Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. А. Камаев, Семейства устойчивых многообразий одномерных параболических уравнений, *Матем. заметки*, 1996, том 60, выпуск 1, 11–23

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1799>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 12:49:43

СЕМЕЙСТВА УСТОЙЧИВЫХ МНОГООБРАЗИЙ ОДНОМЕРНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Д. А. Камаев

1. Введение. Одной из основных проблем теории эволюционных дифференциальных уравнений является исследование асимптотического поведения траектории последних. Эта проблема решается, в частности, при помощи построения инвариантных семейств многообразий. В настоящей заметке доказывается существование семейства устойчивых многообразий у инвариантного множества динамической системы, порождаемой одномерным параболическим уравнением

$$u_t = -Lu + B(u, t), \quad u(t_0, x) = \varphi(x), \quad x \in (0, 1), \quad (1)$$

с периодическими или однородными краевыми условиями I, II, III типа. Оператор L с гладкими коэффициентами удовлетворяет условию эллиптичности [1] и определяется соотношением $Lu = -(d(x)u_x)_x - a(x)u$, а оператор $B(u, t)$ задается выражением $B(u, t) = f(u, u_x, x, t)$. Функция $f(\xi, \zeta, x, t)$ предполагается гладкой, причем для любых неотрицательных целых чисел k, l, m, n существует непрерывная неубывающая функция $\alpha_{k,l,m,n}(s) \geq 0$ такая, что

$$\left| \frac{\partial^{k+l+m+n} f(\xi, \zeta, x, t)}{\partial \xi^k \partial \zeta^l \partial x^m \partial t^n} \right| \leq \alpha_{k,l,m,n}(|\xi|)(1 + |\zeta|).$$

Вопрос о существовании инвариантных многообразий бесконечномерных динамических систем, порождаемых уравнениями вида (1), рассматривался в ряде работ [2]–[4] в предположении, что f от u_x не зависит. В настоящей заметке это ограничение снято. Для сокращения изложения рассматриваются автономные уравнения. Это упрощение не является принципиальным, все результаты без труда обобщаются на неавтономный случай. Фиксируем для определенности однородные краевые условия I рода.

2. Динамическая система. Рассмотрим гильбертово пространство W квадратично интегрируемых функций, определенных на отрезке $[0, 1]$. Пространство W снабжено стандартным скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$,

порождающим норму $|\cdot|$ (см. [1]). Оператор L имеет в W всюду плотную область определения и является самосопряженным. Существует ортонормированный базис $\{v_k(x)\}$, $k \in \mathbb{N}$, в W такой, что $Lv_k = \lambda_k^2 v_k$, $\lambda_k^2 < \lambda_{k+1}^2$, $\lambda_k^2 \rightarrow \infty$.

Для каждого натурального k определим гильбертово пространство W^k как пополнение области определения оператора $L^{k/2}$ относительно нормы $|u|_k = |L^{k/2}u|$, порождаемой скалярным произведением $(u, v)_k = (L^{k/2}u, L^{k/2}v)$. По определению $W^0 = W$, $W^\infty = \bigcap_{k \geq 1} W^k$. В силу теоремы Реллиха естественное вложение $W^k \rightarrow W^{k-1}$ компактно.

С задачей (1) связаны еще три пространства: $L_2(t, s; W)$, $W_{t,s}$ и $H_{t,s}$. Элементами первого являются измеримые по t функции $u(t)$ со значениями в W , имеющие конечную норму $\|u\|_{t,s}$, порожденную скалярным произведением $(u, v)_{t,s} = \int_t^s (u(\tau), v(\tau)) d\tau$. Банахово пространство $W_{t,s}$ состоит из элементов $u(t) \in L_2(t, s; W)$, для которых du/dt , Lu суть элементы $L_2(t, s; W)$, а $L^{1/2}u(\tau)$ при $\tau \in [t, s]$ есть элемент W^1 , непрерывно зависящий от τ в норме пространства W^1 , и выполняется соотношение

$$\left(\frac{du}{dt}(\tau), Lu(\tau) \right) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u(\tau)|_1^2 \in L_2(t, s).$$

Норма в $W_{t,s}$ определяется формулой

$$\|u\|_{W_{t,s}} = \left[\|Lu\|_{t,s}^2 + \|u_t\|_{t,s}^2 + \sup_{\tau \in [t,s]} |u(\tau)|_1^2 \right]^{1/2}.$$

Для элементов пространства $W_{t,s}$ рассмотрим более слабую норму

$$\|u\|_{H_{t,s}} = \left[\int_t^s |u(\tau)|_1^2 d\tau + \sup_{\tau \in [t,s]} |u(\tau)|^2 \right]^{1/2}.$$

Пополнение пространства $W_{t,s}$ относительно этой нормы есть пространство $H_{t,s}$.

Как известно, для решений линейной задачи Коши

$$u_t = -Lu + f(t), \quad u(t_0) = \varphi,$$

где $f(t) \in L_2(t_0, s; W)$, $\varphi \in W^1$, имеет место априорная оценка

$$\|u\|_{W_{\tau,s}}^2 \leq 2(|u(\tau)|_1^2 + \|f(t)\|_{\tau,s}^2), \quad \tau \in [t_0, s]. \quad (2)$$

Если в задаче (1) $\varphi \in W^1$, то при помощи априорной оценки (2) и метода последовательных приближений можно доказать [5] существование величины $t(|\varphi|_1) > 0$, зависящей лишь от $|\varphi|_1$, и единственного элемента $u(t; \varphi) \in W_{0,t(|\varphi|_1)}$, $u(0; \varphi) = \varphi$, который является обобщенным решением задачи (1). Обозначим через $T(\varphi)$ длину максимального интервала, на котором существует обобщенное решение. В качестве фазового пространства для задачи (1) выберем W^1 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Ограниченное замкнутое подмножество $\Lambda \subset W^1$ называется инвариантным для задачи Коши (1), если для любого $\varphi \in \Lambda$ $u(t; \varphi) \in \Lambda$ при всех $t \in [0, T(\varphi)]$.

