Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. Е. Галкин, Бесконечномерные супераналоги
формулы Мелера, *Матем. заметки*, 1996, том 59,
выпуск 6, 927–931

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1793>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 17:37:53

БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫЕ СУПЕРАНАЛОГИ ФОРМУЛЫ МЕЛЕРА

О. Е. Галкин

В работе найдена явная формула (являющаяся обобщением формулы Мелера, см. [1, с. 34]) решения задачи Коши для бесконечномерного аналога уравнения Шрёдингера гармонического осциллятора относительно функций на суперпространстве. Понятие суперпространства, использованное в работе, было введено в работах [2], [3] (конечномерный случай) и в [4] (бесконечномерный случай). Отметим также работы [5]–[16], посвященные различным аспектам как конечномерного, так и бесконечномерного суперанализа, особенно пионерскую работу Ф. А. Березина (см. [7] и имеющиеся там ссылки).

В настоящей работе используется подход к бесконечномерному суперанализу, описанный в работах [9], [11]. Отметим, что “вещественные” аналоги рассмотренной нами задачи решены в [17], [18]. Супераналоги классических уравнений математической физики изучались также в [10]–[13].

1. Суперпространство. Пусть $\Lambda = \Lambda_0 \oplus \Lambda_1$ – (вещественная) коммутативная банахова *супералгебра* с тривиальным левым аннулятором (см. [3]) и нормой $|\cdot|$ такой, что $|ab| \leq |a| \cdot |b|$ (каковы бы ни были $a, b \in \Lambda$). Пусть, далее, $G = G_0 \oplus G_1$ и F – (вещественные) градуированные банаховы, $E = E_0 \oplus V \oplus W$ – вещественное сепарабельное гильбертово пространства, причем подпространства E_0 и $E_1 = V \oplus W$ ортогональны, а V и W изоморфны. (Здесь и далее прямые суммы пополняются по ℓ_1 -норме, для гильбертовых пространств – по ℓ_2 -норме.) Фиксируем в E_0 , V и W ортонормированные базисы. Тогда их объединение $\{e_i\}_{i=1}^\infty$ будет базисом в E .

Супермодулем называется банахово пространство $G^\Lambda = G \hat{\otimes} \Lambda$, являющееся пополнением тензорного произведения $G \otimes \Lambda$ по какой-либо кросс-норме $\|\cdot\|$, например, по норме проективной топологии или топологии равностепенно непрерывной сходимости (см. [19], [20]). В случае сепарабельного гильбертова пространства E в качестве такой нормы будем брать ℓ_2 -норму:

$$\left\| \sum_{i=1}^n e_i \otimes \lambda_i \right\| = \left(\sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 \right)^{1/2}.$$

При этом E^Λ будет гильбертовым суперпространством (см. [21]). В G^Λ и G_Λ естественным образом вводятся структуры двусторонних модулей над Λ и Λ_0 соответственно.

Аналогично определяются пространства

$$\begin{aligned} (E_\Lambda)_0 &= E_0 \hat{\otimes} \Lambda_0, & (E_\Lambda)_V &= V \hat{\otimes} \Lambda_1, & (E_\Lambda)_W &= W \hat{\otimes} \Lambda_1, \\ (E_\Lambda)_1 &= E_1 \hat{\otimes} \Lambda_1, & (G_\Lambda)_0 &= G_0 \hat{\otimes} \Lambda_0, & (G_\Lambda)_1 &= G_1 \hat{\otimes} \Lambda_1. \end{aligned}$$

Ясно, что $(E_\Lambda)_1 = (E_\Lambda)_V \oplus (E_\Lambda)_W$.

Суперпространствами над Λ называются прямые суммы $G_\Lambda = (G_\Lambda)_0 \oplus (G_\Lambda)_1$ и $E_\Lambda = (E_\Lambda)_0 \oplus (E_\Lambda)_1$. Элементы E_Λ будем записывать в виде $X = (x, \theta, \bar{\theta})$, где $x = (x_1, \dots, x_n, \dots) \in (E_\Lambda)_0$, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n, \dots) \in (E_\Lambda)_V$, $\bar{\theta} = (\bar{\theta}_1, \dots, \bar{\theta}_n, \dots) \in (E_\Lambda)_W$.

