Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Беляков, Минимальное уклонение от нуля отображений Чебышева, соответствующих равностороннему треугольнику, *Матем. заметки*, 1996, том 59, выпуск 6, 919–922

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1791>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 03:06:54

МИНИМАЛЬНОЕ УКЛОНЕНИЕ ОТ НУЛЯ ОТОБРАЖЕНИЙ ЧЕБЫШЕВА, СООТВЕТСТВУЮЩИХ РАВНОСТОРОННЕМУ ТРЕУГОЛЬНИКУ

И. В. Беляков

В работах Веселова [1], Хоффмана и Уизерса [2] была предложена конструкция, сопоставляющая аффинной группе Вейля $\widetilde{W}$ функцию $h: \mathbb{R}^\alpha \rightarrow \mathbb{R}^\alpha$, называемую *обобщенным косинусом*, инвариантную относительно $\widetilde{W}$ (т.е. $h(g(x)) = h(x)$ $\forall g \in \widetilde{W}$) и гомеоморфную на фундаментальной области группы $\widetilde{W}$. Функция h обладает полиномиальным законом преобразования:

$$h(kx) = T_k(h(x)), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Полиномиальные отображения T_k естественно называть отображениями Чебышева, соответствующими группе $\widetilde{W}$ (см. [2]). Их свойства во многом повторяют свойства классических многочленов Чебышева. Последние соответствуют группе $\widetilde{W}(A_1)$, которая порождена отражениями прямой относительно концов отрезка $[0, \pi]$.

Здесь нас будет интересовать группа $\widetilde{W}(A_2)$, порожденная отражениями плоскости относительно сторон правильного треугольника. Обобщенный косинус $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ в этом случае выглядит так

$$h(u, v) = e^{2\pi i u} + e^{2\pi i v} + e^{-2\pi i(u+v)},$$

и отображает плоскость на дельтоид (который называют еще областью Штейнера), обозначаемый в дальнейшем через Δ (см. рис.).

Дельтоид ограничен гипоциклоидой с тремя ветвями, имеющей параметрическое уравнение

$$z = 2e^{2\pi i u} + e^{-4\pi i u}, \quad u \in [0, 1].$$

Отображения Чебышева A_n , для которых

$$h(nu, nv) = A_n(h(u, v)),$$

осуществляют n^2 -кратное складывание дельтоида (об их свойствах см. [3]). Они могут быть записаны в виде многочленов от $z = h(u, v)$ и $\bar{z}$. Первые три A_n таковы:

$$A_0(z) = 3, \quad A_1(z) = z, \quad A_2(z) = z^2 - 2\bar{z}.$$

Кроме того, справедлива рекуррентная формула

$$A_n = zA_{n-1} - \bar{z}A_{n-2} + A_{n-3}, \quad n \geq 3,$$

из которой видно, что степень A_n по совокупности z и $\bar{z}$ равна n и главная часть равна z^n .

Договоримся, что в дальнейшем нижний индекс в обозначении многочлена будет указывать ограничение степени по совокупности переменных, а черта над индексом будет означать, что индекс ограничивает степень по каждой переменной.

ТЕОРЕМА. Для многочленов $P_{n-1}(z, \bar{z})$ над $\mathbb{C}$ положим

$$\mu = \inf_{P_{n-1}} \max_{z \in \Delta} |z^n + P_{n-1}(z, \bar{z})|.$$

Тогда $\mu = 3$ и достигается только при $z^n + P_{n-1} \equiv A_n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Прежде всего заметим, что $\max_{\Delta} |A_n + c| > \max_{\Delta} |A_n|$, если $c = \text{const} \neq 0$. Действительно, рассматривая неравенство $|A_n + c| \leq 3$ при $|A_n| = 3$, получаем, что вектор c должен принадлежать трем полуплоскостям, имеющим нулевое пересечение.