Если Λ – инвариантное множество, то $T(\varphi) = \infty$ для любого $\varphi \in \Lambda$. Следовательно, уравнение (1) порождает на Λ динамическую систему с непрерывным временем: $F_t(\varphi) = u(t, \varphi)$, $t \geq 0$.

Рассмотрим бесконечно гладкую функцию $0 \leq h_\rho(s) \leq 1$, причем $h_\rho(s) = 1$, если $s \leq \rho$, и $h_\rho(s) = 0$, если $s > 2\rho$. При изучении поведения траекторий задачи (1) в окрестности $\mathcal{U}$ инвариантного множества Λ , $\mathcal{U} \subset \mathcal{B}_\rho = \{u \in W^1 : |u|_1 < \rho\}$, без ограничения общности можно заметить в уравнении (1) оператор $B(u)$ оператором $B_1(u) = h_\rho(|u|_1)B(u)$. Такая замена не изменит поведения траекторий внутри $\mathcal{B}_\rho$. Однако, измененное уравнение порождает во всем W^1 динамическую систему с непрерывным временем. Далее всюду предполагается, что указанная замена проделана для фиксированного инвариантного множества Λ , его окрестности $\mathcal{U} \subset \mathcal{B}_\rho$ и величины ρ .

Пусть $\text{End}(W^1)$ – банахово пространство непрерывных линейных отображений W^1 в себя. Дифференциальные свойства динамической системы, порождаемой уравнением (1), описываются теоремой 1. Ее доказательство стандартно (см. [5]) и поэтому опущено.

ТЕОРЕМА 1. *Если $t \geq 0$, то отображение F_t имеет непрерывную производную Фреше $\mathcal{D}_\varphi F_t$, $\varphi \in W^1$, причем $\mathcal{D}_\varphi F_t(\theta) = v(t; \theta)$, где $v(t; \theta)$ – решение линеаризованного вдоль траектории $u(t; \varphi)$ уравнения (1) с однородными краевыми условиями I рода. Существует непрерывная неубывающая по t функция $l(\rho, t) > 0$ такая, что $|v(t; \theta)|_1 \leq l(\rho, t)|\theta|_1$. Отображение $\mathcal{D}_\varphi F_t : \varphi \mapsto \mathcal{D}_\varphi F_t$, переводящее W^1 в $\text{End}(W^1)$, удовлетворяет условию Липшица с константой $L(\rho, t)$, непрерывно зависящей от (ρ, t) и неубывающей по t . Для любого ограниченного подмножества $M \subset W^1$ множество $F_t(M)$ ограничено в W^k , $t > 0$, $k \in \mathbb{N}$. Если $t > 0$, то при $s \rightarrow t$ величины $|F_t(\varphi) - F_s(\varphi)|_1$ равномерно по $\varphi \in \Lambda$ стремятся к нулю.*

3. Оценки решений задачи Коши. В дальнейших рассуждениях нам понадобится оценка величины $w(t; \varphi) = u(t; \varphi) - \varphi$ в норме пространства $W_{0,t}$.

ЛЕММА 1. *Существуют константы $a_1(|\varphi|_2)$, $a_2(|\varphi|_3)$, определяемые функцией f , величиной ρ и непрерывно зависящие от $|\varphi|_2$, $|\varphi|_3$, такие, что для $0 \leq t \leq 1$, $\varphi \in \Lambda$, имеют место неравенства*

$$\begin{aligned} \|w(t; \varphi)\|_{W_{0,t}} &\leq a_1(|\varphi|_2)\sqrt{t}, \\ \|L^{1/2}w(t; \varphi)\|_{W_{0,t}} &\leq a_2(|\varphi|_3)\sqrt{t}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставим в (1) $w = u - \varphi$ и применим к полученному уравнению относительно w априорную оценку (2). В результате получим неравенство

$$\|w(t; \varphi)\|_{W_{0,t}}^2 \leq 4(\|B_1(u)\|_{0,t}^2 + |\varphi|_2^2 t).$$

Величину $\|B_1(u)\|_{0,t}^2$ оценим при помощи неравенства $\sup_x |u(x)| \leq c|u|_1$, $u \in W^1$, c – константа [1], воспользовавшись ограниченностью инвариантного множества Λ в W^2 и гладкостью функции f . В итоге получим первое неравенство леммы 1. Аналогично доказывается второе неравенство.

Рассмотрим семейство спектральных задач с однородными краевыми условиями I рода:

$$\begin{aligned} L_\varphi v &\equiv d(x)v_{xx} + (d'(x) + f_{u_x}(\varphi, x))v_x \\ &+ (a(x) + f_u(\varphi, x))v = \lambda v, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\varphi \in \Lambda$, $f_u(\varphi, x) = f_u(\varphi(x), \varphi_x(x), x)$, $f_{u_x}(\varphi, x) = f_{u_x}(\varphi(x), \varphi_x(x), x)$. Очевидно, L_φ есть линеаризация оператора правой части уравнения (1) в точке $\varphi \in \Lambda$. Обозначим собственные числа и собственные функции задачи (3) через $\lambda_n(\varphi)$, $v_n(\varphi, x)$, $\lambda_{n+1}(\varphi) < \lambda_n(\varphi)$, $n \in \mathbb{N}$.

Если v – решение задачи (3), то функция $\eta(z)$, связанная с v преобразованием Лиувилля $v = E_\varphi(\eta)$ (см. [6]), удовлетворяет следующей спектральной задаче с нулевыми краевыми условиями I рода:

$$\eta_{zz} + q(\varphi, z)\eta = \mu\eta, \quad z \in (0, 1). \quad (4)$$

В данном случае преобразование E_φ задается формулами

$$\begin{aligned} z &= \lambda_0^{-1} \int_0^x (d(s))^{-1/2} ds, \quad \eta = (r(x)p(x))^{1/4} v, \\ \mu &= \lambda_0 \lambda, \quad \lambda_0 = \int_0^1 (d(s))^{-1/2} ds, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$p(x) = \exp\left(\int_0^x [d'(s) + f_{u_x}(\varphi, s)] (d(s))^{-1} ds\right), \quad r(x) = p(x)(d(x))^{-1}.$$

При этом

$$q(\varphi, z) = -\theta''(z)(\theta(z))^{-1} - \lambda_0^2(a(x) + f_u(\varphi, x)), \quad \theta(z) = (r(x)p(x))^{1/4}. \quad (6)$$