Суперскалярным произведением (X, Y) произвольных элементов $X = (x, \theta, \bar{\theta})$, $Y = (y, \xi, \bar{\xi})$ из E_Λ называется величина $\sum_{i=1}^{\infty} (x_i y_i + \theta_i \bar{\xi}_i + \xi_i \bar{\theta}_i)$. (При этом $(X, Y) \in \Lambda_0$, $|(X, Y)| \leq \|X\| \cdot \|Y\|$, $(X, Y) = (Y, X)$.)

2. Линейные операторы. Пусть $\text{Hom}(F^\Lambda, G^\Lambda)$ – пространство Λ -линейных справа непрерывных отображений F^Λ в G^Λ , наделенное равномерной операторной нормой $\|\cdot\|$; $\text{Hom}(F, G)$ – подмножество всех таких элементов $A \in \text{Hom}(F^\Lambda, G^\Lambda)$, что $A(F) \subset G$; $\text{Hom}_0(F, G) = \text{Hom}(F_0, G_0) \oplus \text{Hom}(F_1, G_1)$, $\text{Hom}_1(F, G) = \text{Hom}(F_0, G_1) \oplus \text{Hom}(F_1, G_0)$, $\text{Hom}_\Lambda(F, G)$ – соответствующее ему суперпространство (пополнение взято относительно нормы пространства $\text{Hom}(F^\Lambda, G^\Lambda)$).

Линейными операторами B на F_Λ со значениями в G_Λ называются ограничения на F_Λ операторов из $\text{Hom}_\Lambda(F, G)$, а также сами эти операторы. Каждый линейный оператор B имеет четыре компоненты $B_{ij} : (E_\Lambda)_i \rightarrow (G_\Lambda)_j$; $i, j = 0, 1$.

Оператором Гильберта–Шмидта называется линейный оператор B с конечной нормой

$$\|B\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|B e_i\|^2 \right)^{1/2}.$$

Ядерным называется оператор B , представимый суммой $B = \sum_{i=1}^{\infty} C_i D_i$ парных произведений операторов Гильберта–Шмидта, имеющих конечную ядерную норму. *Ядерной нормой* $\|B\|_1$ называется инфимум по всем таким представлениям сумм $\sum_{i=1}^{\infty} \|C_i\|_2 \cdot \|D_i\|_2$. Заметим, что если C – линейный оператор, то $\|BC\|_1 \leq \|B\|_1 \cdot \|C\|$.

Суперследом элемента B пространства $N(E_\Lambda)$ *всех ядерных операторов на* E_Λ , *наделенного нормой* $\|\cdot\|_1$, называется величина $\text{str } B = \text{tr}(B_{00}) - \text{tr}(B_{11})$ (см. [7, с. 93]).

Оператор C называется *суперсимметричным*, если каковы бы ни были $X, Y \in E_\Lambda$ верно равенство $(CX, Y) = (X, CY)$.

Пусть D – линейный оператор, такой что $(D - 1)$ – ядерный (1 – тождественный оператор), и все элементы его матрицы $\dot{D}$ принадлежат Λ_0 . *Детерминантом* $\det D$ оператора D называется предел при $n \rightarrow \infty$ главных миноров порядка n матрицы $\dot{D}$ (ср. [22, гл. 4, § 1], [23, гл. 11, § 6]). Если оператор C таков, что $(C - 1) \in N(E_\Lambda)$, а C_{11} обратим, то величина

$$\text{sdet } C = \det(C_{00} - C_{01} C_{11}^{-1} C_{10}) \det C_{11}^{-1}$$

называется *супердетерминантом* оператора C (ср. [7, с. 93]).

