Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. Н. Гарифьянов, Абсолютно представляющие системы эллиптических функций, *Матем. заметки*, 1996, том 59, выпуск 6, 932–936

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1794>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 13:31:53

АБСОЛЮТНО ПРЕДСТАВЛЯЮЩИЕ СИСТЕМЫ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Ф. Н. Гарифьянов

В статье изучаются аппроксимативные свойства систем последовательных производных эллиптических функций. Такие системы являются абсолютно представляющими системами (АПС) в некоторых классах аналитических функций. Далее получены нетривиальные разложения нуля (НРН) по системе производных. Для получения этих результатов предварительно вводятся системы функций, биортогональные к рассматриваемым. Общие вопросы теории АПС и тесно связанных с ними НРН исследованы в работах Ю. Ф. Коробейника (см., например, [1]). Им же построен и целый ряд конкретных примеров АПС целых функций. Рассмотренные в данной статье АПС мероморфных функций имеют некоторые интересные особенности. В частности, естественная область сходимости соответствующих биортогональных рядов, в отличие от хорошо изученного случая АПС целых функций, уже не является ни выпуклым, ни ρ -выпуклым множеством. Вместе с тем АПС эллиптических функций и биортогональные к ним системы просты по своей структуре (инвариантность относительно дифференцирования), а каждая эллиптическая функция обладает алгебраической теоремой сложения и периодична (или квазипериодична). Наличие аналогов таких свойств, которыми обладают системы степеней или экспонент, обусловлено относительной простотой эллиптических функций по сравнению с целыми.

Возьмем эллиптическую $\wp$ -функцию Вейерштрасса $\wp(z)$, построенную по примитивным периодам

$$\omega_1 = 2\pi, \quad \omega_2 = 2a; \quad \operatorname{Im} a > 0, \quad |a| = \pi, \quad |a \pm \pi| > \pi, \quad (1)$$

и рассмотрим четную функцию

$$f(z) = \wp(z + a + \pi), \quad (2)$$

которая имеет полюсы в точках

$$\omega = a + \pi + m_1\omega_1 + m_2\omega_2. \quad (3)$$

Пусть D – открытая односвязная область, ограниченная дугами четырех окружностей $|z \pm (a \pm \pi)| = \pi$ и содержащая начало координат. На кусочно-гладкой границе ∂D введем нечетную функцию $\alpha(t) = t \pm (a \pm \pi)$, причем на каждой гладкой компоненте знаки выбраны так, что эта функция взаимно-однозначно отображает ∂D на окружность $E: |z| = \pi$. При этом точки $\pm a, \pm \pi$, которые являются вершинами некоторого прямоугольника R , будут для функции $\alpha(t)$ точками разрыва первого рода. В каждой из четырех луночек, вырезаемых областью D из круга $|z| \leq \pi$, определим функцию $\alpha(z)$ аналитическим продолжением $\alpha(t)$ с соответствующей гладкой компоненты ∂D .

ЛЕММА 1. *Системы функций*

$$\{f^{(k)}(z)\}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (4)$$

и

$$\{(-1)^m [(m+1)!]^{-1} \alpha^{m+1}(t)\}, \quad m = 0, 1, \dots, \quad (5)$$

биортогональны на ∂D .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что

$$\frac{(-1)^m [(m+1)!]^{-1}}{2\pi i} \int_{\partial D} \alpha^{m+1}(t) f^{(k)}(t) dt = \delta_{m,k}. \quad (6)$$

Из теоремы Коши следует, что интеграл в левой части соотношения (6) можно считать взятым по положительно ориентированной границе прямоугольника R . Тогда имеем гомеоморфизм $\alpha(t): \partial R \rightarrow \partial D$ с изменением ориентации, причем $\alpha[\alpha(t)] = t$. Поэтому

$$\int_{\partial R} \alpha^{m+1}(t) f^{(k)}(t) dt = - \int_{\partial R} t^{m+1} \wp^{(k)}(t) dt,$$

так как $f[\alpha(t)] = \wp(t)$ и последний интеграл вычисляется с помощью вычетов, что и завершает доказательство.

