Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Васильев, Гомотопии кривых, отображений
и метрика Тейхмюллера, *Матем. заметки*, 1996,
том 59, выпуск 6, 923–926

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1792>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 09:28:21

ГОМОТОПИИ КРИВЫХ, ОТОБРАЖЕНИЙ И МЕТРИКА ТЕЙХМЮЛЛЕРА

А. Ю. Васильев

Пусть S_0 – риманова поверхность конечного топологического типа (g, n, m) , т.е. топологически эквивалентная сфере с g ручками, n проколами и m гиперболическими граничными компонентами. Если f_1 и f_2 – гомеоморфизмы S_0 на себя, и f_1 гомотопна f_2 в смысле гомотопии отображений, то любая замкнутая простая кривая γ на S_0 при этих отображениях перейдет в $\gamma_1 = f_1(\gamma)$ и $\gamma_2 = f_2(\gamma)$, где γ_1 гомотопна γ_2 в смысле гомотопии кривых. Обратное утверждение неверно. Можно в этом убедиться на простейшем примере:

$$S_0 = \left\{ z : r < |z| < \frac{1}{r}, 0 < r < 1 \right\}, \quad f_1 = z, \quad f_2 = \frac{1}{z}, \quad z \in S_0.$$

Однако в некоторых случаях можно ослабить требование гомотопии отображений, заменив его более слабым требованием гомотопии кривых. В настоящей заметке мы реализуем это утверждение при построении эквивалентного описания метрики Тейхмюллера на пространствах Тейхмюллера $T(g, n, m)$.

Пусть (S, f) – отмеченная риманова поверхность, $f: S_0 \rightarrow S$ – гомеоморфизм. Назовем (S_1, f_1) и (S_2, f_2) эквивалентными ($\sim$), если существует конформное отображение $h: S_1 \rightarrow S_2$ такое, что отображение $f_2^{-1} \circ h \circ f_1$ гомотопна тождественному. Пространство Тейхмюллера $T(S_0) = T(g, n, m)$ есть факторпространство $\{(S, f)\} / \sim$. Пусть $x = [S]$ – точка $T(S_0)$, т.е. класс эквивалентности с представителем (S, f) . Тогда начальная точка $0 = [S_0]$ имеет (S_0, id) своим представителем. Среди всех гомеоморфизмов $f: S_0 \rightarrow S$ таких, что $(S, f) \in [S] = x$, гомотопных с точностью до конформного преобразования, существуют квазиконформные отображения. Обозначим через μ_f – комплексную дилатацию квазиконформного отображения f . Тогда $T(S_0)$ превращается в полное метрическое пространство размерности $6g - 6 + 2n + 3m$ при введении метрики Тейхмюллера

$$\tau_T(0, x) = \inf \frac{1}{2} \log \frac{1 + \|\mu_f\|_\infty}{1 - \|\mu_f\|_\infty},$$

где нижняя грань берется по всем квазиконформным отображениям f таким, что $(S, f) \in x$.

Пусть теперь Γ – семейство гомотопических классов замкнутых жордановых кривых на S_0 , не гомотопных точке или проколу, f – квазиконформное отображение: $(S, f) \in [S] = x$. Определим на S_0 и S проблемы модуля для Γ и $f(\Gamma)$ в смысле П. М. Тамразова [1] (для избежания неопределенности при рассмотрении неспрямляемых квазиконформных образов жордановых кривых из Γ), $m(\Gamma)$ и $m(f(\Gamma))$ – модули в этих проблемах. Определим следующую величину:

$$m_T(0, x) = \sup_{\Gamma} \frac{1}{2} \left| \log \frac{m(f(\Gamma))}{m(\Gamma)} \right|. \quad (1)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 95-01-00345а.

Вообще говоря, модуль семейства нескольких гомотопических классов кривых определяется для фиксированного веса, поэтому верхнюю грань в (1) следует понимать как супремум еще и по весу.

ТЕОРЕМА. *Величина $m_T(0, x)$ определяет на $T(g, n, m)$ метрику, совпадающую с метрикой Тейхмюллера τ_T .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем по этапам.

1. $m(0, x)$ конечно и определено для каждого x однозначно.

Действительно, в силу гомотопических свойств f и конформной инвариантности $m(\Gamma)$, $m(f(\Gamma))$ определено одинаково для каждого семейства Γ независимо от $f \in [S] = x$, а, следовательно, однозначно для каждой точки $x \in T(S_0)$. Обозначим через $K(x) = \exp(2\tau_T(0, x))$. Тогда в силу свойств квазиконформного отображения очевидно

$$\frac{1}{K(x)} \leq \frac{m(f(\Gamma))}{m(\Gamma)} \leq K(x)$$

для любого Γ , а, значит, существует и конечна верхняя грань в (1).

