Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Коньков, О поведении на бесконечности решений одного класса нелинейных уравнений второго порядка, *Матем. заметки*, 1996, том 60, выпуск 1, 30–39

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1801>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 15:21:02

О ПОВЕДЕНИИ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

А. А. Коньков

Пусть Ω – произвольное, возможно неограниченное, открытое подмножество $\mathbb{R}^n$, L – дифференциальный оператор вида

$$L = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \right),$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)$, $a_{ij}(x)$ – измеримые функции такие, что $a_{ij} = a_{ji}$, и для всякого $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ имеет место неравенство

$$\gamma^{-1} |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \xi_i \xi_j \leq \gamma |\xi|^2, \quad \gamma > 0. \quad (1)$$

Пусть также $f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ – измеримая функция, удовлетворяющая условиям

$$\begin{aligned} f(0) &= 0, \\ f(t_2) &\geq f(t_1) \quad \text{при } t_2 \geq t_1, \\ f(t) &> 0 \quad \text{при } t > 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Будет изучаться дифференциальное уравнение

$$Lu = f(|u|) \operatorname{sign} u \quad \text{в } \Omega, \quad (3)$$

решением которого будем называть функцию $u \in W_{2,\text{loc}}^1(\Omega) \cap L_{\infty,\text{loc}}(\Omega)$, удовлетворяющую для всякой $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ интегральному тождеству

$$-\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = \int_{\Omega} f(|u|) \operatorname{sign} u \varphi dx.$$

Везде ниже под $Q_r(x_0)$ и $S_r(x_0)$ мы будем понимать открытый шар и сферу в $\mathbb{R}^n$ радиуса r с центром в точке x_0 . Если $d \subset \mathbb{R}^n$ – измеримое множество, то через $\text{mes } D$ будем обозначать его n -мерную меру Лебега.

Будем говорить, что $u(x)$ удовлетворяет краевому условию Дирихле

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (4)$$

если для всякой функции $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ $\psi u \in \dot{W}_2^1(\Omega)$. Аналогично с этим пишем, что

$$u|_{\partial\Omega \cap Q_R(x_0)} = 0, \quad (5)$$

если для всякой функции $\psi \in C_0^\infty(Q_R(x_0))$ $\psi u \in \dot{W}_2^1(\Omega)$.

Под решением неравенства

$$Lu \geq h \quad \text{в } \Omega,$$

где $h \in L_{2,\text{loc}}(\Omega)$, понимается функция $u \in W_{2,\text{loc}}^1(\Omega)$ такая, что для любой неотрицательной функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ выполнено соотношение

$$- \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx \geq \int_{\Omega} h \varphi dx.$$

Для функций $u_1, u_2 \in W_{2,\text{loc}}^1(\Omega)$ пишем, что $Lu_1 \geq Lu_2$ в Ω , если $L(u_1 - u_2) \geq 0$ в Ω .

Положим $u^+(x) = u(x)$, если $u(x) \geq 0$, и $u^+(x) = 0$ в противном случае. Пишем, что

$$u_1|_{\partial\Omega} \leq u_2|_{\partial\Omega},$$

соответственно

$$u_1|_{\partial\Omega \cap Q_r(x_0)} \leq u_2|_{\partial\Omega \cap Q_r(x_0)},$$

если

$$(u_1 - u_2)^+|_{\partial\Omega} = 0,$$

соответственно

$$(u_1 - u_2)^+|_{\partial\Omega \cap Q_r(x_0)} = 0.$$

Вопросы, рассматриваемые в этой статье, изучались рядом авторов: Кондратьевым и Ландисом [1], Вероном [2], [3], Брезисом и Вероном [4], Келлером [5], Оссерманом [6], Похожаевым [7]. Во всех этих работах существенным является то, что старшая часть уравнения есть оператор Лапласа либо, как это предполагалось в работе [1], функция $f(|u|)$, стоящая в правой части уравнения, удовлетворяет условию:

$$f(|u|) \geq a_0 |u|^{1+q}, \quad q > -1, \quad a_0 > 0.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть

$$u \in W_2^1(\Omega) \cap Q_R(x_0) \cap L_\infty(\Omega \cap Q_R(x_0)), \quad x_0 \in \Omega, \\ M_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \operatorname{ess\,sup}_{Q_\varepsilon(x_0)} u(x) > 0, \quad M_R = \operatorname{ess\,sup}_{Q_R(x_0) \cap \Omega} u(x).$$