Систему функций (4) дополним 1, а систему функций (5) – нечетной кусочной постоянной β_t , удовлетворяющей условиям

$$\int_{\partial D} \beta_t dt = 2\pi i, \quad \int_{\partial D} \beta_t f(t) dt = 0 \quad (7)$$

и имеющей точки разрыва первого рода только в угловых точках ∂D . Если на двух соприкасающихся в точке π гладких компонентах границы кусочная постоянная β_t принимает значения β_1 и β_2 , то условия (7) равносильны неоднородной системе двух линейных уравнений относительно неизвестных β_1 и β_2 . В силу известного соотношения Лежандра [2, с. 176] определитель системы отличен от нуля. Поскольку из-за нечетности и двоякопериодичности

$$f^{(2k+1)}(\pm a) = f^{(2k+1)}(\pm \pi) = 0, \quad k = 0, 1, \dots,$$

то

$$\int_{\partial D} \beta_t f^{(k)}(t) dt = 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (8)$$

При нечетном k интегралы в левой части (8) обращаются в нуль, как интегралы от четной функции по симметричному относительно начала координат контуру.

Пусть теперь четная функция $\varphi(z)$ голоморфна в D и ее граничное значение $\varphi(t) \in C^2(\partial D)$. Класс таких функций обозначим E_φ . Каждой такой функции сопоставим ряд

$$\varphi(z) \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} \mu_{2\nu} f^{(2\nu)}(z) + \mu, \quad (9)$$

где

$$\mu = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \varphi(t) \beta_t dt, \quad \mu_{2\nu} = \frac{[(2\nu+1)!]^{-1}}{-2\pi i} \int_{\partial D} \varphi(t) \alpha^{2\nu+1}(t) dt. \quad (10)$$

ТЕОРЕМА 1. Ряд (9) сходится к функции $\varphi(z)$ абсолютно и равномерно по всей замкнутой области $\overline{D}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С помощью двукратного интегрирования по частям имеем

$$2\pi i(2\nu+3)!\mu_{2\nu} = \alpha^{2\nu+3}(t)\varphi'(t)|_{\partial D} - \int_{\partial D} \varphi''(t)\alpha^{2\nu+3}(t) dt,$$

если учесть, что $\alpha^{2m}(t) \in C(\partial D)$. Поэтому существует такая постоянная B , что $|\mu_{2\nu}| < B\pi^{2\nu}[(2\nu+3)!]^{-1}$. С другой стороны, функция

$$\theta(z) = f(z) - (z-a-\pi)^{-2} - (z+a+\pi)^{-2} - (z-a+\pi)^{-2} - (z+a-\pi)^{-2} \quad (11)$$

голоморфна в кругах $|z \pm (a \pm \pi)| \leq q$ при некотором $q > \pi$. Но тогда $\mu_{2\nu} f^{(2\nu)}(t) \sim [(2\nu+2)(2\nu+3)]^{-1}$, $\nu \rightarrow \infty$, $t \in \partial D$, т.е. ряд (9) сходится абсолютно и равномерно в области $\bar{D}$. Обозначим через $\varphi_1(z)$ разность между суммой ряда и функцией $\varphi(z)$. В силу леммы 1 имеем

$$\int_{\partial D} \varphi_1^+(t) \alpha^m(t) dt = 0, \quad m = \overline{0, \infty},$$

