Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Токарев, Контрпримеры к формуле Троттера в локально выпуклых пространствах, *Матем. заметки*, 1996, том 59, выпуск 6, 947–950

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1797>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 13:37:35

КОНТРИМПРИМЕРЫ К ФОРМУЛЕ ТРОТТЕРА В ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

А. Г. Токарев

Определения и терминология. Всюду ниже $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$; $\mathbb{R}^\infty$ – счетное произведение прямых; $\mathbb{R}^{(\infty)}$ – векторное пространство финитных последовательностей вещественных чисел; $\{e_i\}_{i=1}^\infty$ – стандартный базис в $\mathbb{R}^{(\infty)}$; $\|x\| = |x_1| + \dots + |x_n|$ – норма в $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$; J_m означает $m \times m$ -матрицу, у которой под главной диагональю единицы, а остальные элементы равны нулю, J_m^T транспонирована к J_m ; $L_1 \oplus L_2$ – сумма локально выпуклых пространств L_1 и L_2 , а $L_1 \times L_2$ – их произведение.

Если E – локально выпуклое пространство (ЛВП), то $\mathcal{L}(E)$ – пространство непрерывных линейных отображений из E в E с топологией поточечной сходимости, в $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ введена норма $\|\cdot\|$, индуцированная нормой из $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$; $\langle v_\alpha \mid \alpha \in I \rangle$ – подпространство в E , порожденное векторами $\{v_\alpha\}_{\alpha \in I}$; $\overline{A}$ – непрерывное линейное продолжение $A \in \mathcal{L}(E)$ на пополнение E .

Если A_n ($n = 1, 2, \dots$) – семейство конечномерных линейных отображений $A_n \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{k_n})$, то $D(A_n) = \langle e_i \mid s_{n-1} < i \leq s_n \rangle$, где $s_n = \sum_{i=1}^n k_i$, $s_0 = 0$. Будем отождествлять $D(A_n)$ и $\mathbb{R}^{k_n}$ посредством отображения, ставящего вектору $e_{s_{n-1}+i}$, $1 \leq i \leq k_n$, в соответствие орт в $\mathbb{R}^{k_n}$ с единицей на i -м месте (это дает возможность считать, что каждый A_n определен также и на $D(A_n)$). При этом базис $e_{s_{n-1}+i}$, $1 \leq i \leq k_n$, в $D(A_n)$ позволяет определять A_n с помощью матрицы.

Прямой суммой конечномерных операторов A_n ($n = 1, 2, \dots$) назовем линейное отображение $A = \bigoplus_{n=1}^\infty A_n$ из $\mathbb{R}^{(\infty)}$ в $\mathbb{R}^{(\infty)}$, которое совпадает с A_n при сужении на $D(A_n)$; положим $\exp(A) = \bigoplus_{n=1}^\infty \exp(A_n)$.

Обозначим через S_m , $m \in \mathbb{N}$, множество прямых сумм $A = \bigoplus_{i=1}^\infty A_i$, $A_i \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{k_i})$, таких, что $C(A) = \sup_i \|A_i\| < \infty$ и $k_i \leq m$ для всех $i \in \mathbb{N}$.

Если E – ЛВП, то аналогично [1], будем обозначать символом $\text{unex}(E)$ множество отображений $A \in \mathcal{L}(E)$, таких что задача Коши для уравнения

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x_0 \tag{1}$$

однозначно разрешима на полупрямой $t \geq 0$ для всякого $x_0 \in E$. Например, $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \in \text{unex}(\mathbb{R}^n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Если $A \in \text{unex}(E)$ и $G_A(t, x_0)$ значение решения (1) в точке $t \geq 0$, то определим отображение $\exp(tA)$ из E в E так: $\exp(tA)x = G_A(t, x)$, $x \in E$.

Будем говорить, что в ЛВП E справедлива формула Троттера (называемая также формулой Далеккого–Троттера), если каковы бы ни были непрерывные отображения A, B из E в E , такие что $A, B, A + B \in \text{unex}(E)$, справедливо равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(e^{\frac{t}{n}A} e^{\frac{t}{n}B} \right)^n x = e^{t(A+B)} x \tag{2}$$

для всех $x \in E$ (ср. [2]).