Пусть также для функции $u(x)$ имеют место неравенства

$$Lu \geq f(|u|) \operatorname{sign} u \quad \text{в } \Omega \cap Q_R(x_0), \\ u|_{\partial\Omega \cap Q_R(x_0)} \leq 0. \quad (6)$$

Тогда найдутся положительные постоянные α, β , зависящие только от γ, n , такие, что

$$\int_{M_0}^{M_R} dM \{f(\alpha M)(M - M_0)\}^{-1/2} \geq \beta R. \quad (7)$$

Доказательство упирается на следующие два известных результата.

ЛЕММА 1 [8]. Пусть $u(x)$ – неотрицательное решение уравнения $Lu = 0$ в области Ω , расположенной в шаре $Q_R(x_0)$, имеющей предельные точки на границе шара и содержащей точку x_0 . Допустим также, что $u(x)$ обращается в нуль на той части границы области Ω , которая расположена строго внутри шара $Q_R(x_0)$, тогда существует константа $\sigma_0 > 0$, зависящая от γ и n , такая, что если

$$\operatorname{mes} \Omega < \sigma_0 R^n$$

то

$$\sup_{\Omega} u > \exp(\alpha R^{n/(n-1)}) / (\operatorname{mes} \Omega)^{1/(n-1)} u(x_0),$$

где $\alpha > 0$ – константа, зависящая от γ и n .

Из принципа максимума следует, что эта лемма справедлива и для решения неравенства $Lu \geq 0$.

ЛЕММА 2 ([9], см. также [10]). Пусть Ω – открытое множество, расположенное между сферами $S_{r_1}(x_0)$ и $S_{r_2}(x_0)$, $0 < r_1 < r_2$; скажем, что $(n-1)$ -мерная поверхность Σ , лежащая между $S_{r_1}(x_0)$ и $S_{r_2}(x_0)$, разделяет сферы $S_{r_1}(x_0)$ и $S_{r_2}(x_0)$ в Ω , если всякая непрерывная кривая, один конец которой принадлежит $S_{r_1}(x_0)$, другой – $S_{r_2}(x_0)$, а внутренние точки лежат в Ω (коль скоро такая кривая существует), необходимо пересекает Σ .

Пусть в Ω определена симметрическая матрица $\|a_{ij}(x)\|$, $a_{ij} \in C^\infty$, и квадратичная форма $\sum_{i,j} a_{ij} \xi_i \xi_j$ удовлетворяет

неравенству (2), тогда существует константа b_0 , зависящая от γ и n , такая, что для любой функции $v \in C^2(\Omega)$ найдется поверхность Σ , разделяющая $S_{r_1}(x_0)$ и $S_{r_2}(x_0)$ в Ω , причем

$$\int_{\Sigma} \left| \frac{\partial v}{\partial \nu} \right| ds \leq b_0 \frac{\text{osc}_{\Omega} v \cdot \text{mes } \Omega}{(r_2 - r_1)^2},$$

где $\partial v / \partial \nu$ – производная по конормали, определяемой матрицей $\|a_{ij}\|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Выбирая последовательность $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ бесконечно гладких функций, удовлетворяющих условиям (2), сходящуюся почти всюду к функции f , и такую, что $\forall t \in [0, +\infty)$

$$f_k(t) \leq f(t), \quad k = 1, 2, \dots,$$

будем, очевидно, иметь

$$Lu \geq f_k(|u|) \text{sign } u \quad \text{в } \Omega \cap Q_R(x_0), \quad k = 1, 2, \dots$$

Следовательно, если неравенство (7) удастся установить для бесконечно гладких функций f_k , то, переходя в (7) к пределу при $k \rightarrow \infty$, его справедливость удастся установить и для f .

