Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. И. Дьяченко, Равномерная сходимость двойных рядов Фурье для классов функций с анизотропной гладкостью, *Матем. заметки*, 1996, том 59, выпуск 6, 937–943

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1795>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 17:37:22

РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ ДВОЙНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ ДЛЯ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ С АНИЗОТРОПНОЙ ГЛАДКОСТЬЮ

М. И. Дьяченко

1. Введение. Всюду ниже будут рассматриваться 2π -периодические по каждой переменной функции двух переменных $f(x, y) \in C(T^2)$, где $T = [-\pi, \pi]$. Как обычно, положим $\|f\| = \sup_{(x,y) \in T^2} |f(x, y)|$ и пусть

$$\sum_{m,n \in \mathbb{Z}} a_{m,n} e^{imx} e^{iny} \quad (1)$$

– это двойной тригонометрический ряд Фурье функции $f(x, y)$.

Полным модулем непрерывности функции $f(x, y)$ будем называть выражение

$$\omega(f, \delta) = \sup_{|(h,t)| \leq \delta} \|f(x+h, y+t) - f(x, y)\|$$

при $\delta \in (0, 2\pi)$, частными модулями непрерывности по переменным x и y соответственно выражения

$$\omega_1(f, \delta) = \sup_{|h| \leq \delta} \|f(x+h, y) - f(x, y)\| \quad \text{и} \quad \omega_2(f, \delta) = \sup_{|t| \leq \delta} \|f(x, y+t) - f(x, y)\|$$

при $\delta \in (0, 2\pi)$ и, наконец, смешанным модулем непрерывности – выражение

$$\omega(f, \delta_1, \delta_2) = \sup_{|h| \leq \delta_1, |t| \leq \delta_2} \|f(x+h, y+t) - f(x+h, y) - f(x, y+t) + f(x, y)\|$$

при $\delta_1, \delta_2 \in (0, 2\pi)$. Через C ниже будут обозначаться положительные абсолютные постоянные, через $C(\omega)$ – положительные постоянные, зависящие лишь от ω и т.д. Если a – число, то через $\mathbf{a}$ будем обозначать двумерный вектор, обе координаты которого равны a .

Существует много различных определений сходимости двойных числовых рядов. Наиболее хорошо изучены сходимость по Прингсхейму, по квадратам и по кругам. Ситуация для двойных функциональных рядов и, в частности, для двойных рядов Фурье совершенно аналогичная. В настоящей статье речь будет идти только о равномерной сходимости ряда (1).

Отметим, что в статье [1] Л. В. Жижиашвили были установлены такие результаты (мы формулируем теоремы только для двумерного случая).

ТЕОРЕМА А. Если функция $f(x, y) \in C(T^2)$ и $\omega(f, \delta) = o((\ln(1/\delta))^{-2})$ при $\delta \rightarrow +0$, то ряд Фурье функции $f(x, y)$ равномерно сходится к ней.

Работа выполнена при финансовой поддержке Международного научного фонда, грант NSJ000.

ТЕОРЕМА Б. Существует функция $f(x, y) \in C(T^2)$, такая что $\omega(f, \delta) = O((\ln(1/\delta))^{-2})$ при $\delta \rightarrow +0$, но ряд Фурье функции $f(x, y)$ расходится по квадратам в метрике $C(T^2)$.

Что же касается сходимости по кругам, то здесь Ш. А. Алимовым и В. А. Ильиным [2] была доказана такая теорема.

ТЕОРЕМА В. Если функция $f(x, y) \in C(T^2)$ и $\omega(f, \delta) = O(\delta^{1/2})$ при $\delta \rightarrow +0$, то ряд Фурье функции $f(x, y)$ равномерно сходится по кругам. При этом условие $\omega(f, \delta) = O(\delta^{1/2-\varepsilon})$ при $\delta \rightarrow +0$, где некоторое $\varepsilon > 0$, уже не обеспечивает такой сходимости.

Уже из этих результатов видно, что теоремы для различных видов сходимости носят совершенно разный характер. В связи с этим представляет интерес нахождение условий, обеспечивающих равномерную сходимость ряда (1) в любом разумном смысле. Приведем соответствующие определения для числовых рядов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть ограниченное множество $U \subset \mathbb{Z}^2$. Тогда скажем, что $U \in A_3$, если из того, что точка $(k_1, k_2) \in U$ вытекает, что и весь целочисленный параллелепипед $[-|k_1|, |k_1|] \times [-|k_2|, |k_2|] \cap \mathbb{Z}^2 \subseteq U$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Будем говорить, что числовой ряд $\sum_{m,n \in \mathbb{Z}} a_{m,n}$ *и-сходится к числу* α , если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое N , что для любого множества $U \in A_3$, удовлетворяющего условию $\{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 : |(m, n)| \leq N\} \subseteq U$ имеем

$$\left| \sum_{(m,n) \in U} a_{m,n} - \alpha \right| < \varepsilon,$$

где $|(m, n)| = (m^2 + n^2)^{1/2}$.