ТЕОРЕМА 1 (Лиувилля, ср. [7, с. 101]). Пусть $\varepsilon > 0$, A – аналитическое отображение (см. [3]) области $U = \{t \in \Lambda_0^\mathbb{C} \mid |t| < \varepsilon\}$ в пространство $N(E_\Lambda)$. Тогда в этой области существует решение задачи Коши $\{D'(t) = A(t)D(t), D(0) = D_0\}$, причем если $(D_0 - 1) \in N(E_\Lambda)$, то $(D(t) - 1) \in N(E_\Lambda)$ для всех $t \in U$, и $(\text{sdet } D(t))' = \text{str } A(t) \cdot \text{sdet } D(t)$. (Здесь берутся формальные производные степенных рядов.)

3. Функции и супермеры. Отображение f открытого подмножества $U \subset F_\Lambda$ в суперпространство G_Λ называется *супердифференцируемым в точке* X , если оно дифференцируемо по Фреше, причем его производная $f'(X)$ принадлежит пространству $\text{Hom}_\Lambda(F, G)$. Производная в точке X от производной порядка $n - 1$ (где

$n \geq 2$) называется производной $f^{(n)}(X)$ порядка n (ее можно считать элементом пространства $\text{Hom}_\Lambda(\hat{\otimes}^n F, G)$).

Если существует n -я производная $D^n f(X)$ по нечетным переменным, то она принадлежит пространству $\text{Ahom}_\Lambda(\hat{\otimes}^n F_1, G)$ антисимметричных операторов на $(\hat{\otimes}^n F_1)_\Lambda$, которые можно считать Λ -линейными справа непрерывными операторами, действующими в пространстве $(\hat{\wedge}^n F_1)_\Lambda$, пополненном в проективной топологии. (Здесь $\wedge^n F_1$ — n -я внешняя степень пространства F_1 , см. [24].)

Прямую сумму

$$\sum_{n=0}^{\infty} \text{Hom}_\Lambda(\hat{\wedge}^n F_1, G)$$

обозначим символом $\text{Hom}_\Lambda(\hat{\wedge} F_1, G)$, а подкласс ограниченных последовательностей в классе

$$\prod_{n=1}^{\infty} (\hat{\wedge}^n F_1)_\Lambda,$$

наделенный ℓ_∞ -нормой, — символом $(\hat{\wedge} F_1)_\Lambda$. Тогда на $\text{Hom}_\Lambda(\hat{\wedge} F_1, G) \times (\hat{\wedge} F_1)_\Lambda$ определено естественное непрерывное G_Λ -значное билинейное отображение

$$T: (A, \nu) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\nu_n),$$

где $A = (A_1, \dots, A_n, \dots)$, $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n, \dots)$.

Супермерой μ на F_Λ называется $(\hat{\wedge} F_1)_\Lambda$ -значная борелевская счетноаддитивная мера на $(F_\Lambda)_0$, имеющая ограниченную вариацию $v(\mu)$. Пусть $M_b(F_\Lambda)$ — множество всех супермер на F_Λ с ограниченным носителем.

Для всякой функции $f: E_\Lambda \rightarrow G_\Lambda$, бесконечное число раз супердифференцируемой по нечетным переменным, и для любого $r > 0$ определим на $(E_\Lambda)_0$ отображения

$$\pi_r(f): x \mapsto \left(f(x), r D f(x), \dots, r^n D^n \frac{f(x)}{n!}, \dots \right), \quad \pi(f) = \pi_1(f).$$

Обозначим через $F_r(E_\Lambda, G_\Lambda)$ множество функций f , для которых $\pi_r(f)((E_\Lambda)_0) \subset \text{Hom}_\Lambda(\hat{\wedge} F_1, G)$. Пусть, кроме того, $F_{b,r}(E_\Lambda, G_\Lambda)$ — множество всех функций из класса $F_r(E_\Lambda, G_\Lambda)$, таких что отображение $\pi_r(f): (E_\Lambda)_0 \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(\hat{\wedge} F_1, G)$ непрерывно и ограничено на ограниченных подмножествах, $F_b(E_\Lambda, G_\Lambda) = F_{b,1}(E_\Lambda, G_\Lambda)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Произведение двух функций из классов $F_{b,16r}(E_\Lambda, G_\Lambda)$ и $F_{b,16r}(E_\Lambda, \Lambda_0)$ соответственно является элементом класса $F_{b,r}(E_\Lambda, G_\Lambda)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Функции $f_Y: X \mapsto \exp\{i(X, Y)\}$, $g_C: X \mapsto (CX, X)$ и $h_C: X \mapsto \exp\{(CX, X)\}$ принадлежат пространствам $F_{b,r}(E_\Lambda, \Lambda_0^\mathbb{C})$, каковы бы ни были элементы $Y \in E_\Lambda$, $C \in \text{Hom}_\Lambda(E, E^\mathbb{C})$, $r > 0$. (Здесь $F^\mathbb{C}$ — комплексификация F .)