Учитывая асимптотику собственных функций и собственных значений спектральной задачи (4) [6], получаем равномерные по $\varphi \in \Lambda$ (Λ — ограничено в W^3) асимптотические формулы

$$\lambda_n(\varphi) = -\frac{1}{\pi^2 \lambda_0} \left(n + \frac{\alpha_1}{n} + O(n^{-2}) \right)^2, \quad \alpha_1 = \frac{\pi^2}{2} \int_0^1 q(\varphi, z) dz, \quad (7)$$

$$v_n(\varphi, x) = E_\varphi \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(\pi n z) + O(n^{-1}) \right).$$

Соотношения (5) позволяют утверждать, что $E_\varphi \in \text{End}(W^1)$. Кроме того, существуют положительные не зависящие от $\varphi \in \Lambda$ константы δ_1, δ_2 , для которых $\delta_1 |v|_1 \leq |E_\varphi v|_1 \leq \delta_2 |v|_1, v \in W^1$.

Введем семейство билинейных форм на W^1 :

$$[u, v]_{(\varphi)} = \int_0^1 \{ (E_\varphi^{-1} v)_z (E_\varphi^{-1} u)_z - (q(\varphi, z) - \gamma) (E_\varphi^{-1} u) (E_\varphi^{-1} v) \} dz, \quad (8)$$

параметр $\gamma > 0, \varphi \in \Lambda$.

ЛЕММА 2. При достаточно большом γ , не зависящем от $\varphi \in \Lambda$, билинейные формы (8) являются скалярными произведениями, относительно которых ортогональны собственные функции задачи (3). Кроме того, существуют положительные не зависящие от $\varphi \in \Lambda$ константы β_1, β_2 такие, что для любого $v \in W^1$ $\beta_1 |v|_1 \leq |v|_{(\varphi)} \leq \beta_2 |v|_1$, где $|v|_{(\varphi)} = \sqrt{[v, v]_{(\varphi)}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения леммы вытекают из ограниченности Λ в W^3 , определения преобразования E_φ , формул (6), свойств спектральной задачи (4) [6] и неравенства $\sup_x |u(x)| \leq c |u|_1, u \in W^1, c$ — константа [1].

В дальнейшем γ считается фиксированным и удовлетворяющим условию леммы 2.

Обозначим через $H_n(\varphi)$ собственное подпространство, натянутое на функции $v_1(\varphi, x), \dots, v_n(\varphi, x)$. Соответствующее ему дополнительное подпространство $H'_n(\varphi)$ натянуто на функции $v_k(\varphi, x), k > n$. Пусть для $\varphi \in \Lambda$ $\pi_n(\varphi): W \rightarrow H_n(\varphi), \pi'_n(\varphi): W \rightarrow H'_n(\varphi)$ есть проекторы, задаваемые прямой суммой $H_n(\varphi) \oplus H'_n(\varphi)$, которая ортогональна относительно скалярного произведения (8).

ЛЕММА 3. Существуют не зависящие от $\varphi \in \Lambda$ константы $c_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4$, такие, что при $\varphi \in \Lambda, t \in [0, 1]$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} |\pi_n(\varphi) \mathcal{D}_\varphi F_t(\theta)|_{(\varphi)} &\geq (e^{(\lambda_n(\varphi) - \gamma \lambda_0^{-1})t} - tc_1) |\theta|_{(\varphi)}, & \theta \in H_n(\varphi); \\ |\pi'_n(\varphi) \mathcal{D}_\varphi F_t(\theta)|_{(\varphi)} &\leq (e^{(\lambda_{n+1}(\varphi) - \gamma \lambda_0^{-1})t} + tc_2) |\theta|_{(\varphi)}, & \theta \in H'_n(\varphi); \\ |\pi'_n(\varphi) \mathcal{D}_\varphi F_t(\theta)|_{(\varphi)} &\leq c_3 t |\theta|_{(\varphi)}, & \theta \in H_n(\varphi); \\ |\pi_n(\varphi) \mathcal{D}_\varphi F_t(\theta)|_{(\varphi)} &\leq c_4 t |\theta|_{(\varphi)}, & \theta \in H'_n(\varphi). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Все четыре неравенства доказываются аналогично. Докажем, к примеру, первое. Для этого представим линеаризованную задачу (1) в интегральной форме:

$$v(t) = \exp(tS(\varphi))\theta + \int_0^t \exp((t-s)S(\varphi))[J(s)v(s) + \gamma\lambda_0^{-1}v(s)]ds, \quad (9)$$

где оператор $S(\varphi)$ определяется выражением

$$\begin{aligned} S(\varphi)v &= L_\varphi v - \gamma\lambda_0^{-1}v, \\ J(t)v &= (f_u(u, u_x, x) - f_u(\varphi, x))v + (f_{u_x}(u, u_x, x) - f_{u_x}(\varphi, x))v_x, \\ u &= F_t(\varphi), \quad v = \mathcal{D}_\varphi F_t(\theta). \end{aligned}$$

Применим к соотношению (9) оператор $\pi_n(\varphi)$, а затем оценим снизу правую часть, воспользовавшись теоремой 1 и леммой 2. В результате получим

$$\begin{aligned} |\pi_n(\varphi)v(t)|_{(\varphi)} &\geq \exp(\lambda_n(\varphi)t - \gamma\lambda_0^{-1}(t))|\theta|_{(\varphi)} \\ &- \beta_2 \left| \int_0^t \exp((t-s)S(\varphi))J(s)v(s)ds \right|_1 - \gamma\lambda_0^{-1}\beta_2\beta_1^{-1}l(\rho, 1)t|\theta|_{(\varphi)}. \end{aligned} \quad (10)$$

Для решения w задачи Коши

$$w_t = S(\varphi)w + g(t), \quad w(0) = 0, \quad g(t) \in L_2(0, 1; W), \quad (11)$$

справедлива априорная оценка

$$\|w(t)\|_{W_{0,t}}^2 \leq c_0 \|g(t)\|_{0,t}^2, \quad t \in [0, 1], \quad (12)$$

которая получается из (11) при помощи априорной оценки (2) с учетом ограниченности Λ в W^2 . Стандартные рассуждения [1], [5] позволяют утверждать, что константа $c_0 > 0$ не зависит от φ , а определяется функциями f_u, f_{u_x} , величиной $\gamma\lambda_0^{-1}$ и множеством Λ .