Ясно, что если двойной числовой ряд *и-сходится*, то он сходится и по квадратам, и по Прингсхейму, и по кругам, и вообще в любом смысле из рассматривавшихся до сих пор. Необходимо отметить, что определение *и-сходимости* было введено Ф. Г. Арутюняном [3], [4] в связи с задачей представления функций кратными тригонометрическими рядами.

В статье [5] автором были установлены такие результаты (мы вновь приводим их только для двумерного случая и для непрерывных функций).

ТЕОРЕМА Г. Если функция $f(x, y) \in C(T^2)$ и $\omega(f, \delta) = o(\delta^{1/2})$ при $\delta \rightarrow +0$, то ряд Фурье функции $f(x, y)$ равномерно *и-сходится*.

ТЕОРЕМА Д. Существует функция $f(x, y) \in C(T^2)$ такая, что $\omega(f, \delta) = O(\delta^{1/2})$ при $\delta \rightarrow +0$, но ряд Фурье функции $f(x, y)$ *и-расходится всюду*.

Таким образом, видно, что в нашей ситуации сходимость по кругам является, в определенном смысле, одной из наихудших. В то же время ясно, что, например, условием теорем В и Г не удовлетворяет функция $f(x, y) \equiv f(x) \in \text{Lip}(1/3)$, а ее ряд Фурье очевидно *и-сходится*. Поэтому представляет интерес получение утверждения, аналогичного теореме Г, но выраженного в терминах частных и смешанного модулей непрерывности.

В данной статье будет установлен такой результат.

ТЕОРЕМА. Пусть функции $\omega_i(\delta)$, $i = 1, 2, 3, 4$, являются строго монотонными модулями непрерывности,

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \omega_i(\delta) \ln \frac{1}{\delta} = 0 \quad \text{при } i = 1, 2; \quad (2)$$

$$\int_0^\delta \frac{\omega_i(t)}{t} dt = O(\omega_i(\delta)) \quad \text{при } \delta \rightarrow +0 \quad \text{для } i = 3, 4; \quad (3)$$

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \frac{\omega_3(\delta)\omega_4(\delta)}{\delta^{1/2}} = 0, \quad (4)$$

а функция $f(x, y) \in C(T^2)$ такова, что $\omega_1(f, \delta) \leq C\omega_1(\delta)$, $\omega_2(f, \delta) \leq C\omega_2(\delta)$ и $\omega(f, \delta_1, \delta_2) \leq C\omega_3(\delta_1)\omega_4(\delta_2)$ при всех $\delta, \delta_1, \delta_2 \in (0, 2\pi)$.

Тогда двойной тригонометрический ряд Фурье функции $f(x, y)$ равномерно и-сходится.

История возникновения условия (3) и других сходных с ним условий подробно изложена в статье П. Л. Ульянова [6].

Заметим, что невозможность ослабления условия (2) в теореме следует из одномерных соображений, а условия (4) – из теоремы Д. Данная теорема может быть обобщена и на случай $p \in [1, \infty)$, $p \neq 2$, с использованием тех же соображений, что были применены автором в статье [5] при доказательстве теоремы Г.

Отметим также, что из приведенной выше теоремы вытекает, что если $f(x, y) = g(x)h(y)$, где $\omega(g, \delta) = o(\delta^{1/4})$, $\omega(h, \delta) = O(\delta^{1/4})$, то ряд Фурье функции $f(x, y)$ равномерно сходится по кругам. Вопрос об окончательности последнего утверждения остается открытым.

2. Доказательство теоремы. Нам понадобятся некоторые обозначения. Если $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$, то скажем, что $\mathbf{x} \geq \mathbf{y}$ ($\mathbf{x} > \mathbf{y}$), если $x_1 \geq y_1$ ($x_1 > y_1$) и $x_2 \geq y_2$ ($x_2 > y_2$).

