Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Борисенко, О компактных подмногообразиях неположительной внешней кривизны в римановом пространстве, *Матем. заметки*, 1996, том 60, выпуск 1, 3–10

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1798>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 13:27:16

О КОМПАКТНЫХ ПОДМНОГООБРАЗИЯХ НЕПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ВНЕШНЕЙ КРИВИЗНЫ В РИМАНОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

А. А. Борисенко

В работе [1] были доказаны теоремы, в которых выясняется, когда компактные поверхности неположительной внешней кривизны в римановом пространстве являются вполне геодезическими подмногообразиями, изометричными стандартной сфере и когда объемлющее пространство изометрично стандартной сфере.

Однако, в этих теоремах существенно использовалось, что в точках поверхности F^l для объемлющего риманова многообразия M^{l+p} должно выполняться условие

$$R(x, y)\xi = 0, \quad (1)$$

где x, y – произвольные касательные векторы к подмногообразию F^l , ξ – нормальный вектор, R – оператор кривизны для M^{l+p} .

Мы докажем аналог этих теорем без требования (1), но с более сильными ограничениями на коразмерность.

Пусть $\rho(l-p) - 1$ – максимальное число непрерывных линейно независимых в каждой точке векторных полей на сфере S^{l-p}

$$\begin{aligned} \nu(l) &= \max\{t, t < \rho(l-t)\}, \\ \nu(l) &< 2\log_2(l) + 1, \quad \nu(2^b) = 0. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть F^l – компактная поверхность в полном римановом пространстве M^{l+p} , секционная кривизна которого удовлетворяет неравенству $\gamma_{2/M} \geq 1$.

Пусть для поверхности выполняются одно из следующих условий:

- 1) $\gamma_{2/F} \leq 1, p \leq -3/4 + \sqrt{9/16 + l/2}$;
- 2) $0 < \gamma_{2/F} \leq 1, p < -1/2 + \sqrt{1/4 + l - \nu(l)}$.

Тогда поверхность есть вполне геодезическое подмногообразие, локально изометричное единичной сфере.

Полнота объемлющего пространства используется только в случае 1). Если F^l односвязно, то поверхность глобально изометрична единичной сфере.

В теореме 4 работы [1] при выполнении условия 4 теорема сформулирована неточно. Из него только следует, что поверхность будет изометрична единичной сфере, но еще не следует вполне геодезичность.

При более строгих ограничениях на кривизну M^{l+p} мы получим

ТЕОРЕМА 2. *Пусть F^l есть компактная поверхность в полном односвязном римановом пространстве M^{l+p} . Если*

$$\frac{9}{4} \geq \gamma_{2/M} \geq 1, \quad \gamma_{2/F} \leq 1, \quad p < \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + l - 1},$$

то риманово многообразие M^{l+p} глобально изометрично единичной сфере.

Из теорем 1, 2 непосредственно следует

ТЕОРЕМА 3. *Пусть F^l есть компактная поверхность в полном односвязном римановом пространстве M^{l+p} , кривизна которого удовлетворяет неравенству $9/4 \geq \gamma_2(M) \geq 1$. Если выполняется одно из условий теоремы 1, то объемлющее пространство глобально изометрично единичной сфере, и поверхность есть вполне геодезическая большая сфера.*

Если выполняются условия теоремы 2, то утверждение теоремы 3 справедливо при $l \geq 19$.

Внешний нуль-индекс $\nu(Q)$ точки $Q \in F^l$ — это максимальная размерность нулевого подпространства $L(Q) \subset T_Q F^l$ такого, что для любого $y \in L(Q)$ выполняется равенство

$$A(Q, n)y = 0$$

для каждой нормали n в точке Q , где $A(Q, n)$ — матрица второй квадратичной формы F^l относительно нормали n ; $\nu^*(Q)$ есть минимальный нуль-индекс среди точек близких Q , $\nu^*(Q) \leq \nu(Q)$.