ТЕОРЕМА 2. Если $f \in F_b(E_\Lambda, G_\Lambda^\mathbb{C})$, $\mu \in M_b(E_\Lambda)$, то функция

$$\pi(f): (E_\Lambda)_0 \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(\hat{\wedge} E_1, G^\mathbb{C})$$

интегрируема в смысле Бартла (см. [25]) по супермере μ относительно билинейного отображения T .

Величина билинейного интеграла

$$\int_{(E_\Lambda)_0} T(\pi(f)(X), \mu(dX))$$

называется интегралом $\int f(X)\mu(dX)$ функции f по супермере μ .

Преобразованием Фурье супермеры $\mu \in M_b(E_\Lambda)$ называется функция

$$\tilde{\mu}: E_\Lambda \mapsto \Lambda^\mathbb{C}, X \mapsto \int \exp\{i(X, Y)\}\mu(dY).$$

ТЕОРЕМА 3 (о дифференцировании под знаком интеграла). Пусть U – открытое подмножество E_Λ , и функция $g: U \times E_\Lambda \rightarrow G_\Lambda^\mathbb{C}$ такова, что каково бы ни было $k = 0, 1, \dots, n+1$, отображение $g_k: X \mapsto g_x^{(k)}(X, \cdot)$, $U \rightarrow F_b(E_\Lambda, \text{Hom}_\Lambda(\otimes^n E, G^\mathbb{C}))$ (здесь $g_x^{(k)}$ – k -я производная по первому аргументу) локально ограничено. Тогда если $\mu \in M_b(E_\Lambda)$, то функция $f: X \mapsto \int g(X, Y)\mu(dY)$, $U \rightarrow G_\Lambda^\mathbb{C}$, имеет производные до порядка n включительно, причем $f^{(k)}(X) = \int g_x^{(k)}(X, Y)\mu(dY)$ ($n \geq 1$, $k = 1, 2, \dots, n$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится по индукции.

4. Гармонический осциллятор. Для ядерного оператора B в E_Λ и дважды супердифференцируемой функции f определен суперлапласиан $\Delta_B f = \text{str}(f''BJ)$, где $J: (x, \theta, \bar{\theta}) \mapsto (x, \theta, -\bar{\theta})$ – оператор в E_Λ .

ТЕОРЕМА 4. Пусть B, C – суперсимметричные операторы в E_Λ , причем B – ядерный; $\mu_0 \in M_b(E_\Lambda)$, $\alpha \in \Lambda_0^\mathbb{C}$, $\delta = \pi(2(\|B\| \cdot \|C\|)^{1/2}|\alpha|)^{-1}$. Тогда в классе функций $f: \{t \in \Lambda_0^\mathbb{C} \mid |t| \leq \delta\} \times E_\Lambda \rightarrow \Lambda^\mathbb{C}$ разрешима задача Коши для уравнения

$$f'_t(t, X) = \frac{\alpha}{2}(-\Delta_B f(t, X) + (CX, X)f(t, X)) \quad (1)$$

с начальным условием $f(0, \cdot) = \tilde{\mu}_0(\cdot)$. Причем существует решение вида $f(t, X) = \int G(t, X, Y)\mu_0(dY)$, где

$$G(t, X, Y) = s(t, Y) \exp\left\{\frac{(Q(t)X, X)}{2} + i(R(t, Y), X)\right\}, \quad (2)$$