Определим функцию $\tilde{u}(x)$ как решение следующей краевой задачи

$$\begin{aligned} L\tilde{u} &= f(|\tilde{u}|) \text{sign } \tilde{u} \quad \text{в } \Omega \cap Q_R(x_0), \\ \tilde{u}|_{\partial(\Omega \cap Q_R(x_0))} &= u. \end{aligned}$$

Согласно [11, гл. 5] $\tilde{u}(x)$ существует и является непрерывной по Гёльдеру функцией в области $\Omega \cap Q_R(x_0)$. В силу принципа максимума имеем: $\tilde{u}(x) \geq u(x)$ почти всюду в $\Omega \cap Q_R(x_0)$, тогда, очевидно, будет выполнено следующее неравенство

$$\tilde{u}(x_0) \geq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{ess sup}_{Q_{\varepsilon}(x_0)} u(x).$$

С другой стороны, согласно [11, с. 371]

$$\sup_{\Omega \cap Q_R(x_0)} \tilde{u}(x) \leq \text{ess sup}_{\Omega \cap Q_R(x_0)} u(x).$$

Таким образом, если оценка (7) справедлива для функции $\tilde{u}(x)$, то она будет также справедлива и для $u(x)$.

Следовательно, не ограничивая общности, мы можем все неравенства в условии (6) заменить на равенства, предполагая при этом, что для всякого

$x \in \Omega \cap Q_R(x_0)$ $u(x) > 0$ (так как мы всегда вместо множества Ω можем взять $\Omega^+ = \{x \in \Omega \mid u(x) > 0\}$).

Заметим далее, что утверждение теоремы достаточно доказать в предположении, что область Ω имеет бесконечно гладкую границу, а коэффициенты $a_{ij}(x)$ оператора L , а также функция $u(x)$, являются бесконечно гладкими. В общем случае утверждение теоремы получается предельным переходом полностью аналогично тому, как это делалось в работе [1, с. 348].

1) Предположим, что $M_R \leq 2M_0$, и пусть кроме этого выполнено условие $M_R - M_0 < M_0/2$. Положим

$$v(x) = u(x) + M_R - 2M_0,$$

тогда будем иметь

$$v(x_0) = M_R - M_0,$$

а также

$$\sup_{Q_R(x_0) \cap \Omega} v(x) = 2(M_R - M_0) = 2v(x_0). \quad (8)$$

Пусть $\omega = \{x \in \Omega \mid v(x) > 0\}$. Согласно лемме 1 найдется постоянная σ , зависящая только от n, γ , такая, что

$$\text{mes}(\omega \cap Q_{R/2}(x_0)) \geq \sigma R^n. \quad (9)$$

В противном случае получим противоречие с условием (8).

Согласно лемме 2 существует поверхность Σ , разделяющая сферы $S_R(x_0)$ и $S_{R/2}(x_0)$ в $D = \omega \setminus \overline{Q_{R/2}(x_0)}$ такая, что

$$b_0 \frac{\text{osc}_D v \cdot \text{mes } D}{(R/2)^2} \geq \int_{\Sigma} \left| \frac{\partial v}{\partial \nu} \right| ds.$$

Поверхность Σ разбивает множество $\omega \cap Q_R(x_0)$ на два непересекающихся подмножества ω_1 и ω_2 , одно из которых, пусть это будет ω_1 , содержит множество $Q_{R/2}(x_0) \cap \omega$. В силу строгого принципа минимума имеем

$$\int_{\partial \omega_1 \setminus \Sigma} \frac{\partial v}{\partial \nu} ds \leq 0,$$

где ν – внешняя по отношению к ω_1 конормаль, определяемая матрицей $\|a_{ij}\|$, тогда

$$\int_{\partial \omega_1} \frac{\partial v}{\partial \nu} ds \leq \int_{\Sigma} \frac{\partial v}{\partial \nu} ds.$$

Таким образом, имеет место неравенство

$$\int_{\partial\omega_1} \frac{\partial u}{\partial \nu} ds = \int_{\partial\omega_1} \frac{\partial v}{\partial \nu} ds \leq b_0 \frac{\text{osc}_D v \cdot \text{mes } D}{(R/2)^2}. \quad (10)$$

С другой стороны, применяя теорему Грина, получим

$$\begin{aligned} \int_{\partial\omega_1} \frac{\partial u}{\partial \nu} ds &= \int_{\omega_1} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) dx \\ &\geq \text{mes}(\omega \cap Q_{R/2}(x_0)) f\left(\frac{M_0}{2}\right). \end{aligned} \quad (11)$$

Последнее неравенство следует из включения $\omega \cap Q_{R/2}(x_0) \subset \omega_1$, а также из того факта, что для всякого $x \in \omega$ $u(x) \geq M_0/2$.

