусть $\{x_k\}_{k=0}^{2m}$ – следующее разбиение отрезка $[-1, 1]$:

$$\begin{aligned} x_k &= -1 + \frac{k^q}{m^q}, & k &= 0, \dots, m, \quad \text{где } q > 1; \\ x_{m+k} &= -x_{m-k}, & k &= 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Введем функцию $\chi(x)$ по формуле

$$\chi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0, \\ 1, & \text{если } x \geq 0. \end{cases}$$

Определим кусочно-постоянную функцию $S_n^X(x)$:

$$\begin{aligned} S_n^X(x) = & \sum_{j=0}^{m-1} \{ \chi(x - x_j) - \chi(x - x_{j+1}) \} f(x_j) \\ & + \sum_{j=m}^{2m-2} \{ \chi(x - x_j) - \chi(x - x_{j+1}) \} f(x_{j+1}) + \chi(x - x_{2m-1}) f(x_{2m}), \end{aligned}$$

которая может быть переписана как

$$\begin{aligned} S_n^X(x) = & f(x_0) + \sum_{j=1}^{m-1} \{ f(x_j) - f(x_{j-1}) \} \chi(x - x_j) \\ & + \{ f(x_{m+1}) - f(x_{m-1}) \} \chi(x - x_m) \\ & + \sum_{j=m}^{2m-2} \{ f(x_{j+2}) - f(x_{j+1}) \} \chi(x - x_{j+1}). \end{aligned}$$

Мы будем приближать f функцией вида

$$\begin{aligned} S_n^\varphi(x) = & f(x_0) + \sum_{j=1}^{m-1} \{ f(x_j) - f(x_{j-1}) \} \varphi(N(x - x_j)) \\ & + \{ f(x_{m+1}) - f(x_{m-1}) \} \varphi(N(x - x_m)) \\ & + \sum_{j=m}^{2m-2} \{ f(x_{j+2}) - f(x_{j+1}) \} \varphi(N(x - x_{j+1})), \end{aligned}$$

где N будет определено ниже.

ЛЕММА 1. Для любых $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ существует $M = M(\varepsilon, \delta) > 0$ такое, что для любого $N \geq M$ и для $1 \leq j \leq 2m-1$

$$| \chi(x - x_j) - \varphi(N(x - x_j)) | \leq \varepsilon \quad \text{при} \quad |x - x_j| > \delta.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из определения φ (см. [1]).

Введем индекс $j' = j'(x)$ по формуле

$$j'(x) = \begin{cases} n, & \text{если } x \in [x_{n-1}, x_n], \\ j, & \text{если } x \in [x_j, x_{j+1}) \text{ и } j = 0, \dots, m-1, \\ j+1, & \text{если } x \in [x_j, x_{j+1}) \text{ и } j = m, \dots, 2m-2. \end{cases}$$

ЛЕММА 2. Имеем для любого $x \in [x_j, x_{j+1})$, $0 \leq j \leq n-1$

$$|f(x) - f(x_{j'})| \leq C(q) \omega \left(f, \frac{(1 - |x|)^{1-1/q}}{n} \right), \quad (1)$$

где $C(q) > 0$ зависит только от q .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем (1) для $0 \leq j \leq m-1$. Для других j оно аналогично. Имеем

$$|f(x) - f(x_j)| \leq \omega(f, x_{j+1} - x_j),$$

причем при $j \neq 0$

$$x_{j+1} - x_j = \frac{(j+1)^q}{m^q} - \frac{j^q}{m^q} \leq C_1(q) \frac{j^{q-1}}{m^q}, \quad (2)$$

где $C_1(q) = \max_{j \geq 1} \left(1 + \frac{C_1^q}{j} + \dots + \frac{C_1^q}{j^{q-1}}\right) = 2^q$.

С другой стороны,

$$1 + x = \varepsilon \geq \frac{j^q}{m^q},$$

откуда $j \leq \varepsilon^{1/q} m$ и, таким образом,

$$x_{j+1} - x_j \leq C_1(q) \frac{1}{m} \varepsilon^{1-1/q} = 2C_1(q) \frac{(1+x)^{1-1/q}}{n}.$$

При $j = 0$ справедливо неравенство

$$x + 1 \leq \frac{2}{n} (1+x)^{1-1/q},$$

что влечет (1) и в этом случае. Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Справедливо следующее неравенство

$$|f(x) - S_n^X(x)| \leq C(q) \omega\left(f, \frac{(1-|x|)^{1-1/q}}{n}\right). \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно заметить, что для любого x $S_n^X(x) = f(x_{j'})$ и воспользоваться леммой 2.