или, что то же самое,

$$\int_{|t|=\pi} t^m \varphi_1^+[\alpha^{-1}(t)] dt = 0.$$

По теореме Рунге функция $\varphi_1^+[\alpha^{-1}(t)]$ является граничным значением функции, голоморфной внутри круга $|z| < \pi$, т.е. она голоморфна и в прямоугольнике $\bar{R} \setminus \{\pm a, \pm \pi\}$. Вершины прямоугольника могут быть для нее, самое большее, точками разрыва первого рода. Из теории задачи Карлемана со сдвигом $\alpha(t)$ для прямоугольника [3, с. 25] следует, что такое возможно только в одном случае, когда $\varphi_1(z) = c$, $z \in R$. Но должно выполняться и условие $\int_{\partial D} c\beta_t dt = 0$, т.е. $c = 0$, что и завершает доказательство.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если снять условие четности, то можно показать, что соответствующий биортогональный ряд сходится к этой функции абсолютно и равномерно на любом компакте $\bar{K} \subset D$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. На любом компакте $\bar{K} \subset D$ ряд (9) можно почленно дифференцировать любое число раз как равномерно сходящийся ряд аналитических функций. Если положить, например, $\varphi(z) = z^2$, то таким путем получим НРН по системе функций (4).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если ряд (9) сходится абсолютно хотя бы в одной точке $t_0 \in \partial D$, то он сходится абсолютно и равномерно во всей области $\bar{D}$.

Теперь рассмотрим канонический оператор Фредгольма

$$(T\varphi)(t) \equiv \varphi(t) + (A\varphi)(t), \quad (12)$$

где

$$(A\varphi)(t) \equiv (2\pi i)^{-1} g^+(t) \int_{\partial D} \varphi(\tau) \psi[\alpha(\tau) - t] d\tau. \quad (13)$$

Считаем, что $g(z) \in E_\varphi$, а нечетная функция $\psi(z)$ голоморфна в круге $|z| \leq 2\pi$. Обозначим через $\tilde{L}_2(\partial D)$ множество четных функций из $L_2(\partial D)$. Ясно, что $T: \tilde{L}_2(\partial D) \rightarrow \tilde{L}_2(\partial D)$ и $A: \tilde{L}_2(\partial D) \rightarrow E_\varphi$.

ТЕОРЕМА 2. Система функций

$$1 \cup \beta_j(z), \quad \beta_j(z) = f^{(2j)}(z) + g(z)\psi^{(2j+1)}(z), \quad j = 0, 1, \dots, \quad (14)$$

является АПС в E_φ тогда и только тогда, когда оператор T обратим.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если функция $\gamma(z) \in E_\varphi$ и однородное уравнение

$$(T\varphi)(t) = 0 \quad (15)$$

не имеет нетривиальных решений, то уравнение

$$(T\varphi)(t) = \gamma^+(t) \quad (16)$$

безусловно разрешимо при любой правой части. Его решение $\varphi(t)$ по теореме 1 представимо в $\bar{D}$ равномерно сходящимся рядом (9). Поскольку

$$\int_{\partial D} f^{(2j)}(\tau)\psi[\alpha(\tau) - t] d\tau = - \int_{|\tau|=\pi} \wp^{(2j)}(\tau)\psi(\tau - t) d\tau,$$

то, сосчитав последний интеграл с помощью вычетов, получим разложение функции $\gamma(z)$ по системе функций (14).

Обратно, пусть система функций (14) является АПС в E_φ . Тогда

$$\gamma^+(t) = c_1 + \sum_{j=0}^{\infty} c_j \beta_j(t), \quad t \in \partial D, \quad (17)$$

причем ряд в правой части (17) сходится абсолютно. Но тогда абсолютно и равномерно сходится и ряд

$$\varphi(t) = c_1 + \sum_{j=0}^{\infty} c_j \beta_j(t), \quad t \in \partial D,$$