2) Введем переменные $\xi = e^{2\pi i u}$, $\eta = e^{2\pi i v}$, $\zeta = e^{2\pi i w}$, считая $u + v + w = 0$. Тогда $z = \xi + \eta + \zeta$, $\bar{z} = \xi\eta + \xi\zeta + \eta\zeta$, $A_n = \xi^n + \eta^n + \zeta^n$. Далее, $z^n + P_{n-1}(z, \bar{z}) - A_n(z) = Q_{n-1}(z, \bar{z}) = Q_{n-1}(\xi, \eta, \zeta)$. Сделаем подстановку $\zeta = 1/\xi\eta$. При этом моном $\xi^a \eta^b \zeta^c$ перейдет в $\xi^{a-c} \eta^{b-c}$ и, значит, $Q_{n-1}(\xi, \eta, \zeta)$ перейдет в лорановский многочлен $\tilde{Q}_{n-1}(\xi, \eta)$ с мономами вида $\xi^i \eta^j$, где $|i| \leq n-1$, $|j| \leq n-1$, а также

$$|i - j| \leq n - 1. \quad (*)$$

Итак, сделав замену переменных, получаем

$$\mu \geq \inf_{Q_{n-1}} \max_{|\xi|=|\eta|=1} \left| \xi^n + \eta^n + \frac{1}{(\xi\eta)^n} + \tilde{Q}_{n-1}(\xi, \eta) \right|,$$

или, умножая на $\xi^n \eta^n$,

$$\mu \geq \inf_{Q_{2n-1}} \max_{|\xi|=|\eta|=1} \left| \xi^{2n} \eta^n + \xi^n \eta^{2n} + 1 + Q_{2n-1}(\xi, \eta) \right|,$$

где от Q_{2n-1} , кроме ограничения на степень, мы будем требовать только свойства (*) и равенства нулю свободного члена. (Тем самым расширяется класс возмущающих многочленов, но этого нам достаточно.)

3) Введем обозначения:

$$\rho_n(\xi, \eta) = \xi^{2n} \eta^n + \xi^n \eta^{2n} + 1, \quad f_n(\xi, \eta) = \rho_n(\xi, \eta) + Q_{2n-1}(\xi, \eta).$$

Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ – корни из 1 степени n . Известно, что

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i^s = \begin{cases} n, & \text{если } n \mid s, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Поэтому

$$\frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1}^n f(\alpha_i \xi, \alpha_j \eta) = \rho_n(\xi, \eta) + c \xi^n \eta^n.$$

(Заметим, что в силу (*) коэффициенты при ξ^n и η^n в Q_{2n-1} равны нулю.) Из последнего равенства

$$\begin{aligned} \max_{|\xi|=|\eta|=1} |\rho_n(\xi, \eta) + c \xi^n \eta^n| &= \max_{|\xi|=|\eta|=1} \left| \frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1}^n f_n(\alpha_i \xi, \alpha_j \eta) \right| \\ &\leq \max_{|\xi|=|\eta|=1} |f_n(\xi, \eta)|. \end{aligned} \quad (1)$$

Но, как отмечено в 1), при $c \neq 0$

$$\max_{|\xi|=|\eta|=1} |\rho_n(\xi, \eta) + c \xi^n \eta^n| = \max_{\Delta} |A_n + c| > 3.$$

Следовательно,

$$\inf_{Q_{2n-1}} \max_{|\xi|=|\eta|=1} |\rho_n(\xi, \eta) + Q_{2n-1}(\xi, \eta)| = \max_{|\xi|=|\eta|=1} |\rho_n(\xi, \eta)| = 3 \leq \mu.$$

Из определения μ видим теперь, что $\mu = 3$.

4) Для доказательства единственности предположим, что для некоторого Q_{2n-1}

$$\max_{|\xi|=|\eta|=1} |\rho_n(\xi, \eta) + Q_{2n-1}(\xi, \eta)| = \max_{|\xi|=|\eta|=1} |f_n(\xi, \eta)| = 3.$$

Тогда в силу пункта 1) и неравенства (1) коэффициент при $\xi^n \eta^n$ в многочлене Q_{2n-1} равен нулю и

$$\rho_n(\xi, \eta) = \frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1}^n f_n(\alpha_i \xi, \alpha_j \eta). \quad (2)$$

Назовем (ξ_0, η_0) *экстремальной точкой* для $\rho_n(\xi, \eta)$, если $|\xi_0| = |\eta_0| = 1$ и $|\rho_n(\xi_0, \eta_0)| = 3$. Для таких точек

$$3 = |\rho_n(\xi_0, \eta_0)| = \left| \frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1}^n f_n(\alpha_i \xi, \alpha_j \eta) \right| \leq \frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1}^n |f_n(\alpha_i \xi, \alpha_j \eta)| \leq 3.$$

Итак, неравенство оказывается равенством, и, значит, все (т.е. для всех i, j) $f_n(\alpha_i \xi, \alpha_j \eta)$ равны. Учитывая (2), имеем $f_n(\alpha_i \xi_0, \alpha_j \eta_0) = \rho_n(\xi_0, \eta_0)$ и, в частности, $Q_{2n-1}(\xi_0, \eta_0) = 0$.