Вернемся к неравенству (10). Полагая в неравенстве (12) $g = J(t)v$, получаем оценку первого вычитаемого в правой части (10):

$$\left| \int_0^t \exp((t-s)S(\varphi))J(s)v(s)ds \right|_1^2 \leq c_0 \|J(s)v(s)\|_{0,t}^2. \quad (13)$$

Воспользовавшись формулой конечных приращений и ограниченностью Λ в W^2 , можно доказать существование не зависящей от φ константы $c_{0,1} > 0$, которая определяется производными функции f и множеством Λ , такой, что

$$\|J(s)v(s)\|_{0,t}^2 \leq c_{0,1}^2 \{ \|w_x v\|_{0,t}^2 + \|v_x w\|_{0,t}^2 + \|vw\|_{0,t}^2 + \|v_x w_x\|_{0,t}^2 \}. \quad (14)$$

В этом неравенстве $w(t) = F_t(\varphi) - \varphi$. Теперь нам необходимо оценить слагаемые в правой части (14). Все они оцениваются одинаково. Оценим, к примеру, последнее. В силу теоремы вложения [1], теоремы 1 и леммы 1 получаем

$$\|v_x w_x\|_{0,t}^2 \leq c_{0,2}^2 \int_0^t \|L^{1/2} w\|_{W_{0,s}}^2 |v_x(s)|^2 ds \leq c_{0,3}^2 t^2 |\theta|_1^2,$$

где константы $c_{0,2} > 0$, $c_{0,3} > 0$ определяются функциями $d(x)$, $a(x)$ и величинами $l(\rho, 1)$, $\sup_{\varphi \in \Lambda} a_2(|\varphi|_3)$. Таким образом, для некоторой константы $c'_0 > 0$ имеет место неравенство

$$\left| \int_0^t \exp((t-s)S(\varphi)) J(s)v(s) ds \right|_1 \leq c'_0 t |\theta|_1. \quad (15)$$

Из неравенств (10) и (15) получаем первое неравенство из формулировки леммы 3.

4. Семейство устойчивых многообразий. Лемма 3 позволяет доказать существование у инвариантного множества Λ инвариантного семейства экспоненциально сжимающихся под действием F_t C^1 -подмногообразий (семейства устойчивых многообразий).

ТЕОРЕМА 2. Пусть Λ – инвариантное множество динамической системы F_t , $t \geq 0$, порождаемой уравнением (1). Тогда существует $M \in \mathbb{N}$ и невозрастающая последовательность $\varepsilon_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, $n \in \mathbb{N}$, такие, что при $n \geq M$ имеют место следующие утверждения.

1. Существует C^1 -непрерывное семейство $\{W_{\varepsilon_n}^s(\varphi), \varphi \in \Lambda\}$ C^1 -подмногообразий, причем через каждую точку $\varphi \in \Lambda$ проходит ровно одно подмногообразие $W_{\varepsilon_n}^s(\varphi)$.
2. Отображение $\pi'_n(\varphi): W_{\varepsilon_n}^s(\varphi) \rightarrow H'_n(\varphi)$ есть диффеоморфизм, причем $\mathcal{D}_\varphi \pi'_n(\varphi) = \text{id}$ и

$$\pi'_n(\varphi)(W_{\varepsilon_n}^s(\varphi)) = \{\psi : \psi = \pi'_n(\varphi)(\varphi + \theta), |\theta|_{(\varphi)} < \varepsilon_n\}, \quad \varphi \in \Lambda.$$

3. Семейство $\{W_{\varepsilon_n}^s(\varphi), \varphi \in \Lambda\}$ инвариантно:

$$F_t(W_{\varepsilon_n}^s(\varphi)) \subset W_{\varepsilon_n}^s(F_t(\varphi)), \quad t \geq 0, \quad \varphi \in \Lambda.$$

4. Многообразия $W_{\varepsilon_n}^s(\varphi)$, $\varphi \in \Lambda$, экспоненциально сжимаются под действием F_t , т.е. существуют не зависящие от φ константы $A > 0$, $\alpha_n > 0$, $\alpha_n \rightarrow \infty$, такие, что для любых $\varphi_1, \varphi_2 \in W_{\varepsilon_n}^s(\varphi)$, $t \geq 0$

$$|F_t(\varphi_1) - F_t(\varphi_2)|_1 \leq A e^{-\alpha_n t} |\varphi_1 - \varphi_2|_1.$$

5. Если $\varphi_1 \in W_{\varepsilon_n}^s(\varphi) \cap \Lambda$, то $\varphi_1 = \varphi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 1 множество Λ ограничено в W^k , $k \in \mathbb{N}$. Следовательно, для любого k Λ — компактное подмножество W^k и топологии, индуцированные на Λ вложениями $\Lambda \rightarrow W^k$, $\Lambda \rightarrow W^{k+1}$, совпадают. Так как Λ состоит из гладких функций, то ограничения $F_t|_{\Lambda}$, $t \geq 0$, являются гомеоморфизмами и уравнение (1) порождает на Λ непрерывную динамическую систему F_t , $t \in \mathbb{R}$ (см. [7, § 2]).

Доказательство теоремы опирается на технику преобразования графиков (см. [8, § 5, 4], [3]).

Рассмотрим семейство разложений

$$W^1 = H_n(\varphi) \oplus H'_n(\varphi), \quad \varphi \in \Lambda. \quad (16)$$

Из свойства непрерывной зависимости спектральной задачи (4) от $q(\varphi, z)$ и определения преобразования E_φ вытекает непрерывность семейства (16) по $\varphi \in \Lambda$ [6]. Разложения (16) индуцируют разложение касательного расслоения $T_\Lambda W^1$ в сумму Уитни $T_\Lambda W^1 = H_n(\Lambda) \oplus H'_n(\Lambda)$.

