Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. М. Мовсисян, Сверхтождества в многообразии решеток, *Матем. заметки*, 1996, том 59, выпуск 6, 944–946

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1796>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 10:21:40

СВЕРХТОЖДЕСТВА В МНОГООБРАЗИИ РЕШЕТОК

Ю. М. Мовсисян

Сверхтождество (или $\forall(\forall)$ -тождество) – формула из языка второго порядка (ступени) [1], [2] вида

$$\forall X_1, \dots, X_m \quad \forall x_1, \dots, x_n \quad (w_1 = w_2),$$

где $X_1, \dots, X_m$ – функциональные переменные, а $x_1, \dots, x_n$ – предметные переменные в термах (словах) w_1, w_2 . Число m называется функциональным рангом, а число n – предметным рангом сверттождества.

Сверхтождество кратко записывается без кванторной приставки: $w_1 = w_2$. Выполнимость (истинность) этих формул второго порядка в алгебрах понимается с ограниченными (специализированными) функциональными кванторами: в алгебре $\mathfrak{A} = \langle Q; \Sigma \rangle$ выполняется сверттождество

$$w_1 = w_2, \quad (*)$$

если равенство $(*)$ справедливо, когда в нем каждая предметная переменная и каждая функциональная переменная заменяются соответственно любым элементом из Q и любой операцией, соответствующей ариности из Σ ; предполагается возможность такой замены, т.е.

$$\{|X_1|, \dots, |X_m|\} \subseteq \{|A| \mid A \in \Sigma\} = T_{\mathfrak{A}},$$

где $|S|$ – ариность S .

Сверхтождество $w_1 = w_2$ называется *сверхтождеством алгебры* $\mathfrak{A}$ (*многообразия* V), если оно выполняется в алгебре $\mathfrak{A}$ (в любой алгебре $\mathfrak{A} \in V$).

Алгебра $\mathfrak{A} = \langle Q; \Sigma \rangle$ называется *алгеброй с арифметическим типом* $T \subseteq N$ или *T -алгеброй*, если $T = T_{\mathfrak{A}}$. Сверхтождество называется *T -сверхтождеством*, если ариность каждой его функциональной переменной содержится в T .

Указанная семантика согласована с гомоморфизмами T -алгебр [3], [4], определяемых как пары $(\varphi, \tilde{\psi})$ отображений с условием

$$\varphi A(x_1, \dots, x_n) = [\tilde{\psi}(A)](\varphi x_1, \dots, \varphi x_n).$$

T -сверхтождество $w_1 = w_2$ называется *следствием системы T -сверхтождеств* $\mathcal{L}$, если всякий раз, когда любое сверттождество из $\mathcal{L}$ выполняется в одной и той же T -алгебре, то и T -сверхтождество $w_1 = w_2$ выполняется в ней, т.е. для любой T -алгебры $\mathfrak{A}$

$$\mathfrak{A} \models \mathcal{L} \rightarrow \mathfrak{A} \models (w_1 = w_2)$$

(запись $\mathfrak{A} \models \mathcal{L}$ означает выполнимость любого сверттождества из $\mathcal{L}$ в алгебре $\mathfrak{A}$).

Перейдем к понятию формального следствия системы T -сверхтождеств $\mathcal{L}$.

- (i) Любое T -сверхтождество вида $w = w$ и любое T -сверхтождество из $\mathcal{L}$ являются формальными следствиями $\mathcal{L}$.
- (ii) Если T -сверхтождество $w_1 = w_2$ является формальным следствием $\mathcal{L}$, то и T -сверхтождество $w_2 = w_1$ является формальным следствием $\mathcal{L}$.

- (iii) Если T -сверхтождества $w_1 = w_2$ и $w_2 = w_3$ являются формальными следствиями $\mathcal{L}$, то и T -сверхтождество $w_1 = w_3$ является формальным следствием $\mathcal{L}$.
- (iv) Если T -сверхтождество $u_i = v_i$ является формальным следствием $\mathcal{L}$ для $i = 1, \dots, n$, тогда для любого n -арного функционального переменного Y (где $n \in T$) T -сверхтождество

$$Y(u_1, \dots, u_n) = Y(v_1, \dots, v_n)$$

также является формальным следствием $\mathcal{L}$.

- (v) Если T -сверхтождество $w_1 = w_2$ является формальным следствием $\mathcal{L}$, то и T -сверхтождество $w'_1 = w'_2$ является формальным следствием $\mathcal{L}$, причем w'_1 и w'_2 получаются соответственно из w_1 и w_2 заменой всех вхождений произвольного функционального переменного X (предметного переменного x) на любое функциональное переменное Z той же аргности (соответственно на любое T -слово ω).

T -сверхтождество $w_1 = w_2$ называется *формальным следствием системы T -сверхтождеств $\mathcal{L}$* , если оно является формальным следствием $\mathcal{L}$ согласно (i)–(v).