Предварительные результаты. Сформулируем и докажем две леммы.

ЛЕММА 1. Пусть $m \in \mathbb{N}$ и топология в $\mathbb{R}^{(\infty)}$ задана семейством преднорм $\{p_\alpha\}_{\alpha \in I}$, так что для всякого $\alpha \in I$ существует $\beta \in I$, такое что для любого $A = \bigoplus_{i=1}^\infty A_i \in S_m$

$$p_\alpha(Ax) \leq C(A)p_\beta(x), \quad x \in \mathbb{R}^{(\infty)}.$$

Тогда $S_m \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^{(\infty)})$ и если $A = \bigoplus_{i=1}^\infty A_i \in S_m$, то $\overline{A} \in \text{unex}(E)$ и $\exp(t\overline{A}) = \overline{\exp(tA)}$, где E пополнение $\mathbb{R}^{(\infty)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. То, что $S_m \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^{(\infty)})$ очевидно.

Для всех $t \geq 0$ положим $x(t) = \overline{\exp(tA)}x_0$, $x(0) = x_0$. Убедимся, что $x(\cdot)$ — решение (1) для $\overline{A}$. Очевидно, это так, когда $x_0 \in \mathbb{R}^{(\infty)}$.

Если $x_0^k \rightarrow x_0$ при $k \rightarrow \infty$, где $x_0^k \in \mathbb{R}^{(\infty)}$, $x_0 \in E$, то $x^k(t) \rightarrow x(t)$ при $k \rightarrow \infty$, где $x_0^k(t) = \exp(tA)x_0^k$, так как $\exp(tA) \in \mathcal{L}(E)$.

Покажем, что

$$\lim_{h \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x^k(t+h) - x^k(t)}{h} = \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^k(t+h) - x^k(t)}{h}.$$

Для этого достаточно доказать (см. [3, с. 39–42]), что для всякого $\alpha \in I$

$$\begin{aligned} p_\alpha \left(\frac{x^k(t+h) - x^k(t)}{h} - \dot{x}^k(t) \right) &= p_\alpha \left(\left(\frac{e^{hA} - 1}{h} - A \right) e^{tA} x_0^k \right) \\ &\leq e^{tC(A)} p_\beta(x_0^k) \sup_i \left\| \frac{e^{hA_i} - 1}{h} - A_i \right\| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $h \rightarrow 0$ равномерно по $k = 1, 2, \dots$, но это так, поскольку $\{p_\beta(x_0^k)\}_{k=1}^\infty$ ограничено, а $A_i \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{k_i})$, $k_i \leq m$, и $\|A_i\| \leq C$, $i = 1, 2, \dots$.

В итоге

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} = \lim_{k \rightarrow \infty} \dot{x}^k(t) = \overline{A}x(t).$$

Если pr_i — проектор в E на $D(A_i)$ вдоль $D(A_j)$, $j \neq i$, то $\text{pr}_i(x(\cdot))$ решение (1) для $\overline{A_i}$ с данными Коши $\text{pr}_i(x_0)$, когда $x(\cdot)$ — решение (1) для $\overline{A}$ и $x(0) = x_0$, поскольку $\overline{A}(D(A_j)) \subset D(A_j)$, $j \in \mathbb{N}$. Это влечет единственность. Лемма доказана.

Определим в $\mathbb{R}^{(\infty)}$ отображения A_0, B_0, C_0 следующим образом: $A_0 = \bigoplus_{i=1}^\infty A_i$; $B_0 = \bigoplus_{i=1}^\infty B_i$, где $A_{2i} = -J_2$; $A_{2i+1} = J_2$ ($i = 1, 2, \dots$), A_1 — нулевая матрица размерности 1, $B_i = J_4$ ($i = 1, 2, \dots$); $C_0 = A_0 + B_0$. Ясно, что $A_0, B_0, C_0 \in S_4$.