Если функция $f(x, y) \in C(T^2)$ и $\nu = 0, 1, \dots$, то обозначим через $W(\nu, 1, f)(x, y)$ средние Валле-Пуссена ряда Фурье функции $f(x, y)$ по переменной x порядка 2^ν , т.е. $W(0, 1, f) = S_0(1, f)$ и

$$W(\nu, 1, f) = \frac{S_{2^{\nu-1}}(1, f) + \dots + S_{2^\nu-1}(1, f)}{2^{\nu-1}} = 2\sigma_{2^\nu-1}(1, f) - \sigma_{2^{\nu-1}-1}(1, f)$$

при $\nu > 0$, где

$$\sigma_r(1, f)(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_T f(x+t, y) K_r(t) dt,$$

а

$$K_r(\tau) = \frac{1}{r+1} \cdot \frac{\sin^2(r+1)\tau/2}{2\sin^2\tau/2}$$

– ядро Фейера. Аналогично определяются и $W(\nu, 2, f)$ – средние Валле-Пуссена по переменной y .

Далее, если $j = 1$ или $j = 2$, то положим $\Gamma(1, j, f) = W(0, j, f)$ и $\Gamma(r, j, f) = W(r-1, j, f) - W(r-2, j, f)$ при $r = 2, 3, \dots$. Если $\mathbf{n} = (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2 \cap [0, +\infty)^2$, то обозначим через

$$G(\mathbf{n}, f) = \Gamma(n_2, 2, \Gamma(n_1, 1, f))$$

и

$$B_{\mathbf{n}} = [2_-^{n_2-1}, 2^{n_2}] \times [2_-^{n_1-1}, 2^{n_1}],$$

где $2_-^\alpha = 2^\alpha$ при $\alpha \geq 0$ и $2_-^\alpha = 0$ при $\alpha < 0$.

Теперь, если $U \in A_3$, то положим

$$\tau_U = \tau_U(f, x, y) = \sum_{\mathbf{n}=(n_1, n_2) \geq \mathbf{1}: B_{\mathbf{n}-2} \cap U \neq \emptyset} G(\mathbf{n}, f)(x, y)$$

и

$$S_U(f) = S_U(f, x, y) = \sum_{\mathbf{k} \in U} a_{\mathbf{k}}(f) e^{i(k_1 x + k_2 y)},$$

где $\{a_{\mathbf{k}}(f)\}_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2}$ – это коэффициенты Фурье функции $f(x, y)$ по двойной тригонометрической системе.

ЛЕММА 1. При $\mathbf{k} \in U$ имеем $a_{\mathbf{k}}(\tau_U) = a_{\mathbf{k}}(f)$.

Это утверждение в более общей ситуации было доказано автором в статье [5].

СЛЕДСТВИЕ [5]. Если $U \in A_3$, то справедлива оценка

$$\|f - S_U(f)\| \leq \|f - \tau_U\| + \sum_{\mathbf{n} \geq \mathbf{1}: B_{\mathbf{n}-2} \cap U \neq \emptyset} \|G(\mathbf{n}, f) - S_U(G(\mathbf{n}, f))\|.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим, что если

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_T f(x, y) dy,$$

то $\omega(\varphi, \delta) \leq \omega_1(f, \delta) \leq \omega_1(\delta)$ при $\delta > 0$, а потому ряд Фурье функции $\varphi(x)$ равномерно сходится по признаку Дини–Липшица. Аналогично обстоит дело и для функции

$$\psi(y) = \frac{1}{2\pi} \int_T f(x, y) dx.$$

Поэтому, не ограничивая общности, мы будем считать в дальнейшем, что у функции $f(x, y)$ коэффициенты $a_{m, n} = 0$ при $\min(|m|, |n|) = 0$, т.е. что $G((1, k), f) \equiv 0$ и $G((k, 1), f) \equiv 0$ при всех k .

ЛЕММА 2. В предположениях теоремы справедлива оценка

$$\|G((n_1, n_2), f)\| \leq C(f) \omega_3(2^{-n_1}) \omega_4(2^{-n_2})$$

при $n_1 > 1$ и $n_2 > 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть при $n_1 > 1$ и $n_2 > 1$ $T(n_1, n_2, f)(x, y)$ – это функция, осуществляющая наилучшее приближение “углом” порядка $(2_-^{n_1-3}, 2_-^{n_2-3})$. Тогда по теореме М. К. Потанова [7]

$$\begin{aligned} \|G((n_1, n_2), f)\| &= \|G((n_1, n_2), f - T(n_1, n_2, f))\| \\ &\leq C\|f - T(n_1, n_2, f)\| \leq C(f) \omega_3(2^{-n_1}) \omega_4(2^{-n_2}), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

ЛЕММА 3. Пусть множество $U \in A_3$ и для некоторого $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2 \cap (0, +\infty)^2$ имеем

$$U \subseteq [-2^{n_1}, 2^{n_1}] \times [-2^{n_2}, 2^{n_2}].$$

Тогда норма оператора

$$\|S_U\|_{C \rightarrow C} \leq C 2^{\min(n_1, n_2)/2} (\max(n_1, n_2) - \min(n_1, n_2) + 1).$$

Данная лемма получена в [5] как непосредственное следствие из одного результата А. А. Юдина и В. А. Юдина [8].