Комбинируя вместе (9), (10), и (11), учитывая при этом очевидное неравенство

$$\text{mes } D \leq s_{n-1} R^n$$

где $s_{n-1} - (n-1)$ -мерный объем единичной сферы в $\mathbb{R}^n$, находим, что

$$M_R - M_0 \geq bR^2 f\left(\frac{M_0}{2}\right) \geq bR^2 f\left(\frac{M_R}{4}\right), \quad (12)$$

где положительная постоянная b зависит только от γ, n .

Пусть теперь $M_R < 2M_0$, и при этом $M_R - M_0 \geq M_0/2$. Полагая на этот раз

$$v(x) = u(x) - \frac{M_0}{2}$$

и повторяя без изменения все предыдущие рассуждения, будем, очевидно, иметь

$$M_R - \frac{M_0}{2} \geq b_1 R^2 f\left(\frac{M_R}{4}\right),$$

где положительная постоянная b_1 зависит только от γ, n . В то же время

$$3(M_R - M_0) \geq M_R - \frac{M_0}{2},$$

и, таким образом, мы вновь приходим к неравенству (12).

Для доказательства соотношения (7) заметим, что в силу монотонности функции f справедлива следующая оценка

$$\int_{M_0}^{M_R} dM \left\{ f\left(\frac{M}{4}\right) (M - M_0) \right\}^{-1/2} \geq 2 \left(f\left(\frac{M_R}{4}\right) \right)^{-1/2} (M - M_0)^{1/2}.$$

Осталось, наконец, воспользоваться неравенством (12), и теорема доказана в случае, когда $M_R \leq 2M_0$.

2) Предположим теперь, что $M_R > 2M_0$. Пусть k – наименьшее натуральное число такое, что $M_R/2^{k+1} < M_0$. Обозначим $M^{(i)} = M_R/2^i$, $i = 0, \dots, k-1$. Положим также $R^{(0)} = R$, $M^{(k)} = u(x_0)$ и в случае, когда $k > 1$, выберем положительные вещественные числа $R^{(i)}$ и соответственно точки $x^{(i)} \in S_{R^{(i)}}(x_0)$, $i = k-1, \dots, 1$, таким образом, чтобы

$$u(x^{(i)}) = \sup_{\Omega \cap Q_{R^{(i)}}(x_0)} u(x) = M^{(i)}.$$

Повторяя рассуждения, приведенные в пункте 1), с той лишь разницей, что вместо множества $\Omega \cap Q_R(x_0)$ теперь следует рассматривать $\Omega \cap Q_{R^{(k-1)}}(x_0)$, будем, очевидно, иметь

$$M^{(k-1)} - M^{(k)} = b(R^{(k-1)})^2 f\left(\frac{M^{(k-1)}}{4}\right). \quad (13)$$

Аналогично, в случае, когда $k > 1$, повторяя рассуждения, приведенные в пункте 1), с той лишь разницей, что вместо $\Omega \cap Q_R(x_0)$ теперь следует взять множество $Q_{R^{(i-1)}-R^{(i)}}(x^{(i)})$, соответственно вместо точки x_0 – точку $x^{(i)}$, $i = k-1, \dots, 1$, приходим к следующему неравенству

$$M^{(i-1)} - M^{(i)} \geq b(R^{(i-1)} - R^{(i)})^2 f\left(\frac{M^{(i-1)}}{4}\right). \quad (14)$$

В силу очевидного соотношения

$$\frac{1}{2} \leq \frac{M^{(k-1)} - M^{(k)}}{M^{(k-1)}} \leq \frac{3}{4}, \quad (15)$$