ТЕОРЕМА А (о полноте для сверхтождеств). *T -сверхтождество $w_1 = w_2$ является следствием системы T -сверхтождеств $\mathcal{L}$ тогда и только тогда, когда оно является формальным следствием $\mathcal{L}$ [3], [4].*

Сверхтождество $w_1 = w_2$ называется полиномиальным сверхтождеством алгебры $\mathfrak{A}$ (многообразия V), если оно выполняется в полиномиальной алгебре $P(\mathfrak{A})$ алгебры $\mathfrak{A}$ (для любой алгебры $\mathfrak{A} \in V$).

Сверхтождество $w_1 = w_2$ называется полиномиальным следствием системы сверхтождеств $\mathcal{L}$, если для любой алгебры $\mathfrak{A}$

$$P(\mathfrak{A}) \models \mathcal{L} \rightarrow P(\mathfrak{A}) \models (w_1 = w_2),$$

где $P(\mathfrak{A})$ – полиномиальная алгебра алгебры $\mathfrak{A}$. Перейдем к понятию формального полиномиального следствия системы $\mathbb{N}$ -сверхтождеств $\mathcal{L}$.

- (i') Совпадает с (i) при $T = \mathbb{N}$.
- (ii') Совпадает с (ii) при $T = \mathbb{N}$.
- (iii') Совпадает с (iii) при $T = \mathbb{N}$.
- (iv') Совпадает с (iv) при $T = \mathbb{N}$.
- (v') Совпадает с (v) при $T = \mathbb{N}$.
- (vi') Если $\mathbb{N}$ -сверхтождество $w_1 = w_2$ является формальным полиномиальным следствием $\mathcal{L}$, то и $\mathbb{N}$ -сверхтождество $w''_1 = w''_2$ является формальным полиномиальным следствием $\mathcal{L}$, причем w''_1 и w''_2 получаются соответственно из w_1 и w_2 заменой всех вхождений произвольного функционального переменного X на произвольный терм той же аргности.

$\mathbb{N}$ -сверхтождество $w_1 = w_2$ называется *формальным полиномиальным следствием системы $\mathbb{N}$ -сверхтождеств $\mathcal{L}$* , если оно является формальным полиномиальным следствием $\mathcal{L}$ согласно (i')–(vi').

ТЕОРЕМА В (о полноте для полиномиальных сверхтождеств). *N-сверхтождество $w_1 = w_2$ является полиномиальным следствием системы N-сверхтождеств $\mathcal{L}$ тогда и только тогда, когда оно является формальным полиномиальным следствием $\mathcal{L}$.*

Для характеристики сверхтождеств в многообразиях решеток, модулярных решеток и дистрибутивных решеток рассмотрим следующие сверхтождества:

$$X(x, x) = x, \quad (1)$$

$$X(x, y) = X(y, x), \quad (2)$$

$$X(x, X(y, z)) = X(X(x, y), z), \quad (3)$$

$$X(Y(X(x, y), z), Y(y, z)) = Y(X(x, y), z), \quad (4)$$

$$X(Y(X(x, Y(y, z)), Y(y, z)) = Y(X(x, Y(y, z)), X(y, z)), \quad (5)$$

$$X(x, Y(y, z)) = Y(X(x, y), X(x, z)), \quad (6)$$

$$X(u, X(x, X(y, v))) = X(u, X(y, X(x, v))), \quad (7)$$

$$X(Y(Y(y, x), z), Y(u, v)) = X(Y(Y(y, x), z), X(Y(Y(u, x), v), Y(u, v))), \quad (8)$$

$$X(Y(Y(y, x), z), Y(u, x)) = X(Y(Y(y, x), z), X(Y(Y(y, z), x), Y(u, x))). \quad (9)$$

ТЕОРЕМА 1. *Любое сверхтождество многообразия решеток является следствием сверхтождеств (1)–(4).*

ТЕОРЕМА 2. *Любое сверхтождество многообразия модулярных решеток является следствием сверхтождеств (1)–(5).*

ТЕОРЕМА 3. *Любое сверхтождество многообразия дистрибутивных решеток является следствием сверхтождеств (1)–(3), (6).*

ТЕОРЕМА 4. *Любое полиномиальное сверхтождество с двумя бинарными функциональными переменными многообразия дистрибутивных решеток является полиномиальным следствием сверхтождеств (1), (3), (6)–(9).*

ТЕОРЕМА 5. *Существует такой конечный базис сверхтождеств многообразия булевых алгебр, для сверхтождеств которого функциональные и предметные ранги не больше 3.*

Характеризуются алгебры, удовлетворяющие сверхтождествам многообразий решеток, многообразия булевых алгебр.

Ереванский государственный университет

Поступило
28.12.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чёрч А. Введение в математическую логику. Т. 1. М.: ИЛ, 1961.
2. Мальцев А. И. Алгебраические системы. М.: Наука, 1970.
3. Мовсисян Ю. М. Введение в теорию алгебр со сверхтождествами. Ереван: Изд-во ЕГУ, 1986.
4. Мовсисян Ю. М. Сверхтождества и сверхмногообразия в алгебрах. Ереван: Изд-во ЕГУ, 1990.