Очевидно, для $x = 0$ f гомотопно конформному отображению и $m(f(\Gamma)) = m(\Gamma)$ для любого Γ , $m_T(0, 0) = 0$. Также очевидно неравенство треугольника: $m_T(0, x) + m_T(x, y) \geq m_T(0, y)$.

2. Рассмотрим свойства дифференциалов с замкнутыми траекториями, опираясь на результаты К. Штребеля [2].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Мероморфный квадратичный дифференциал $\varphi \neq 0$ на римановой поверхности S имеет замкнутые траектории, если незамкнутые траектории покрывают множество плоской меры 0.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ [2]. 1) Квадратичный дифференциал φ с замкнутыми траекториями имеет полюса не выше второго порядка и, если $\|\varphi\|_{L_1} < \infty$, то полюса только первого порядка.

2) Каждая замкнутая траектория γ для φ с $\|\varphi\|_{L_1} < \infty$ вкладывается в некоторую двусвязную область D , ассоциированную с гомотопическим классом кривых $[\gamma]$ (т.е. каждая замкнутая кривая на S , разделяющая граничные компоненты D , гомотопна γ).

Далее будем исключать случай, когда два события появляются одновременно: S – тор и φ – голоморфный дифференциал на торе.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\mathbb{D} = D_j$ некоторый набор неналегающих двусвязных областей D_j , каждая из которых ассоциирована с одним гомотопическим классом кривых Γ_j , где $\Gamma_j = [\gamma]$, γ – замкнутая траектория дифференциала φ . Каждому гомотопическому классу Γ_j соответствует единственная двусвязная область D_j в наборе $\mathbb{D}$, ассоциированная с ним. Тогда $\mathbb{D}$ называется характеристическим семейством областей для дифференциала φ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. 3) Для любого квадратичного мероморфного дифференциала φ с замкнутыми траекториями на S с $\|\varphi\| < \infty$ существует конечное характеристическое семейство $\mathbb{D}$. (Для компактной римановой поверхности S рода $g > 1$ и голоморфного квадратичного дифференциала φ количество областей в характеристическом семействе $\mathbb{D}$ не превосходит числа $3g - 3$.)

4) Пусть γ – замкнутая траектория дифференциала φ с замкнутыми траекториями и $\|\varphi\| < \infty$, $\gamma \in \Gamma_j$. Обозначим через α_j ее длину в метрике $|\varphi|^{1/2}|dz|$:

$$\alpha_j = \int_{\gamma} |\varphi|^{1/2} |dz|.$$

Тогда для характеристического семейства $\mathbb{D}$ справедливо неравенство

$$\sum_{j=1}^m \alpha_j^2 M(D_j) \leq \|\varphi\|,$$

где $M(D_j)$ – модуль семейства кривых, разделяющих граничные компоненты D_j . Равенство справедливо только для семейства $\mathbb{D}^*$, в котором все D_j ограничены критическими траекториями дифференциала φ .

5) На поверхности типа (g, n, t) квадратичные дифференциалы с замкнутыми траекториями образуют всюду плотное подмножество в пространстве квадратичных дифференциалов с конечной нормой.

3. Продолжим доказательство теоремы. Будем утверждать, что если $m_T(0, x) = 0$, то $x = 0$. Таким образом, докажем, что $m_T(x, y)$ – метрика. Предположим противное, т.е. $x \neq 0$. Тогда существует дифференциал Тейхмюллера $\mu = t\bar{\psi}/|\psi|$, $0 < t < 1$, $\|\psi\| < \infty$, такой, что класс эквивалентности с представителем (S, f^μ) ($f^\mu: S_0 \rightarrow S$ – соответствующее μ отображение Тейхмюллера) порождает точку $x \in T(S_0)$. Для произвольного малого $\varepsilon > 0$ по предложению 5) выберем квадратичный дифференциал φ с замкнутыми траекториями такой, что

$$\left\| t \frac{\bar{\psi}}{|\psi|} - t \frac{\bar{\varphi}}{|\varphi|} \right\|_{\infty} < \varepsilon.$$