неравенство (13) может быть переписано в следующем виде

$$\left(\frac{M^{(k-1)}}{f(M^{(k-1)}/4)}\right)^{1/2} \geq \frac{2}{\sqrt{3}} b R^{(k-1)}.$$

Откуда, снова воспользовавшись соотношением (15), будем иметь

$$\frac{M^{(k-1)} - M^{(k)}}{(f(M^{(k-1)}/4)M^{(k-1)})^{1/2}} \geq \frac{1}{\sqrt{3}} b R^{(k-1)}.$$

Совершенно аналогично при $k > 1$ в силу очевидного соотношения $M^{(i-1)} - M^{(i)} = M^{(i-1)}/2$, $i = k-1, \dots, 1$, из (14) получаем

$$\frac{M^{(i-1)} - M^{(i)}}{(f(M^{(i-1)}/4)M^{(i-1)})^{1/2}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} b (R^{(i-1)} - R^{(i)}).$$

Таким образом, приходим к выводу, что справедливо следующее неравенство

$$\sum_{i=1}^k \frac{M^{(i-1)} - M^{(i)}}{(f(M^{(i-1)})/4)M^{(i-1)}}^{1/2} \geq bR.$$

Оценивая сумму ряда, стоящего в левой части, сверху интегралом, будем иметь

$$\int_{M_0}^{M_R} dM \left\{ f\left(\frac{M}{4}\right)M \right\}^{-1/2} \geq bR.$$

Откуда непосредственно следует (7).

Определим, далее, функции $G: [1, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, $g: (0, 1] \rightarrow [0, +\infty)$, полагая

$$G(M) = \int_1^M \{f(t)t\}^{-1/2} dt,$$

$$g(M) = \int_M^1 \{f(t)(t-M)\}^{-1/2} dt.$$

ТЕОРЕМА 2. *Задача Дирихле (3), (4) имеет единственное решение $u = 0$ в классе функций, удовлетворяющих условию*

$$u(x) = o(G^{-1}(k|x|)) \quad \text{при} \quad |x| \rightarrow +\infty,$$

где k – некоторая положительная вещественная постоянная, зависящая только от γ, n .

В случае, когда $G(+\infty) < +\infty$, всякое решение задачи Дирихле (3), (4) равно нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть в области $\Omega \cap Q_R(x_0)$ существует нетривиальное решение краевой задачи (3)–(5). Без ограничения общности мы можем считать, что $u(x_0) > 0$, в противном случае мы могли бы вместо $u(x)$ взять функцию $-u(x)$. Применяя далее утверждение теоремы 1, получаем, что найдутся положительные вещественные числа C_1, C_2, R_0 такие, что для всякого $R > R_0$ имеет место неравенство

$$G(C_1 M_R) \geq C_2 R.$$

ТЕОРЕМА 3. *Предположим, что $G(+\infty) < +\infty$, причем $u(x)$ является решением уравнения (3) в области $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus K$, где K – компактное множество (краевые условия на $\partial\Omega$ при этом не имеют никакого значения), тогда*

$$|u(x)| = O(g^{-1}(k|x|)) \quad \text{при } |x| \rightarrow \infty,$$

где k – некоторая положительная вещественная постоянная, зависящая только от γ, n .

В случае, когда $g(+0) < +\infty$, всякое решение уравнения (3) в области $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus K$ равно нулю при $|x| > R_0$, где R_0 достаточно велико.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сперва множество $\Omega^+ = \{x \in \Omega \mid u(x) > 0\}$, которое, как это следует из [11, гл. 5], является открытым. Очевидно, что для всякого $x \in \Omega^+$ будем при этом иметь

$$u|_{\partial\Omega^+ \cap Q_R(x)} = 0,$$

где $R = |x|$. Будем предполагать, что Ω^+ связно, в противном случае рассмотрим в отдельности каждую компоненту связности этого множества, и что Ω^+ неограничено, иначе утверждение теоремы становится очевидным.