Перейдем теперь непосредственно к доказательству теоремы. Пусть $U \in A_3$. Тогда по следствию и замечанию имеем

$$\|f - S_U(f)\| \leq \|f - \tau_U\| + \sum_{\mathbf{n} > \mathbf{1}: B_{\mathbf{n}-2} \cap U \neq \emptyset} \|G(\mathbf{n}, f) - S_U(G(\mathbf{n}, f))\|. \quad (5)$$

Пусть

$$F_U = \{\mathbf{n} = (n_1, n_2) > \mathbf{1} : B_{\mathbf{n}-2} \cap U \neq \emptyset\}$$

и

$$N = N(U) = \max\{r : (r, r) \in F_U\}.$$

Тогда (см. лемму 2 и прямую теорему теории приближений)

$$\begin{aligned} \|f - \tau_U\| &\leq \left\| f - \sum_{\mathbf{n}: \mathbf{n} \leq \mathbf{N}} G(\mathbf{n}, f) \right\| + \sum_{\mathbf{n} > \mathbf{1}: \max(n_1 - N, n_2 - N) > 0} \|G(\mathbf{n}, f)\| \\ &\leq \|f - W(N-1, 2, W(N-1, 1, f))\| \\ &\quad + C(f) \left(\sum_{n_1=N+1}^{\infty} \sum_{n_2=2}^{\infty} \omega_3(2^{-n_1}) \omega_4(2^{-n_2}) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n_1=2}^{\infty} \sum_{n_2=N+1}^{\infty} \omega_3(2^{-n_1}) \omega_4(2^{-n_2}) \right) \\ &\leq \|f - W(N-1, 2, W(N-1, 1, f))\| + C(f, \omega_4) \int_0^{2^{-N}} \frac{\omega_3(t)}{t} dt \\ &\quad + C(f, \omega_3) \int_0^{2^{-N}} \frac{\omega_4(t)}{t} dt \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (6)$$

при $N \rightarrow \infty$. Теперь рассмотрим

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{n} \in F_U} \|G(\mathbf{n}, f) - S_U(G(\mathbf{n}, f))\| &= \sum_{\mathbf{n} \in F_U: n_1 \leq n_2} \|G(\mathbf{n}, f) - S_U(G(\mathbf{n}, f))\| \\ &\quad + \sum_{\mathbf{n} \in F_U: n_2 < n_1} \|G(\mathbf{n}, f) - S_U(G(\mathbf{n}, f))\| = V_1 + V_2. \end{aligned} \quad (7)$$

Поскольку V_1 и V_2 оцениваются совершенно одинаково, оценим V_1 . Имеем (см. леммы 2 и 3)

$$\begin{aligned} V_1 &\leq \sum_{n_1=2}^N \sum_{n_2=\nu(n_1)}^{\mu(n_1)} \|G(\mathbf{n}, f)\| (1 + \|S_U\|_{C \rightarrow C}) \\ &\leq C(f) \sum_{n_1=2}^N \sum_{n_2=\nu(n_1)}^{\mu(n_1)} \omega_3(2^{-n_1}) \omega_4(2^{-n_2}) (n_2 - n_1 + 1) 2^{n_1/2}, \end{aligned} \quad (8)$$

где при любом n_1 имеем $\mu(n_1) \geq \nu(n_1) \geq n_1$ и $\nu(n_1) \geq N - 2$.

В статье Н. К. Бари и С. Б. Стечкина [9] было установлено, что для модулей непрерывности условие (3) эквивалентно существованию такого $C > 1$, что

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \frac{\omega(C\delta)}{\omega(\delta)} > 1.$$

Поэтому из условия теоремы вытекает, что для некоторого $C > 1$ имеем

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \frac{\omega_4(C\delta)}{\omega_4(\delta)} = \alpha > 1.$$