Для поверхностей неположительной внешней кривизны, т.е. для которых

$$\gamma_{2/F^l} - \gamma_{2/M^{l+p}} \leq 0,$$

имеет место оценка нуль-индекса ν для поверхностей неположительной внешней кривизны.

ЛЕММА 1 [2]. *Справедливо неравенство*

$$\nu \geq l - p(p + 1).$$

Пусть индексы меняются в следующих пределах:

$$\begin{aligned} a, b, c &= 1, \dots, \nu, & i, j, k &= 1, \dots, l, \\ A, B, C, D &= 1, \dots, l + p, & \alpha, \beta, \gamma, \sigma &= l + 1, \dots, l + p. \end{aligned}$$

ЛЕММА 2. *Пусть в точке Q риманова многообразия M^{l+p} секционная кривизна достигает максимального значения k на площадках σ , проходящих через вектор $x \in L(Q)$, и любой вектор $y \in T_Q^l$, $L(Q) \subset T_Q^l \subset T_Q M^{l+p}$, где $L(Q), T_Q^l$ – подпространства касательного пространства $T_Q M^{l+p}$.*

Тогда

- 1) $(R(x, y)y)^\perp = 0$, где $x \in L(Q)$, $y \in T_Q^l$, $R(x, y)$ – оператор кривизны многообразия M^{l+p} , $\perp$ – ортогональная проекция на подпространство, ортогональное T_Q^l ;
- 2) $R(x, y)x = -k\langle x, x \rangle y$, где $x \in L(Q)$, $y \in L^\perp(Q) \subset T_Q^l$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Секционная кривизна M^{l+p} в точке Q в направлении векторов $x, y \in T_Q^l$ равна

$$k(x, y) = \frac{R_{ABCD}x^A x^C y^B y^D}{(g_{AC}g_{BD} - g_{AD}g_{BC})x^A x^C y^B y^D}.$$

Возьмем координаты в M^{l+p} так, чтобы в точке Q $g_{AB} = \delta_{AB}$, $y \in T_Q^l$ – произвольный фиксированный вектор, f будем рассматривать как функцию x^A .

В экстремальной точке x $f = k$ и

$$\frac{\partial f}{\partial x^C} = 2[R_{ABCD}x^A y^B y^D - k(g_{AC}g_{BD} - g_{AD}g_{BC})x^A y^B y^D] = 0. \quad (2)$$

Это справедливо для $x \in L(Q)$, $y \in T_Q^l$.

В операторном виде (2) запишется как

$$R(x, y)y = k(\langle y, y \rangle x - \langle x, y \rangle y). \quad (2')$$

Отсюда непосредственно следует, что

$$(R(x, y)y)^\perp = 0 \quad (3)$$

при $x, y \in T_Q^l$.

Если $y \in L(Q)$, то экстремальное значение функция f принимает также на $x \in L^\perp(Q)$, и (2') принимает вид

$$R(y, x)y = -k(y, y)x.$$

Переобозначив x на y и наоборот, мы получим нужное соотношение.

Так как

$$R(x, y+z)(y+z) = R(x, y)y + R(x, z)z + R(x, y)z + R(x, z)y,$$

то для $y, z \in T_Q^l$, $x \in L(Q)$ из (3) следует, что

$$\langle R(x, y)z + R(x, z)y, n \rangle = 0 \quad (4)$$

для любого вектора n , ортогонального T_Q^l .

ЛЕММА 3. Пусть F^l – регулярная класса C^3 l -мерная поверхность в римановом пространстве M^{l+p} , внешний нуль-индекс которой $\nu(Q)$ постоянен в окрестности точки Q_0 , $\nu(Q) = \nu(Q_0) = \nu_0$, $L(Q) \subset T_Q F^l$ – нулевое подпространство.