Пусть $\mathbb{D}$ – характеристическое для φ семейство областей, ассоциированных с гомотопическими классами $\Gamma = \{\Gamma_j\}$. Рассмотрим на S_0 проблему модуля $m(\Gamma)$, на $S = f^\mu(S_0)$ – проблему модуля $m(f^\mu(\Gamma))$ и на $S_1 = f^{\mu_1}(S_0)$, $\mu_1 = t\bar{\varphi}/|\varphi|$, – проблему модуля $m(f^{\mu_1}(\Gamma)) = \frac{1+t}{1-t} m(\Gamma)$ (см., например, [3]). По условию $m_T(0, x) = 0$, значит, в том числе справедливо равенство

$$m(f^\mu(\Gamma)) = m(\Gamma). \quad (2)$$

Построим отображение $F: S_1 \rightarrow S_0 \rightarrow S$. Его комплексная дилатация есть

$$\mu_F = \frac{\mu - \mu_1}{1 - \bar{\mu}\mu_1} \frac{f_{\zeta}^{\mu_1}}{f_{\zeta}^{\mu}},$$

следовательно, $|\mu_F| < \varepsilon/(1-t^2)$. Обозначим $\Gamma_1 = f^{\mu_1}(\Gamma)$, $F(\Gamma_1) = f^\mu(\Gamma)$. Пусть μ_0 – дифференциал Тейхмюллера, реализующий решение задачи Тейхмюллера о минимизации отклонения среди отображений, гомотопных F , $\|\mu_0\| = \varepsilon_1 < \varepsilon/(1-t^2)$. Справедлива [4] вариационная формула

$$m(F(\Gamma_1)) = m(\Gamma_1) - \varepsilon_1 \cdot 2 \operatorname{Re} \iint_{S_1} \mu^* \varphi_1 + o(\varepsilon_1),$$

где μ^* – единичный вектор касательного пространства к $T(S_0)$ в точке x_1 с представителем (S_1, f^{μ_1}) , а φ_1 – экстремальный квадратичный дифференциал в проблеме модуля $m(\Gamma_1)$. Таким образом, $m(F(\Gamma_1)) = m(f^\mu(\Gamma))$,

$$m(f^\mu(\Gamma)) - m(\Gamma) = \frac{2t}{1-t} m(\Gamma) + \varepsilon_1 \cdot 2 \operatorname{Re} \iint_{S_1} \mu^* \varphi_1 + o(\varepsilon_1).$$

Так как левая часть не зависит от ε_1 , то устремим $\varepsilon \rightarrow 0$. Следовательно, $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ и $m(f^\mu(\Gamma)) - m(\Gamma) > 0$, что противоречит (2).

3. Докажем, что полученная метрика m_T совпадает с естественной метрикой Тейхмюллера τ_T . Пусть $x \in T(S_0)$, отображение Тейхмюллера f^μ , $\mu = t\bar{\varphi}/|\varphi|$, $0 < t < 1$, $\|\varphi\| < \infty$, порождает отмеченную риманову поверхность (S, f^μ) , являющуюся представителем для x . Если φ – квадратичный дифференциал с замкнутыми траекториями на S_0 , то в качестве Γ рассмотрим характеристическое семейство гомотопических классов Γ_j ; тогда на Γ достигается верхняя грань в (1) и

$$m_T(0, x) = \frac{1}{2} \log \frac{1+t}{1-t} = \tau_T(0, x).$$

Если же φ – произвольный квадратичный дифференциал на S_0 с конечной нормой, то по предложению 5) приближаем его дифференциалами с замкнутыми траекториями аналогично п. 3. Тогда верхняя грань в (1) может не достигаться, однако $m_T(0, x) = \tau_T(0, x)$. Доказательство закончено.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Мы проводим все определения и доказательства для метрик $m_T(0, x)$, $\tau_T(0, x)$. Очевидно, эти же расстояния от произвольной точки до x получаются квазиконформным сдвигом, что не нарушает общности рассуждений.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Для произвольного пространства Тейхмюллера величина $m_T(x, y)$ по п. 1 доказательства теоремы порождает полуметрику. Очевидно неравенство $m_T(x, y) \leq \tau_T(x, y)$.

Саратовский государственный университет
E-mail: vasilev@scnit.saratov.su

Поступило
11.07.94

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тамразов П. М. Метод экстремальных метрик и конформные отображения. Автореферат дисс. . . . к.ф.-м.н. Киев, 1963. 2. Strebel K. Quadratic differentials. Berlin, New York: Springer Verlag, 1984. 3. Васильев А. Ю. // Укр. матем. ж. 1991. Т. 43. №3. С. 32–336. 4. Васильев А. Ю. // “Алгебра и анализ”. Тезисы докладов международной научной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения Н. Г. Чеботарёва. Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1994. С. 30.