Но тогда

$$\frac{\omega_4(2^{k_0}\delta)}{\omega_4(\delta)} \geq \beta^{k_0} > 1$$

для некоторых k_0 и β при всех $\delta \in (0, 1)$. Поэтому

$$\begin{aligned} &\sum_{n_2=\nu(n_1)}^{\mu(n_1)} \omega_4(2^{-n_1}) (n_2 - n_1 + 1) \\ &\leq \beta^{k_0} \omega_4(2^{-\nu(n_1)}) (\nu(n_1) - n_1 + 1) \sum_{k=0}^{\infty} \beta^{-k} \frac{k + \nu(n_1) - n_1 + 1}{\nu(n_1) - n_1 + 1} \\ &\leq \beta^{k_0} \omega_4(2^{-\nu(n_1)}) (\nu(n_1) - n_1 + 1) \sum_{k=0}^{\infty} \beta^{-k} (k + 1) \\ &= C(\omega_4) \omega_4(2^{-\nu(n_1)}) (\nu(n_1) - n_1 + 1) \\ &\leq C(\omega_4) \omega_4(2^{-N}) (N - n_1 + 1) \beta^{-(\nu(n_1) - N)} \left(1 + \frac{\nu(n_1) - N}{N - n_1 + 1}\right) \\ &\leq C(\omega_4) \omega_4(2^{-N}) (N - n_1 + 1). \end{aligned} \quad (9)$$

Отсюда (см. (8) и (9))

$$V_1 \leq C(f, \omega_4) \omega_4(2^{-N}) \sum_{n=2}^N \omega_3(2^{-n}) 2^{n/2} (N - n + 1). \quad (10)$$

Отметим, что в статье Н. К. Бари и С. Б. Стечкина [9] было также доказано, что из условия (3) вытекает существование такого $\gamma \in (0, 1)$, что функция $t^{-\gamma}\omega_4(t)$ почти возрастает, т.е. существует такое $R > 0$, что если $x < y$, то

$$\frac{\omega_4(x)}{x^\gamma} \leq R \frac{\omega_4(y)}{y^\gamma}.$$

Пусть теперь задано некоторое $\varepsilon > 0$. Фиксируем k так, что (см. (4))

$$\omega_3(2^{-n})\omega_4(2^{-n}) \leq \frac{\varepsilon}{2C(f, \omega_4)RD + 1} 2^{-n/2} \quad (11)$$

при $n > k$, где

$$D = \sum_{r=0}^{\infty} 2^{-r\gamma}(r+1).$$

Заметим, что для достаточно больших N имеем

$$C(f, \omega_4)\omega_4(2^{-N}) \sum_{n=2}^k \omega_3(2^{-n})2^{n/2}(N-n+1) < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (12)$$

Наконец (см. (11)),

$$\begin{aligned} & C(f, \omega_4)\omega_4(2^{-N}) \sum_{n=k+1}^N \omega_3(2^{-n})2^{n/2}(N-n+1) \\ &= C(f, \omega_4)2^{-N\gamma}\omega_4(2^{-N})2^{N\gamma} \sum_{n=k+1}^N \omega_3(2^{-n})2^{n/2}(N-n+1) \\ &\leq C(f, \omega_4)2^{-N\gamma}R \sum_{n=k+1}^N \omega_3(2^{-n})\omega_4(2^{-n})2^{n(1/2+\gamma)}(N-n+1) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2D}2^{-N\gamma} \sum_{n=k+1}^N 2^{n\gamma}(N-n+1) \leq \frac{\varepsilon}{2D} \sum_{r=0}^{\infty} 2^{-r\gamma}(r+1) = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned} \quad (13)$$

Из формул (10), (12) и (13) вытекает, что при достаточно больших N имеем $V_1 < \varepsilon$. Поскольку V_2 оценивается аналогично, из формул (5)–(7) следует утверждение теоремы.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: mid@nw.math.msu.su

Поступило
28.03.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жижиашвили Л. В. // УМН. 1973. Т. 28. № 2. С. 65–119.
2. Алимов Ш. А., Ильин В. А. // Дифференц. уравнения. 1971. Т. 7. № 4. С. 670–710.
3. Арутюнян Ф. Г. // Докл. АН АрмССР. 1977. Т. 64. № 2. С. 72–76.
4. Арутюнян Ф. Г. // Матем. сб. 1985. Т. 126. № 2. С. 267–285.
5. Дьяченко М. И. // Изв. РАН. Сер. матем. 1995. Т. 59. № 2. С. 128–142.
6. Ульянов П. Л. // Докл. РАН. 1993. Т. 333. № 2. С. 157–160.
7. Потапов М. К. // Тр. МИАН. 1972. Т. 117. С. 256–291.
8. Юдин А. А., Юдин В. А. // Матем. заметки. 1977. Т. 22. № 3. С. 381–394.
9. Бари Н. К., Стечкин С. Б. // Тр. ММО. 1956. Т. 5. С. 485–522.