который является решением уравнения (16), т.е. оно разрешимо при любой правой части. Решениями союзного уравнения $(T'\varphi^*)(t) = 0$ будут функции $\varphi^*[\alpha(t)]$, где $\varphi^*(z)$ – нечетная функция, аналитическая в круге $|z| \leq \pi$. Если условие разрешимости

$$\int_{\partial D} \gamma^+(t)\varphi^*[\alpha(t)] dt = 0$$

выполняется для любой функции $\gamma^+(t)$, то $\varphi^*[\alpha(t)] = 0$, что и завершает доказательство.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Если оператор T не является обратимым, то система функций (14) будет АПС, если только пополнить ее, самое большее, конечным числом функций. В качестве таких функций можно взять, например, степени $\{z^{2n_k}\}$, $k = \overline{1, m}$. Степени n_k выбираются так, чтобы уравнение

$$(T\varphi)(t) = \gamma^+(t) + \sum_{k=1}^m \alpha_k z^{2n_k}$$

было разрешимо при любой функции $\gamma(z)$ за счет подбора постоянных α_k .

ЗАМЕЧАНИЕ 5. В некоторых частных случаях условия обратимости оператора T можно найти в явном виде. Пусть, например, $g(z) = \lambda$, а функция $\psi(z)$ голоморфна и 2π -периодична в полосе $|\operatorname{Im} z| \leq 2\pi$. Тогда

$$\psi[\alpha(\tau) - t] = \begin{cases} \psi(\tau - a + \pi - t), & \operatorname{Im} \tau > 0, \\ \psi(\tau + a + \pi - t), & \operatorname{Im} \tau < 0, \end{cases}$$

и с помощью теоремы Коши уравнение (15) запишется как

$$\varphi(t) + \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \varphi[\psi(\tau + a + \pi - t) - \psi(\tau - a + \pi - t)] d\tau = \gamma(t).$$

Это уравнение типа свертки с 2π -периодическим ядром, которое исследуется в замкнутой форме [4, с. 233].

Обсудим теперь возможные обобщения на случай произвольной эллиптической функции $f(z)$, имеющей полюса только в точках (3) и удовлетворяющей условиям

$$f(z + 2\pi) = f(z) \exp(\gamma_1), \quad f(z + 2a) = f(z) \exp(\gamma_2).$$

Пусть сначала

$$\gamma_1 \omega_2 - \gamma_2 \omega_1 \neq 2\pi i(n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2), \quad (18)$$

где n_1 и n_2 — фиксированная пара целых чисел. Тогда существует эллиптическая функция порядка 1, и биортогональной к системе ее производных (4) будет система функций

$$\{A_m \theta_t \alpha^m(t)\}, \quad m = 0, 1, \dots \quad (19)$$

Здесь кусочная постоянная θ_t определяется из равенства $\theta_{\alpha(t)} f[\alpha(t)] = f(t - a - \pi)$, а A_m — некоторые постоянные. Теорема 1 остается справедливой, если в определении класса E_φ условие четности заменить условием

$$\theta_{\alpha^{-1}(t)} \varphi[\alpha^{-1}(t)] \in C(|t| = \pi), \quad (20)$$

которое обеспечивает абсолютную и равномерную сходимость ряда всюду в замыкании $\overline{D}$. При этом нет надобности в пополнении систем (4) и (19).

Если же в (18) имеет место знак равенства, то наименьший возможный порядок функции $f(z)$ равен 2, т.е.

$$f(z) = \exp(dz) \varphi(z + a + \pi)$$

при некотором выборе постоянной d . Система функций (19), из которой исключена кусочная постоянная, и система производных (4) будут биортогональны только при условии $\operatorname{res}_{z=a+\pi} f(z) = 0 \Rightarrow d = 0$. Именно этот случай и был подробно изучен в статье.

Казанский авиационный институт
им. А. Н. Туполева

Поступило
25.01.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коробейник Ю. Ф. // Изв. вузов. Матем. 1992. № 7. С. 26–35.
2. Гурвиц А., Курант Р. Теория функций. М.: Наука, 1968.
3. Чибрикова Л. И. // Уч. записки Казанск. ун-та. 1963. Т. 123. № 9. С. 15–39.
4. Гахов Ф. Д., Черский Ю. И. Уравнения типа свертки. М.: Наука, 1978.