Из условия $G(+\infty) < +\infty$ имеем, что для некоторой монотонно возрастающей последовательности вещественных чисел $\{t_m\}_{m=1}^\infty$ имеет место предельное соотношение

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{t_m}{f(\alpha t_m)} = 0.$$

Пусть функция $u(x)$ неограничена на множестве Ω^+ , тогда существует последовательность точек $x_m \in \Omega^+$, $m = 1, 2, \dots$, такая, что $u(x_m) = t_m$. Очевидно, что при этом $R_m = |x_m| \rightarrow +\infty$ при $m \rightarrow \infty$. Применяя теорему 1 к множеству $\Omega^+ \cap Q_{R_m}(x_m)$, будем иметь

$$\beta R_m \leq \int_{t_m}^{+\infty} dt \{f(\alpha t)(t - t_m)\}^{-1/2}. \quad (16)$$

Интеграл, стоящий в правой части, очевидным образом, допускает следующую оценку

$$\int_{t_m}^{+\infty} dt \{f(\alpha t)(t - t_m)\}^{-1/2} \leq \int_{2t_m}^{+\infty} dt \left\{ f(\alpha t) \frac{t}{2} \right\}^{-1/2} + 2 \left(\frac{t_m}{f(\alpha t_m)} \right)^{1/2},$$

и поэтому стремится к нулю при $m \rightarrow \infty$. С другой стороны, левая часть в неравенстве (16) стремится к бесконечности при $m \rightarrow \infty$. Противоречие.

Таким образом, применяя теорему 1 к множеству $\Omega^+ \cap Q_R(x)$, $R = |x|$, будем иметь, что $u(x)$ обязательно должно стремиться к нулю при $|x| \rightarrow +\infty$, и кроме этого для некоторых положительных вещественных чисел C_1, C_2, R_1 должна быть справедлива оценка

$$g(C_1|u(x)|) \geq C_2|x| \quad \text{при } |x| > R_1. \quad (17)$$

Аналогичные рассуждения в том случае, когда рассматривается множество $\Omega^- = \{x \in \Omega \mid u(x) < 0\}$, получаются заменой функции $u(x)$ на $-u(x)$.

Заметим также, что неравенство (17) может быть выполнено при сколь угодно большом $R = |x|$ только в том случае, если $g(+0) = +\infty$, поэтому если $g(+0) < +\infty$, то функция $u(x)$ обязана равняться нулю при $|x| > R_0$, где R_0 — достаточно велико.

В заключение автор выражает свою искреннюю благодарность профессору В. А. Кондратьеву за постановку задачи и внимание, оказанное автору в процессе ее решения.

Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана

Поступило
15.02.94

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Кондратьев В. А., Ландис Е. М. О качественных свойствах решений одного нелинейного уравнения второго порядка // Матем. сб. 1988. Т. 135 (177). № 3. С. 346–360.
- [2] Veron L. Singular solutions of some nonlinear elliptic equations // Nonlinear Anal. 1981. V. 5. № 3. P. 225–242.
- [3] Veron L. Comportement asymptotique des solutions d'equations elliptiques semi-lineaires dans $\mathbb{R}^n$ // Ann. Mat. Pura Appl. 1981. V. 127. P. 25–50.
- [4] Brezis H., Veron L. Removable singularities for some nonlinear elliptic equations // Arch. Rational Mech. Anal. 1980. V. 75. № 1. P. 1–6.
- [5] Keller J. B. On solution of $\Delta u = f(u)$ // Comm. Pure Appl. Math. 1957. V. 10. № 4. P. 503–510.
- [6] Osserman R. On the inequality $\Delta u \geq f(u)$ // Pacif. J. Math. 1957. V. 7. № 4. P. 1641–1647.
- [7] Похожаев С. И. О краевой задаче для уравнения $\Delta u = u^2$ // Докл. АН СССР. 1961. Т. 140. № 3. С. 518–521.
- [8] Ландис Е. М. Некоторые вопросы качественной теории эллиптических уравнений второго порядка // УМН. 1963. Т. 18. № 1. С. 3–62.
- [9] Гервер М. Л., Ландис Е. М. Одно обобщение теоремы о среднем для многих переменных // Докл. АН СССР. 1962. № 4. С. 761–764.
- [10] Ландис Е. М. Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов. М.: Наука, 1971.
- [11] Ладыженская О. А., Уралцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1964.