Пусть в точках поверхности для тензора кривизны обьемлющего пространства выполняется условие

$$R(x, y)y^\perp = 0,$$

где $x \in L(Q)$, $y \in T_Q F^l$, $\perp$ – ортогональная проекция вектора на нормальное пространство $N_Q F^l$.

Тогда распределение $L(Q)$ голономно, слои являются вполне геодезическими подмногообразиями, $R^{\nu_0}(Q) \subset M^{l+p}$, $\nu(Q) = \nu(Q_0)$ для внутренних точек $R^k(Q_0)$, $\nu^*(Q) \leq \nu(Q_0)$ для граничных точек $R^k(Q_0)$. Если поверхность полная и $\nu(Q_0) = \min_{Q \in F^l} \nu(Q)$, то $R^k(Q_0)$ есть полное риманово многообразие.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем так параметризацию поверхности и нормальные векторные поля n_α , чтобы в точке Q_0 метрический тензор поверхности

$$g_{ij} = \delta_{ij}, \quad \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k} = 0,$$

коэффициенты кручения

$$\mu_{\alpha\beta, i} = 0.$$

В точке Q_0 касательные векторы v_i имеют координаты

$$v_i^A = \frac{\partial v^A}{\partial u_i} = \delta_i^A(z),$$

где $v^A = v^A(u^1, \dots, u^l)$ – параметризация поверхности; единичные векторы ортонормированного поля нормалей $n_\alpha^B = \delta_\alpha^B$, пространство $L(Q)$ натянуто на ν первых векторов $\nu_a = (v_a^A)$.

Тогда в точке Q_0 уравнения Кодаци для вторых квадратичных форм A_{ij}^α запишутся так [3]

$$\begin{aligned}\frac{\partial A_{ij}^\alpha}{\partial u^a} - \frac{\partial A_{ia}^\alpha}{\partial u^j} &= R_{i\alpha j a}, \\ \frac{\partial A_{ij}^\alpha}{\partial u^a} - \frac{\partial A_{ja}^\alpha}{\partial u^i} &= R_{j\alpha i a}.\end{aligned}$$

Но, так как из (4) $R_{i\alpha j a} = R_{i\alpha i a} = 0$, то

$$\frac{\partial A_{ij}^\alpha}{\partial u^a} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial A_{ia}^\alpha}{\partial u^j} + \frac{\partial A_{ja}^\alpha}{\partial u^i} \right). \quad (5)$$

Пусть $x(Q), y(Q)$ – регулярные векторные поля на F^l , принадлежащие распределению, т.е.

$$A_{ij}^\alpha x^i = 0, \quad A_{ij}^\alpha y^j = 0. \quad (6)$$

В точке Q_0 из выбора системы координат следует, что

$$x^i = 0, \quad y^i = 0, \quad \text{если } i > \nu. \quad (7)$$

Продифференцируем (6) по u^k

$$A_{ij}^\alpha \frac{\partial x^i}{\partial u^k} + \frac{\partial A_{ij}^\alpha}{\partial u^k} x^i = 0, \quad A_{ji}^\alpha \frac{\partial y^i}{\partial u^k} + \frac{\partial A_{ji}^\alpha}{\partial u^k} y^i = 0.$$

Умножим первое уравнение на y^k , второе – на x^k и просуммируем. Тогда

$$A_{ij}^\alpha \frac{\partial x^i}{\partial u^k} y^k + \frac{\partial A_{ij}^\alpha}{\partial u^k} x^i y^k = 0, \quad A_{ji}^\alpha \frac{\partial y^i}{\partial u^k} x^k + \frac{\partial A_{ji}^\alpha}{\partial u^k} y^i x^k = 0.$$

Из (7) следует, что в точке Q_0

$$A_{ij}^\alpha \frac{\partial x^i}{\partial u^a} y^a + \frac{\partial A_{ij}^\alpha}{\partial u^a} x^i y^a = 0. \quad (8)$$