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы. Оценим уклонение S_n^φ от f :

$$\begin{aligned} |f(x) - S_n^\varphi(x)| &\leq |f(x) - S_n^X(x)| + |S_n^X(x) - S_n^\varphi(x)| \\ &= |f(x) - S_n^X(x)| + \sum_{j=1}^{m-1} |f(x_j) - f(x_{j-1})| \cdot |\chi(x - x_j) - \varphi(N(x - x_j))| \\ &\quad + |f(x_{m+1}) - f(x_m)| \cdot |\chi(x - x_m) - \varphi(N(x - x_m))| \\ &\quad + \sum_{j=m}^{2m-2} |f(x_{j+2}) - f(x_{j+1})| \cdot |\chi(x - x_{j+1}) - \varphi(N(x - x_{j+1}))|. \end{aligned} \quad (4)$$

Заметим, что в силу (2) при $0 \leq j \leq n-1$ имеем

$$x_{j+1} - x_j \leq C_2(q) \frac{1}{n} \quad \text{и} \quad x_{m+1} - x_{m-1} \leq 2C_2(q) \frac{1}{n}.$$

Поэтому для любого $q > 1$

$$\max_{0 \leq j \leq n-1} \{f(x_{j+1}) - f(x_j)\} \leq 2C_2(q)(n^{q-1} + 1)\omega(f, n^{-q}). \quad (5)$$

Возьмем $\varepsilon = \delta = n^{-q-1}/3$ в лемме 1. Тогда для любого $x \in [-1, 0]$ существует не более одного j_0 такого, что $|x - x_{j_0}| \leq \delta$. Но в этом случае $1 + x_{j_0} \leq 2(1 + x)$ и поэтому, используя (1) при $x = x_{j_0+1}$,

$$|f(x_{j_0}) - f(x_{j_0-1})| \leq C(q)\omega\left(f, \frac{(1+x_{j_0})^{1-1/q}}{n}\right) \leq 2C(q)\omega\left(f, \frac{(1+x)^{1-1/q}}{n}\right). \quad (6)$$

Аналогичное рассуждение дает (6) и для $x \in (0, 1]$, если использовать неравенство $1 - x_{j+1} \leq 2(1 - x)$.

Таким образом, комбинируя (3)–(6), мы видим, что

$$\begin{aligned} |f(x) - S_n^\varphi(x)| &< \omega\left(f, \frac{(1-|x|)^{1-1/q}}{n}\right) \\ &\quad + 2C(q)(1 + \|\varphi\|_{M(\mathbb{R})})\omega\left(f, \frac{(1-|x|)^{1-1/q}}{n}\right) \\ &\quad + \sum_{j=0}^{n-1} 2C_2(q)(n^{q-1} + 1)\omega(f, n^{-q})\frac{1}{3}n^{-q-1} \\ &\leq C_3(q)(1 + \|\varphi\|_{M(\mathbb{R})})\omega\left(f, \frac{(1-|x|)^{1-1/q}}{n} + \frac{1}{n^q}\right). \end{aligned}$$

Так как при $n = 1$ теорема очевидна, для $n = 2m + 1$, $m \in \mathbb{N}$, мы можем взять

$$S_{2m+1}^\varphi(x) \equiv S_{2m}^\varphi(x).$$

Теорема доказана полностью.

Автор благодарит С. Б. Стечкина и В. Н. Темлякова за ценные замечания, сделанные при написании этой работы.

University of South Carolina

Поступило
23.10.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gao B., Xu Y. // J. Math. Anal. and Appl. 1993. V. 178. P. 221–226.
2. Mhaskar H. N., Micchelli Ch. A. Degree of Approximation by Neural and Translation Networks with a Single Hidden Layer (to appear).
3. Дзядык В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М.: Наука, 1977.
4. Брудный Ю. А. // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1968. Т. 32. № 4. С. 780–787.