ЛЕММА 2. Для любого $n \in \mathbb{N}$ и всех $t > 0$

$$v_n = \left(e^{\frac{t}{n}A_0} e^{\frac{t}{n}B_0} \right)^n e_1 \in U_{4n} + \frac{t^{4n}}{n^{4n}} \frac{1}{3!} e_{4n+1},$$

где $U_m = \langle e_i \mid 1 \leq i \leq m \rangle$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя явный вид $\exp(J_m)$ и инвариантность U_3 относительно A_0 , имеем

$$e^{\frac{t}{n}A_0} e^{\frac{t}{n}B_0} e_1 \in e^{\frac{t}{n}A_0} \left(U_3 + \frac{t^3}{n^3} \frac{1}{3!} e_4 \right) \subset U_4 + \frac{t^4}{n^4} \frac{1}{3!} e_5.$$

Повторяя те же рассуждения еще $n - 1$ раз придем к необходимому результату. Лемма доказана.

Бесконечные топологические суммы.

ПРИМЕР 1. Обозначим через E_1 векторное пространство $\mathbb{R}^{(\infty)}$, наделенное топологией суммы подпространств, порожденных векторами e_i , $i = 1, 2, \dots$. Тогда $A_0, B_0, C_0 = A_0 + B_0 \in \text{unex}(E_1)$, но не удовлетворяют формуле Троттера.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. То, что $A_0, B_0, C_0 \in \text{unex}(E_1)$ вытекает из леммы 1, так как они удовлетворяют ее условиям.

Из леммы 2 следует, что левая часть (2) расходится в точке e_1 поскольку v_n ($n = 1, 2, \dots$) не образуют последовательность Коши в E_1 .

СЛЕДСТВИЕ 1. Для любой бесконечной топологической суммы E локально выпуклых пространств найдутся отображения, удовлетворяющие утверждению примера 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим E в виде $E = L \oplus E_0$, где L содержит счетное число слагаемых L_i ($i = 1, 2, \dots$), входящих в E , а E_0 — все остальные. Раскладывая каждое L_i в сумму $L_i = L_i^1 \oplus L_i^2$, где размерность L_i^1 равна 1, и пользуясь тем, что $\bigoplus_{i=1}^{\infty} L_i^1 = E_1$, получим $E = E_1 \oplus L^2 \oplus E_0$, где $L^2 = \bigoplus_{i=1}^{\infty} L_i^2$.

Продолжая отображения A_0, B_0 и C_0 из примера 1 нулем на $L^2 \oplus E_0$, получим нужные примеры.

Пространства Фреше. Теперь определим в $\mathbb{R}^{(\infty)}$ топологию с помощью семейства норм

$$p_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| e^{(n+k)^2}, \quad k = 1, 2, \dots; \quad x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n.$$

Проверим, что оно удовлетворяет условиям леммы 1.

Если $T = \bigoplus_{i=1}^{\infty} T_i \in S_m$, $m \in \mathbb{N}$, то через pr_i обозначим проектор в $\mathbb{R}^{\infty}$ на $D(T_i)$, вдоль $D(T_j)$, $j \neq i$, определим последовательность $\{s_i\}_{i=1}^{\infty}$ условием $D(T_i) = \langle e_n \mid s_{i-1} < n \leq s_i \rangle$, $s_0 = 0$, имеем $s_i - s_{i-1} \leq m$.

Положим $y = Tx$, тогда

$$\begin{aligned} p_k(y) &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \|\text{pr}_i(y)\| e^{(s_i+k)^2} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \|T_i \text{pr}_i(x)\| e^{(s_i+k)^2} \\ &\leq C(T) \sum_{i=1}^{\infty} \|\text{pr}_i(x)\| e^{(s_i+k)^2} \leq C(T) p_{k+m}(x). \end{aligned}$$

ПРИМЕР 2. Пусть F — пополнение $\mathbb{R}^{(\infty)}$ в топологии, описанной выше. Тогда F — ядерное пространство Фреше с непрерывной нормой (см. [1, с. 102]) и $\overline{A_0}, \overline{B_0}, \overline{C_0} = \overline{A_0 + B_0} \in \text{unex}(F)$ но для них не справедлива формула Троттера.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. То, что $\overline{A_0}, \overline{B_0}, \overline{C_0} \in \text{unex}(F)$ следует из леммы 1.