Таким образом, многочлен Q_{2n-1} должен быть равен нулю во всех экстремальных точках.

Следующие две леммы завершают доказательство.

ЛЕММА 1. Множество E_n экстремальных точек для $\rho_n(\xi, \eta)$ таково:

$$E_n = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{C}^2 \mid \xi^{3n} = 1, \eta^n = \xi^n\}.$$

В самом деле, если $|\xi| = |\eta| = 1$ и $|\rho_n(\xi, \eta)| = 3$, то $\xi^{2n}\eta^n = \xi^n\eta^{2n} = 1$.

ЛЕММА 2. Если $Q_{2n-1}(\xi, \eta)$ равен нулю на E_n , то $Q_{2n-1} \equiv 0$.

Пусть $Q_{2n-1}(\xi, \eta) = \sum_{i,j=1}^{2n-1} a_{ij} \xi^i \eta^j$.

Рассмотрим

$$Q_{2n-1}(\xi, \alpha\xi) = \sum_{k=1}^{4n-2} b_k(\alpha) \xi^k, \quad \text{где } b_k(\alpha) = \sum_{i+j=k} a_{ij} \alpha^j.$$

Из условия леммы, при $\alpha^n = 1$,

$$Q_{2n-1}(\xi, \alpha\xi) = (r_{n-2}(\alpha)\xi^{n-2} + \dots + r_1(\alpha)\xi)(\xi^{3n} - 1).$$

Отсюда

(А) $b_k(\alpha) = 0$ при $k = 0, n-1, n, n+1, \dots, 3n$;

(В) $b_k(\alpha) + b_{k+3n}(\alpha) = 0$ при $k = 1, 2, \dots, n-2$.

Случай (А). В силу свойства (*) многочлен Q_{2n-1} имеет члены вида $s\xi^i\eta^j$ только при $|i-j| \leq n-1$. Поэтому, если $i+j = \text{const} = k$, то индекс j , как легко проверить, может принимать не более n последовательных значений. Следовательно, (так как $\alpha^{n+s} = \alpha^s$) $b_k(\alpha)$ — это многочлен от α степени $\leq n-1$, равный нулю во всех α_j ; значит, $b_k(\alpha) \equiv 0$.

Случай (В). Имеем

$$b_k(\alpha) + b_{k+3n}(\alpha) = \sum_{i+j=k} a_{ij} \alpha^j + \sum_{i+j=3n+k} a_{ij} \alpha^j = 0.$$

В первой сумме индекс j меняется от 0 до k , во второй — от $j = (3n+k) - (2n-1) = n+k+1$ до $2n-1$. Так как $\alpha^{n+s} = \alpha^s$, то и здесь мы имеем многочлен степени $\leq n-1$ с нулями во всех α_j , а, значит, все его коэффициенты равны нулю.

Итак, все $a_{ij} = 0$, что и требовалось доказать. Теорема доказана.

Полученный результат можно распространить на отображения Чебышева, соответствующие всем группам $\widetilde{W}(A_\alpha)$, но об этом речь в следующих работах автора.

Автор благодарит проф. А. М. Стёпина за предложение темы исследования и внимание к работе.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
16.11.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Веселов А. П. // Докл. АН СССР. 1987. Т. 292. № 6. С. 1289–1291.
2. Hoffman M. E., Withers W. D. // Trans. Amer. Math. Soc. 1988. V. 308. № 1. Р. 91–104.
3. Withers W. D. // Amer. Math. Monthly. 1988. № 5. С. 399–413.
4. Веселов А. П. // УМН. 1991. Т. 46. № 5. С. 3–47.