Обозначим через $\Sigma_c(\Lambda)$ множество непрерывных сечений расслоения $T_\Lambda W^1$. Прямая сумма подпространств Σ_n , Σ'_n , состоящих из непрерывных сечений вида $\pi_n(\varphi)\sigma(\varphi)$, $\pi'_n(\varphi)\sigma(\varphi)$, $\varphi \in \Lambda$, $\sigma \in \Sigma_c(\Lambda)$, совпадает с $\Sigma_c(\Lambda)$. В приведенных обозначениях и всюду далее принято каноническое отождествление слоев $T_\varphi W^1$ расслоения $T_\Lambda W^1$ с пространством W^1 , а слоев расслоений $H_n(\Lambda)$, $H'_n(\Lambda)$ с подпространствами пространства W^1 .

Пусть

$$\Sigma_n(\Lambda, \varepsilon) = \left\{ \sigma \in \Sigma_n : \|\sigma\| = \sup_{\varphi \in \Lambda} |\sigma(\varphi)|_{(\varphi)} < \varepsilon < 1 \right\},$$

аналогично определяется $\Sigma'_n(\Lambda, \varepsilon)$. Обозначим через $\mathcal{L}_0^n(\varepsilon)$ пространство отображений $\mathcal{H} : \Sigma'_n(\Lambda, \varepsilon) \rightarrow \Sigma_n(\Lambda, \varepsilon)$, имеющих константу Липшица $\text{Lip}(\mathcal{H}) \leq 1$ и удовлетворяющих условию $\mathcal{H}(0) = 0$. Для фиксированного $\mathcal{H} \in \mathcal{L}_0^n(\varepsilon)$ множество точек вида $(\mathcal{H}\sigma + \sigma + i)(\varphi)$, $\varphi \in \Lambda$, где $\sigma \in \Sigma'_n(\Lambda, \varepsilon)$, i — вложение $\Lambda \rightarrow W^1$, под действием F_t переходит в множество $F_t((\mathcal{H}\sigma + \sigma + i)(\varphi))$, $\varphi \in \Lambda$. Условие инвариантности этого множества можно записать в виде

$$\pi_n(\varphi)[F_t(\mathcal{H}\sigma + \sigma + i)F_t^{-1} - i](\varphi) = \mathcal{H}\{\pi'_n(\varphi)[F_t(\mathcal{H}\sigma + \sigma + i)F_t^{-1} - i](\varphi)\},$$

$\varphi \in \Lambda$. Преобразуем это соотношение при помощи формулы конечных приращений:

$$\begin{aligned} & \pi_n(\varphi)[(\mathcal{D}_{\varphi_t} F_t)(\mathcal{H}\sigma + \sigma) + \alpha_t(\mathcal{H}, \sigma)(\mathcal{H}\sigma + \sigma)](\varphi_t) \\ &= \mathcal{H}\{\pi'_n(\varphi)[(\mathcal{D}_{\varphi_t} F_t)(\mathcal{H}\sigma + \sigma) + \alpha_t(\mathcal{H}, \sigma)(\mathcal{H}\sigma + \sigma)](\varphi_t)\}, \end{aligned} \quad (17)$$

где $\varphi_t = F_t^{-1}(\varphi)$, $\alpha_t(\mathcal{H}, \sigma) \in \text{End}(\Sigma_c(\Lambda))$ и определяется формулой

$$\begin{aligned} & \alpha_t(\mathcal{H}, \sigma)\sigma_1(\varphi_t) \\ &= \int_0^t (\mathcal{D}_{\xi(\mathcal{H}\sigma + \sigma)(\varphi_t) + \varphi_t} F_t)\sigma_1(\varphi_t) d\xi - (\mathcal{D}_{\varphi_t} F_t)\sigma_1(\varphi_t). \end{aligned} \quad (18)$$

В силу теоремы 1 и формулы (18) существуют константы $A_i > 0, i = 1, 2, 3$, такие, что при $t \in [0, 1], \sigma, \sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma'_n(\Lambda, \varepsilon)$

$$\begin{aligned} \|\alpha_t(\mathcal{H}, \sigma)\| &\leq A_1 \|\mathcal{H}\sigma + \sigma\|, & \mathcal{H} &\in \mathcal{L}_0^n(\varepsilon); \\ \|\alpha_t(\mathcal{H}_1, \sigma) - \alpha_t(\mathcal{H}_2, \sigma)\| &\leq A_2 \|(\mathcal{H}_1 - \mathcal{H}_2)\sigma\|, & \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 &\in \mathcal{L}_0^n(\varepsilon); \\ \|\alpha_t(\mathcal{H}, \sigma_1) - \alpha_t(\mathcal{H}, \sigma_2)\| &\leq A_3 \|\sigma_1 - \sigma_2\|, & \mathcal{H} &\in \mathcal{L}_0^n(\varepsilon). \end{aligned} \quad (19)$$

В силу первого неравенства леммы 3 соотношение (17) можно при достаточно малых $t > 0$ преобразовать к виду

$$\begin{aligned} \mathcal{H}\sigma(\varphi) &= [\pi_n(\varphi)(\mathcal{D}_\varphi F_t)]^{-1} \\ &\times \{ \mathcal{H} [\pi'_n(\varphi)(\mathcal{D}_\varphi F_t)(\mathcal{H}\sigma + \sigma)(\varphi) + \pi'_n(\varphi)\alpha_t(\mathcal{H}, \sigma)(\mathcal{H}\sigma + \sigma)(\varphi)] \\ &- \pi_n(\varphi)\alpha_t(\mathcal{H}, \sigma)(\mathcal{H}\sigma + \sigma)(\varphi) - \pi_n(\varphi)(\mathcal{D}_\varphi F_t)\sigma(\varphi) \} \equiv \mathcal{F}_t^n(\mathcal{H})\sigma(\varphi). \end{aligned} \quad (20)$$