Чтобы доказать вторую часть утверждения покажем, что последовательность v_n ($n = 1, 2, \dots$) из леммы 2 расходится в F при $t > 0$.

Действительно, в силу того, что

$$v_n \in U_{4n} + \frac{t^{4n}}{n^{4n}} \cdot \frac{1}{(3!)^n} e_{4n+1}$$

и так как

$$\ln \left[\frac{t^{4n}}{n^{4n}} \cdot \frac{1}{(3!)^n} \right] \geq -Mn - Nn^{3/2},$$

где $M, N \in \mathbb{R}$ – зависящие от $t > 0$ постоянные, имеем

$$p_k(v_n) \geq p_k \left(\frac{t^{4n}}{n^{4n}} \cdot \frac{1}{(3!)^n} e_{4n+1} \right) \geq e^{-n(M+N\sqrt{n})+(4n+1+k)^2}.$$

И, значит, $\{v_n\}_{n=1}^\infty$ не фундаментальна в F , так как $p_k(v_n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Положим $A = \bigoplus_{i=1}^\infty A_i$, $B = \bigoplus_{i=1}^\infty B_i$, где $A_i = J_4^T$ ($i = 1, 2, \dots$); $B_1 = 0$, $D(B_1) = \langle e_1 \rangle$, $B_{2i} = -J_2^T$, $B_{2i+1} = J_2^T$ ($i = 1, 2, \dots$); $C = A + B$. Имеем $A, B, C \in S_4$.

ПРИМЕР 3. Поскольку $\mathbb{R}^{(\infty)}$ в топологии покоординатной сходимости удовлетворяет условиям леммы 1 и его пополнением является $\mathbb{R}^\infty$, то для отображений определенных выше имеем $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C} \in \text{unex}(\mathbb{R}^\infty)$, но $\overline{A}$ и $\overline{B}$ не удовлетворяют формуле Троттера.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $x_0 = (a_1, \dots)$, $w_n = (\exp(\frac{t}{n}\overline{A}) \exp(\frac{t}{n}\overline{B}))^n x_0$, $w_n = (w_n^1, w_n^2, \dots)$. Прямые вычисления с использованием явного вида $\exp(\frac{t}{n}J_m^T)$ дают $w_n^1 = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_{4n+1} a_{4n+1}$, где $\lambda_{4n+1} \neq 0$. Поэтому выбирая a_{4n+1} так, чтобы $w_n^1 \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, получим, что левая часть (2) расходится в точке x_0 .

СЛЕДСТВИЕ 2. Для всякого бесконечного произведения E локально выпуклых пространств существуют отображения, для которых формула Троттера не справедлива.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим E в виде $E = L \times E_0$, где L содержит счетное число множителей L_i , $i = 1, 2, \dots$, входящих в E , а E_0 – остальные. Раскладывая каждое L_i в сумму $L_i = L_i^1 \oplus L_i^2$, где размерность L_i равна 1, и пользуясь тем, что $\times_{i=1}^\infty L_i^1 = \mathbb{R}^\infty$, получим $E = \mathbb{R}^\infty \times L^2 \times E_0$, где $L^2 = \times_{i=1}^\infty L_i^2$.

Продолжая отображения из примера 3 нулем на $L^2 \times E_0$, получим нужные примеры.

В заключение отметим, что существуют неметризуемые локально выпуклые пространства, в которых формула Троттера справедлива.

ПРИМЕР 4. Пусть B – бесконечномерное банахово пространство и B_σ обозначает векторное пространство B , наделенное слабой топологией. Поскольку $\mathcal{L}(B_\sigma) = \mathcal{L}(B)$ (см. [4, с. 201]) и формула Троттера справедлива в банаховых пространствах [2], она будет справедлива и в B_σ .

Автор благодарит О. Г. Смолянова за постановку задачи и осуществление научного руководства этой работой.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
04.10.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лобанов С. Г., Смолянов О. Г. // УМН. 1994. Т. 49. № 3. С. 93–168.
2. Chernoff P. R. // J. Funct. Anal. 1968. V. 2. P. 238–242.
3. Смолянов О. Г. Анализ на топологических линейных пространствах и его приложения. М.: Изд-во МГУ, 1979.
4. Шефер Х. Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1971.