Подставив (5) в (8), получим

$$A_{ij}^\alpha \frac{\partial x^i}{\partial u^a} y^a + \frac{1}{\alpha^2} \left(\frac{\partial A_{ia}^\alpha}{\partial u^j} x^i y^a + \frac{\partial A_{ja}^\alpha}{\partial u^i} x^i y^a \right) = 0. \quad (9)$$

Из (6)

$$A_{ik}^\alpha x^i y^k = 0.$$

Продифференцируем по u^j , получим

$$\frac{\partial A_{ik}^\alpha}{\partial u^j} x^i y^k + A_{ik}^\alpha \frac{\partial x^i}{\partial u^j} y^k + A_{ik}^\alpha \frac{\partial y^k}{\partial u^j} x^i = 0.$$

Два последних слагаемых равны нулю в силу (6). Поэтому в точке Q_0

$$\frac{\partial A_{ia}^\alpha}{\partial u^j} x^i y^a = 0. \quad (10)$$

Подставив (10) в (9), а также учитывая, что в точке Q_0

$$\frac{\partial A_{ja}^\alpha}{\partial u^i} x^i y^a = -A_{jk} \frac{\partial y^k}{\partial u^a} x^a,$$

мы получим

$$2A_{ij}^\alpha \frac{\partial x^i}{\partial u^a} y^a - A_{jk} \frac{\partial y^k}{\partial u^a} x^a = 0.$$

Аналогично,

$$2A_{jk}^\alpha \frac{\partial y^k}{\partial u^a} x^a - A_{ij}^\alpha \frac{\partial x^i}{\partial u^a} y^a = 0.$$

Отсюда

$$A_{ij}^\alpha \frac{\partial x^i}{\partial u^a} y^a = 0, \quad A_{jk}^\alpha \frac{\partial y^k}{\partial u^a} x^a = 0. \quad (11)$$

С учетом выбора системы координат в точке Q_0

$$\nabla_x y = \left(\frac{\partial y^i}{\partial u^a} x^a \right) v_i, \quad \nabla_y x = \left(\frac{\partial x^i}{\partial u^a} y^a \right) v_i,$$

где ∇ – ковариантная производная в метрике поверхности. Поэтому из (11) следует, что $\nabla_x y, \nabla_y x \in L(Q)$. Так как скобка Ли векторных полей

$$[x, y] = \nabla_y x - \nabla_x y$$

также принадлежит $L(Q)$, то распределение $L(Q)$ голономно. Так как $\nabla_x y \in L(Q)$, то слои являются вполне геодезическими подмногообразиями объемлющего пространства.

Дальнейшее доказательство проходит аналогично доказательству теоремы 1 из [1] или теоремы из [4], где доказывается аналогичное утверждение при условии, что вдоль поверхности

$$\langle R(x, y)z, n \rangle = 0,$$

где $x, y, z \in T_Q F^l$, n – произвольный нормальный вектор.

Поверхность F^l риманова пространства M^{l+p} мы будем называть линейчатой, если на ней имеется C^1 слоение $\{L\}$, состоящее из вполне геодезических подмногообразий объемлющего пространства.

ЛЕММА 4. Пусть $F^l \subset M^{l+p}$ – линейчатая поверхность и вдоль полной образующей $L_0 \in \{L\}$

$$R(x, y)x = -ky, \quad k(x, y) > 0,$$

где $k = \text{const} > 0$, $x \in TL_0$, $y \in TL_0^\perp$, $\langle x, x \rangle = 1$. Тогда размерность образующей $\nu < \nu(l)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Поверхность F^l по условиям теоремы является поверхностью неположительной внешней кривизны и нуль-индекс $\nu(Q)$ в силу ограничения на коразмерность по лемме 1 соответственно удовлетворяет неравенствам:

- 1) $\nu \geq (l + p)/2$;
- 2) $\nu > \nu(l)$.