Очевидно, $\mathcal{F}_t^n(\mathcal{H})(0) = 0$. Оценим константу Липшица отображения $\mathcal{F}_t^n(\mathcal{H})$ при $\mathcal{H} \in \mathcal{L}_0^n(\varepsilon)$. Для этого воспользуемся леммой 3, неравенствами (19) и определением пространства $\mathcal{L}_0^n(\varepsilon)$. В результате получим $\text{Lip}(\mathcal{F}_t^n(\mathcal{H})) \leq R_0(n, \varepsilon, t)$, $R_0(n, \varepsilon, t) = [e^{\varkappa_n^+ t} + \mu_1 t + \nu_1 \varepsilon][e^{\varkappa_n^- t} - h_1 t]^{-1}$, где $\varkappa_n^+ = \sup_{\varphi \in \Lambda} \{\lambda_{n+1}(\varphi) - \gamma \lambda_0^{-1}\}$, $\varkappa_n^- = \inf_{\varphi \in \Lambda} \{\lambda_n(\varphi) - \gamma \lambda_0^{-1}\}$, а константы $\mu_1 > 0$, $h_1 > 0$, $\nu_1 > 0$ выражаются через A_k , c_i , $k = 1, 2, 3$, $i = 1, 2, 3, 4$. Введем на множестве $\mathcal{L}_0^n(\varepsilon)$ метрику:

$$\|\mathcal{H}_1 - \mathcal{H}_2\| = \sup_{\sigma \in \Sigma'_n(\Lambda, \varepsilon)} \|\mathcal{H}_1(\sigma) - \mathcal{H}_2(\sigma)\|.$$

По аналогии с выводом оценки константы Липшица $\text{Lip}(\mathcal{F}_t^n(\mathcal{H}))$ можно получить неравенство $\|\mathcal{F}_t^n(\mathcal{H}_1) - \mathcal{F}_t^n(\mathcal{H}_2)\| \leq R_1(n, \varepsilon, t) \|\mathcal{H}_1 - \mathcal{H}_2\|$, где $R_1(n, \varepsilon, t) = [e^{\varkappa_n^+ t} + \mu_2 t + \nu_2 \varepsilon][e^{\varkappa_n^- t} - h_2 t]^{-1}$, константы $\mu_2 > 0$, $\nu_2 > 0$, $h_2 > 0$ выражаются через A_k , c_i , $k = 1, 2, 3$, $i = 1, 2, 3, 4$.

Выберем $\delta > 0$ столь малым, что $1 - s \leq e^{-s} \leq 1 - s + 2^{-1}s^2$ при $0 \leq s \leq \delta$. Пусть для $n \in \mathbb{N}$ $\varepsilon_n = t_n = \delta |\varkappa_1^+| \cdot |\varkappa_1^+|^{-2}$, тогда $R_i(n, \varepsilon_n, t_n) < 1$, $i = 0, 1$, если $M \in \mathbb{N}$ столь велико, что при $n \geq M$

$$\varkappa_n^+ - \varkappa_n^- + \max_i \{\mu_i + \nu_i + h_i\} + 2^{-1} \delta |\varkappa_1^+| < 0.$$

Следовательно, при $n \geq M$ отображение $\mathcal{F}_{t_n}^n: \mathcal{H} \mapsto \mathcal{F}_{t_n}^n(\mathcal{H})$ переводит пространство $\mathcal{L}_0^n(\varepsilon)$ в себя и является сжимающим. Поэтому у него существует единственная неподвижная притягивающая точка $\mathcal{H}_n \in \mathcal{L}_0^n(\varepsilon)$.

Выберем $n \geq M$ и рассмотрим $\text{graph}(\mathcal{H}_n)$ – график отображения $\mathcal{H}_n$. Определим семейство подмножеств $W_{\varepsilon_n}^s(\varphi)$, $\varphi \in \Lambda$, следующим образом:

$$W_{\varepsilon_n}^s(\varphi) = \{\varphi + \psi : \psi \in \text{graph}(\mathcal{H}_n) \cap T_\varphi W^1\}. \quad (21)$$

Семейство (21) есть C^0 -непрерывное семейство C^0 -подмногообразий, для которого выполняется утверждение пункта 2 теоремы 2. Инвариантность семейства подмногообразий (21) вытекает из соотношения $\mathcal{F}_{t_n}^n(\mathcal{H}_n) = \mathcal{H}_n$, полугруппового свойства семейства отображений F_t , $t \geq 0$, и непрерывности этого семейства по t (теорема 1). При больших n натуральный логарифм константы Липшица отображения $[\mathcal{F}_{t_n}^n]^{m(n)}$, где $m(n)$ есть целая часть числа t_n^{-1} , оценивается сверху величиной

$$- (1 + O(|\kappa_n^+|^{-1})) |\kappa_n^+ - \kappa_n^-| + \max_i \{\mu_i + \nu_i + h_i\} + 2^{-1} \delta |\kappa_1^+| |\ln(e + O(|\kappa_n^+|^{-1}))|.$$

Следовательно, выполняется утверждение пункта 4 теоремы 2.

Покажем, что семейство (21) есть C^1 -непрерывное семейство C^1 -подмногообразий. Рассмотрим $\Omega(\varepsilon_n)$ – множество непрерывных отображений $\mathcal{T}: \Sigma'_n(\Lambda, \varepsilon_n) \rightarrow \text{Hom}(\Sigma'_n, \Sigma_n)$ таких, что $\|\mathcal{T}(\sigma)\| \leq 1$, здесь $\sigma \in \Sigma'_n(\Lambda, \varepsilon_n)$, $\text{Hom}(\Sigma'_n, \Sigma_n)$ – банахово пространство непрерывных линейных отображений Σ'_n в Σ_n . Определим отображение $\mathcal{K}_{t_n}^n: \mathcal{L}_0^n(\varepsilon_n) \times \Omega(\varepsilon_n) \rightarrow \mathcal{L}_0^n(\varepsilon_n) \times \Omega(\varepsilon_n)$ посредством формул

$$\begin{aligned} \{p_1[\mathcal{K}_{t_n}^n(\mathcal{H}, \mathcal{T})]\sigma(\varphi) &= [\mathcal{F}_{t_n}^n(\mathcal{H})\sigma](\varphi), \\ \{p_2[\mathcal{K}_{t_n}^n(\mathcal{H}, \mathcal{T})]\sigma\}\theta(\varphi) &= [\pi_n(\varphi)(\mathcal{D}_\varphi F_{t_n})]^{-1} \\ &\times \{\mathcal{T}(\sigma_1)[\pi'_n(\varphi)(\mathcal{D}_\varphi F_{t_n})(\mathcal{T}(\sigma) + \text{id})]\theta(\varphi) - \pi_n(\varphi)(\mathcal{D}_\varphi F_{t_n})\theta(\varphi)\}, \end{aligned}$$