а функции s , Q и R определяются равенствами:

$$s = \text{sdet}^{-1/2}(\text{ch}(\alpha t \sqrt{CB})) \exp\left\{\frac{1}{2}B\left(\frac{\text{th}(\alpha t \sqrt{CB})}{\sqrt{CB}}Y, Y\right)\right\},$$

$$Q(t) = \frac{\text{th}(\alpha t \sqrt{CB})}{\sqrt{CB}}C, \quad R(t, Y) = \text{ch}^{-1}(\alpha t \sqrt{CB})Y.$$

(Четные функции от $\sqrt{CB}$ определяются с помощью ряда Маклорена.)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выполнение начальных условий очевидно. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что функция $G(\cdot, \cdot, Y)$ вида (2) будет решением уравнения (1) с начальными условиями $G(0, \cdot, Y) = \exp\{i(\cdot, Y)\}$ тогда и только

тогда, когда функции s , Q и R аргумента t (Y – параметр) будут решениями системы уравнений

$$s'_t = s \cdot \frac{\alpha(\text{str}(QB) + (BR, R))}{2}, \quad R'_t = -\alpha QBR, \quad Q'_t = \alpha(C - QBQ)$$

с начальными условиями $\{s(0, Y) = 1, Q(0) = 0, R(0, Y) = Y\}$. Непосредственная проверка с использованием теоремы 1 показывает, что формулы, приведенные в формулировке теоремы, действительно определяют решение этой системы. Доказательство завершается применением теоремы 3.

ЗАМЕЧАНИЕ. Уравнению Шрёдингера соответствует значение α , равное $-i$.

В заключение автор выражает благодарность О. Г. Смолянову за постановку задачи и внимание к работе.

Нижегородский государственный университет
им. Н. И. Лобачевского

Поступило
20.11.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Глимм Дж., Джаффе А. Математические методы квантовой физики. М.: Мир, 1984. **2.** Rogers A. // J. Math. Phys. 1981. V. 22. № 5. P. 939–945. **3.** Владимиров В. С., Волович И. В. // ТМФ. 1984. Т. 59. № 1. С. 3–27. **4.** Смолянов О. Г., Шавгулидзе Е. Т. // УМН. 1986. Т. 41. № 4. С. 164–165. **5.** Владимиров В. С., Волович И. В. // ТМФ. 1984. Т. 60. № 2. С. 169–198. **6.** Хренников А. Ю. // УМН. 1988. Т. 43. № 2. С. 87–114. **7.** Березин Ф. А. Введение в алгебру и анализ с антикоммутирующими переменными. М.: Изд-во МГУ, 1983. **8.** Хренников А. Ю. // ТМФ. 1987. Т. 72. № 3. С. 24–34. **9.** Смолянов О. Г., Шавгулидзе Е. Т. // Докл. АН СССР. 1988. Т. 299. № 4. С. 816–821. **10.** Хренников А. Ю. // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24. № 12. С. 2144–2153. **11.** Смолянов О. Г., Шавгулидзе Е. Т. // Докл. АН СССР. 1990. Т. 309. С. 545–550. **12.** Хренников А. Ю. // Матем. заметки. 1990. Т. 48. № 2. С. 114–122. **13.** Маслова Е. В. // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1990. Т. 6. С. 72–75. **14.** Rogers A. // J. Geom. Phys. 1993. V. 2. № 1–4. P. 491–505. **15.** Хренников А. Ю. // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1990. Т. 54. № 3. С. 576–606. **16.** Хренников А. Ю. // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28. № 8. С. 1434–1443. **17.** Хренников А. Ю. // УМН. 1984. Т. 39. № 1. С. 163–164. **18.** Галкин О. Е. // Сб. “Исследования по теории функций”. Н. Новгород: ННГУ, 1992. С. 1113. **19.** Робертсон А. П., Робертсон В. Дж. Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1967. **20.** Шефер Х. Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1971. **21.** Хренников А. Ю. // Докл. АН СССР. 1991. Т. 321. № 2. С. 298–301. **22.** Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1965. **23.** Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Т. 2. Спектральная теория. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве. М.: Мир, 1966. **24.** Бурбаки Н. Алгебра. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра. М.: Физматгиз, 1962. **25.** Bartle R. G. // Studia Math. 1956. V. 15. № 3. P. 337–352.