Из формулы Гаусса непосредственно следует, что для любой двумерной плоскости $\sigma \subset T_Q F^l$, проходящей через вектор $x \in L(Q)$,

$$\gamma_{2/F^l} = \gamma_{2/M^{l+p}}.$$

Но, так как $\gamma_{2/M^{l+p}} \geq 1$, $\gamma_{2/F^{l+p}} \leq 1$, то $\gamma_{2/M^{l+p}} = 1$, и секционная кривизна M^{l+p} достигает на этой площадке минимума. Тогда из леммы 1 следует, что распределение $L(Q)$ удовлетворяет условиям леммы 2. Возьмем точку $Q_0 \in F^l$, для которой $\nu(Q_0) = \min_{Q \in F^l} \nu(Q)$. Тогда в окрестности Q_0 $\nu(Q)$ постоянно, и мы имеем дифференцируемое распределение. По лемме 3 через точки этой окрестности проходят полные вполне геодезические подмногообразия объемлющего пространства, которые расслаивают поверхность F^l . При этом различные слои не пересекаются. В случае 1) $\nu \geq (l + p)/2$, и так как кривизна $M^{l+p} \geq 1$, то они должны по теореме Франкеля пересекаться [5]. Поэтому $\nu = l$ и поверхность F^l есть вполне геодезическое подмногообразие, локально изометричное единичной сфере. В случае 2) $\nu > \nu(l)$. Но для поверхности выполняются условия леммы 4. Это следует из лемм 2, 3. Поэтому $\nu = l$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Из ограничения на коразмерность и леммы 1 следует, что $\nu \geq 2$. Так как для поверхности выполняются условия леммы 3, то поверхность F^l содержит полное вполне геодезическое подмногообразие с кривизной 1.

И дальнейшее доказательство совпадает с доказательством теоремы 5 из [1]. В силу односвязности M^{l+p} и ограничений на кривизну R^ν есть односвязное подмногообразие, глобально изометричное единичной сфере. Возьмем на ней замкнутую геодезическую длины 2π , которая является замкнутой геодезической M^{l+p} . Так как кривизна M^{l+p} есть $\gamma_2 \leq 9/4$, то отрезок этой геодезической длины $2\pi/3$ является кратчайшим. Мы имеем треугольник, стороны которого являются кратчайшими, и сумма длин

этих сторон равна 2π . Тогда по экстремальной теореме Топоногова [6] риманово пространство M^{l+p} глобально изометрично единичной сфере.

Для доказательства теоремы 3 осталось лишь доказать случай, когда $\gamma_{2/F} \leq 1$ и $p < -1/2 + \sqrt{1/4 + l - 1}$. По теореме 2 M^{l+p} глобально изометрично единичной сфере. Для компактных поверхностей в сферическом пространстве, у которых $\gamma_{2/F} \leq 1$, доказано, что они являются большими сферами при $p \leq l/5$ [1]. Это будет, когда

$$-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + l - 1} \leq \frac{l}{5}.$$

Это неравенство выполняется при $l \geq 19$.

Харьковский государственный университет

Поступило

19.12.91

Исправленный вариант

28.02.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Борисенко А. А. Об экстремальных свойствах компактных параболических поверхностей в римановом пространстве // Матем. сб. 1987. Т. 133 (175). № 1. С. 112–126.
- [2] Борисенко А. А. О внешне геометрических свойствах параболических поверхностей и топологических свойствах седловых поверхностей в симметрических пространствах ранга 1 // Матем. сб. 1981. Т. 116 (158). № 3. С. 440–457.
- [3] Эйзенхарт Л. Риманова геометрия. М.: ИЛ, 1948.
- [4] Ferus D. Totally geodesic foliations // Math. Ann. 1970. V. 88. № 4. P. 313–317.
- [5] Frankel T. Manifolds with positive curvature // Pacif. J. Math. 1961. V. 11. P. 165–174.
- [6] Топоногов В. А. Некоторые экстремальные теоремы римановой геометрии // Сиб. матем. ж. 1967. Т. 10. № 2. С. 459–467.