где $\sigma \in \Sigma'_n(\Lambda, \varepsilon_n)$, $\sigma_1(\varphi) = \pi'_n(\varphi)(\mathcal{D}_\varphi F_{t_n})(\mathcal{H}\sigma + \sigma)(\varphi)$, $\varphi \in \Lambda$, $p_i(x_1, x_2) = x_i$, $i = 1, 2$ – канонические проекции. Отображение $\mathcal{K}_{t_n}^n$ построено так, что $(\mathcal{K}_{t_n}^n)^m(\mathcal{H}, \mathcal{D}\mathcal{H})\sigma = ((\mathcal{F}_{t_n}^n)^m(\mathcal{H})\sigma, \mathcal{D}_\sigma(\mathcal{F}_{t_n}^n)^m(\mathcal{H}))$, здесь $\mathcal{D}\mathcal{H}$ – касательное отображение $\mathcal{D}\mathcal{H}: \sigma \mapsto \mathcal{D}_\sigma \mathcal{H}$.

По аналогии с выводом оценок для отображения $\mathcal{F}_{t_n}^n$ можно показать, что существует константа $\mu_3 > 0$, для которой

$$\|\{p_2[\mathcal{K}_{t_n}^n(\mathcal{H}, \mathcal{T})]\sigma\}\| \leq [e^{\kappa_n^+ t_n} + \mu_3 t_n][e^{\kappa_n^- t_n} - \mu_3 t_n]^{-1}.$$

В силу этого неравенства отображение $\mathcal{K}_{t_n}^n$ определено корректно при достаточно больших n .

В соответствии со стандартной схемой техники преобразования графиков для доказательства дифференцируемости и C^1 -непрерывности семейства (21) достаточно показать, что отображение $\mathcal{K}_{t_n}^n$ имеет единственную притягивающую неподвижную точку. Воспользуемся принципом сжимающих отображений для отображения расслоения (см. [8, § 5.2]). Согласно этому принципу в данном случае достаточно показать, что при достаточно больших n константа Липшица отображения $p_2 \mathcal{K}_{t_n}^n: \Omega(\varepsilon_n) \rightarrow \Omega(\varepsilon_n)$ меньше единицы при любом $\mathcal{H} \in \mathcal{L}_0^n(\varepsilon_n)$. Но это нетрудно сделать по аналогии с выводом оценок для отображения $\mathcal{F}_{t_n}^n$ [3]. Таким образом, пункт 1 теоремы 2 доказан.

Убедимся в справедливости пункта 5 утверждения теоремы 2. Пусть подпространства H_n и H'_n натянуты, соответственно, на семейства собственных функций $\{v_1, \dots, v_n\}$ и $\{v_k, k > n\}$ оператора L . Операторы проектирования π_n и π'_n определяются прямой суммой $W^1 = H_n \oplus H'_n$. Из формул (3)–(6) вытекает следующее соотношение между собственными функциями операторов L и L_φ :

$$v_n(\varphi, x) = \Phi(\varphi, x)[v_n(x) + O(n^{-1})], \quad n \in \mathbb{N}, \quad (22)$$

где

$$\Phi(\varphi, x) = \exp \left\{ -2^{-1} \int_0^x [f_{u_x}(\varphi, s)(d(s))^{-1}] ds \right\}.$$

Рассмотрим ограничение π'_n на подпространство $H'_n(\varphi)$ при больших n . Предположим, что существует последовательность $u_m = \sum_{k > n_m} c_k^{(m)} \times v_k(\varphi_m, x)$, $n_m \rightarrow \infty$, $\varphi_m \in \Lambda$, такая, что $|u_m| = 1$, а $\delta_m = |\pi'_m u_m| \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$. В таком случае

$$u_m = \sum_{k=1}^{n_m} \alpha_k^{(m)} v_k(x) + \Delta_m(x),$$

где $\Delta_m(x) \in H'_{n_m}$. В силу (22) справедливо соотношение

$$\sum_{k=1}^{n_m} \alpha_k^{(m)} v_k(x) = \Phi(\varphi_m, x) \sum_{k > n_m} c_k^{(m)} (v_k(x) + O(k^{-1})) - \Phi(\varphi_m, x) \Delta_m(x),$$

из которого, считая неизвестным $\alpha^{(m)} = (\alpha_1^{(m)}, \dots, \alpha_{n_m}^{(m)})$, получаем систему линейных уравнений $A_m \alpha^{(m)} = \beta^{(m)}$, где

$$\begin{aligned} \beta^{(m)} &= (\beta_1^{(m)}, \dots, \beta_{n_m}^{(m)}), \\ \beta_s^{(m)} &= \sum_{k > n_m} c_k^{(m)} (O(k^{-1}), v_s(x)), \\ (A_m \alpha^{(m)})_s &= \sum_{k=1}^{n_m} \alpha_k^{(m)} (\Phi^{-1}(\varphi_m, x) v_k(x), v_s(x)), \end{aligned}$$

$s = 1, \dots, n_m$. Евклидова норма $\|\beta^{(m)}\| \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$. Для любых α_i , $i = 1, \dots, n_m$, $\varphi_m \in \Lambda$ выполняется оценка

$$\begin{aligned} &\sum_{i,j=1}^{n_m} \alpha_i \alpha_j (\Phi^{-1}(\varphi, x) v_i(x), v_j(x)) \\ &= \left| \Phi^{-1/2}(\varphi, x) \sum_{i=1}^{n_m} \alpha_i v_i(x) \right|^2 \geq \gamma_1^2 \sum_{i=1}^{n_m} \alpha_i^2, \end{aligned}$$

где константа $\gamma_1 > 0$ не зависит от m и φ . Следовательно, $\|\alpha^{(m)}\| \rightarrow 0$, что противоречит соотношению $1 = \|\alpha^{(m)}\|^2 + \delta_m^2$. Таким образом, для некоторой не зависящей от $\varphi \in \Lambda$, $n \in \mathbb{N}$ константы $\Delta > 0$ при достаточно больших n имеет место неравенство $|\pi'_n u| \geq \Delta |u|$, $u \in H'_n(\varphi)$. Аналогично доказывается неравенство $|\pi'_n u|_1 \geq \omega |u|_1$, $u \in H'_n(\varphi)$, где $\omega > 0$ не зависит от φ и n . Следовательно, при достаточно больших n ограничение π'_n на $H'_n(\varphi)$ есть изоморфизм, а подпространство $H'_n(\varphi)$ есть график непрерывного линейного отображения $G_{\varphi,n}: H'_n \rightarrow H_n$, причем $|G_{\varphi,n}|_1 < \omega^{-1}$. Но подпространство $H'_n(\varphi)$ является касательным подпространством к подмногообразию $W_{\varepsilon_n}^s(\varphi)$ в точке $\varphi \in \Lambda$. Следовательно, из-за компактности Λ , непрерывной дифференцируемости $W_{\varepsilon_n}^s(\varphi)$ и формулы (21) для достаточно больших n найдутся не зависящие от $\varphi \in \Lambda$ числа $0 < \delta_n \leq \varepsilon_n$ такие, что

$$W_{\delta_n}^s(\varphi) = \{\varphi + \psi : \psi \in \text{graph}(\overline{G}_{\varphi,n})\}. \quad (23)$$

Отображения $\overline{G}_{\varphi,n}: H'_n \rightarrow H_n$ определены в окрестности нуля и для любого θ из области определения

$$|\mathcal{D}_\theta \overline{G}_{\varphi,n}|_1 \leq \omega_1. \quad (24)$$

Константа $\omega_1 > 0$ не зависит от $\varphi \in \Lambda$ и определяется величинами ω , β_1 , β_2 (величины β_1 , β_2 определены в лемме 2).

Пусть $\varphi_1, \varphi_2 \in W_{\varepsilon_n}^s(\varphi) \cap \Lambda$. Докажем, что $\varphi_1 = \varphi_2$. Благодаря пункту 4 теоремы 2 без ограничения общности можно считать, что $\varphi_1, \varphi_2 \in W_{\delta_n}^s(\varphi) \cap \Lambda$. Следовательно, в силу (23) достаточно доказать соотношение $\pi'_n(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим $u = u_1 - u_2$, где $u_i(t) = F_t(\varphi_i)$, $i = 1, 2$. Очевидно, $\pi'_n u = v$ есть решение задачи Коши с однородными краевыми условиями I рода:

$$v_t = -Lv + \pi'_n(B(u_1) - B(u_2)). \quad (25)$$

Перенесем первое слагаемое из правой части (25) в левую и умножим полученное соотношение на себя в W . В результате получим

$$|v_t|^2 + \frac{d}{dt}|v|_1^2 + |v|_2^2 = |\pi'_n(B(u_1) - B(u_2))|^2. \quad (26)$$

Так как $v \in H'_n$, то $|v|_2^2 \geq \lambda_{n+1}^2 |v|_1^2$. Для правой части (26) воспользуемся инвариантностью множества Λ , его ограниченностью в W^k , $k \in \mathbb{N}$, формулой конечных приращений и теоремой вложения для элементов W^1 . В итоге, для некоторой константы $\omega_2 > 0$ получаем

$$|\pi'_n(B(u_1) - B(u_2))|^2 \leq \omega_2^2 |u|_1^2 = \omega_2^2 (|v|_1^2 + |\pi_n u|_1^2). \quad (27)$$

В силу пункта 4 теоремы 2 существует $T > 0$ такое, что $F_t(W_{\delta_n}^s(\varphi)) \subset W_{\delta_n}^s(F_t(\varphi))$, $t > T$. Следовательно, из (23), (24) получаем $|\pi_n u|_1 \leq \omega_1 |v|_1$, $t > T$. Таким образом, из (26) вытекает неравенство для $t > T$

$$\frac{d}{dt} |v|_1^2 + \lambda_{n+1}^2 |v|_1^2 - \omega_2^2 (1 + \omega_1^2) |v|_1^2 \leq 0. \quad (28)$$

Если n столь велико, что $\lambda_{n+1}^2 > \omega_2^2 (1 + \omega_1^2)$, то из (28) и ограниченности Λ в W^1 следует $v \equiv 0$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пункт 5 теоремы 2 можно считать нелинейным аналогом утверждений § 3 работы [7].

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Рассуждения настоящей заметки обобщаются на случай систем уравнений вида

$$u_t = -Lu + f(u, u_x, x, t, X), \quad (29)$$

$$\frac{dX}{dt} = g(X, l(u), t). \quad (30)$$

Уравнение (29) есть квазилинейное параболическое уравнение типа (1), а (30) — система обыкновенных дифференциальных уравнений. Функционал $l(u)$ — гладкий.

Физико-энергетический институт
г. Обнинск

Поступило
04.04.91

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
- [2] Mane R. Reduction of semilinear parabolic equation to finite dimensional C^1 -flows // Lect. Notes in Math. 1977. V. 597. P. 361–378.
- [3] Камаев Д. А. О гипотезе Хопфа для одного класса уравнений химической кинетики // Записки науч. семинаров ЛОМИ. 1981. Т. 110. С. 57–73.
- [4] Constantin P., Foias C., Nicolaenko B., Temam R. Integral manifolds and inertial manifolds for dissipative partial differential equations // Appl. Math. Sci. 1989. V. 70.
- [5] Ладыженская О. А., Солонников В. А. О принципе линеаризации и инвариантных многообразиях для задач математической гидродинамики // Записки науч. семинаров ЛОМИ. 1973. Т. 38. С. 46–93.
- [6] Левитан Б. М., Саргсян И. С. Введение в спектральную теорию. М.: Наука, 1970.
- [7] Ладыженская О. А. О динамической системе, порождаемой уравнениями Навье–Стокса // Записки науч. семинаров ЛОМИ. 1972. Т. 27. С. 91–115.
- [8] Нитецки З. Введение в дифференциальную динамику. М.: Мир, 1975.