Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. А. Крутицкий, Вторая начально-краевая задача для уравнения гравитационно-гироскопических волн во внешней области, *Матем. заметки*, 1996, том 60, выпуск 1, 40–57

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1802>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 18:35:00

ВТОРАЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГРАВИТАЦИОННО-ГИРОСКОПИЧЕСКИХ ВОЛН ВО ВНЕШНЕЙ ОБЛАСТИ

П. А. Крутицкий

Уравнение гравитационно-гироскопических волн является эволюционным уравнением составного типа 4-го порядка с двумя пространственными переменными

$$\frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x_1^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x_2^2} + \omega_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \omega_2^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0,$$

где константы $\omega_1, \omega_2 \geq 0$.

В работах [1]–[3] изучалась разрешимость внешних начально-краевых задач для этого уравнения без условий на бесконечности и без анализа вопросов единственности. В [4] для уравнений составного типа изучались задачи в полупространстве. Различные задачи для уравнений составного типа в случае трех пространственных переменных изучались в [5], [6].

В [7]–[9] были получены решения ряда начально-краевых задач для уравнения гравитационно-гироскопических волн во внешних многосвязных областях, представляющих собой систему разрезов на плоскости. Подобные задачи описывают нестационарные внутренние волны, возбуждаемые движениями нескольких тел в стратифицированной вращающейся жидкости.

В настоящей работе изучаются вопросы существования и единственности второй внешней начально-краевой задачи для уравнения гравитационно-гироскопических волн с различными типами условий на бесконечности. Выявляется роль условий на бесконечности для корректной постановки этой задачи. Доказательство разрешимости проводится новым теоретико-функциональным методом, который ранее в подобных задачах не применялся.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96–01–01411.

§ 1. Постановка задачи и теорема единственности

На плоскости в декартовых координатах $x = (x_1, x_2)$ рассмотрим внешнюю связную область D с границей $\Gamma \in C^{2,0}$. Будем считать, что Γ состоит из N простых замкнутых кривых $\Gamma_1, \dots, \Gamma_N$, не имеющих общих точек. За положительное направление обхода выберем то, которое оставляет область D справа. Будем считать, что граница Γ параметризована $x(s) = (x_1(s), x_2(s))$, и в качестве параметра s выступает длина дуги, отсчитываемая от некоторой фиксированной точки на каждом замкнутом участке Γ . Предположим, что s возрастает в положительном направлении обхода и между значениями s и точками Γ существует взаимно-однозначное соответствие (за исключением отмеченных выше фиксированных точек). Через $\mathbf{n}$ обозначим внешнюю по отношению к области D нормаль на Γ . Введем несколько обозначений и определений, которые понадобятся в дальнейшем.

Пусть $u(t, x) = u(t, x_1, x_2)$ – достаточно гладкая функция при $t \geq 0$, $x \in D$. Полагая, что $\mathbf{n}$ – внешняя нормаль в точке $x(s) \in \Gamma$, определим в точках $\bar{x} \in D$ дифференциальный оператор $\mathcal{N}_{tx}$ равенством

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{tx}u(t, \bar{x}) &= \cos(\mathbf{n}x_1) \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_1^2 \right) u_{x_1}(t, \bar{x}) \\ &\quad + \cos(\mathbf{n}x_2) \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_2^2 \right) u_{x_2}(t, \bar{x}) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} u(t, \bar{x}) + \omega_1^2 \cos(\mathbf{n}x_1) u_{x_1}(t, \bar{x}) + \omega_2^2 \cos(\mathbf{n}x_2) u_{x_2}(t, \bar{x}), \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $\cos(\mathbf{n}x_j)$ – косинус угла между нормалью $\mathbf{n}$ и направлением оси Ox_j ($j = 1, 2$).

Через $\mathcal{N}_{tx}u(t, x(s))$ обозначим предельное значение выражения $\mathcal{N}_{tx}u(t, \bar{x})$ при $\bar{x}$ стремящемся к $x(s) \in \Gamma$ по нормали $\mathbf{n}$, если предел существует по всем $x(s) \in \Gamma$. Формальное выражение для $\mathcal{N}_{tx}u(t, x)$ на Γ получается из (1.1) заменой $\bar{x}$ на x .

Будем говорить, что функция $u(t, x)$, определенная в $[0, \infty) \times \bar{D}$, принадлежит классу гладкости G , если

- 1) $u, u_t \in C^0([0, \infty) \times \bar{D})$; $\nabla u, \nabla u_t \in C^0([0, \infty) \times D)$; $\frac{\partial^k}{\partial t^k} \frac{\partial^p}{\partial x_j^p} u \in C^0((0, \infty) \times D)$, $k, p = 0, 1, 2$, $j = 1, 2$;
- 2) в каждой точке Γ существует выражение $\mathcal{N}_{tx}u(t, x(s))$, понимаемое в смысле предельного перехода по нормали к границе равномерно по всем $x(s) \in \Gamma$. Отсюда $\mathcal{N}_{tx}u(t, x(s)) \in C^0(\Gamma)$ при каждом $t \geq 0$.

Введем три класса функций $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ и $\mathcal{M}_3$ с различным поведением на бесконечности. Функция $u(t, x) \in \mathcal{M}_1$, если существует такие функции

$Q_1(t), Q_2(t) \in C^2[0, \infty)$ и $q_1(t), q_2(t) \in C^0[0, \infty)$, что при $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \rightarrow \infty$ справедливы неравенства

$$\left| \frac{\partial^j}{\partial t^j} u(t, x) - \frac{\partial^j}{\partial t^j} Q_1(t) \ln |x| - \frac{\partial^j}{\partial t^j} Q_2(t) \right| \leq q_1(t) |x|^{-1},$$

$$\left| \frac{\partial^j}{\partial t^j} u_{x_k}(t, x) \right| \leq q_2(t) |x|^{-1},$$

где $j = 0, 1, 2, k = 1, 2$.

Функция $u(t, x) \in \mathcal{M}_2$, если существуют такие функции $q_1(t), q_2(t) \in C^0[0, \infty)$, что при $|x| \rightarrow \infty$ справедливы неравенства

$$\left| \frac{\partial^j}{\partial t^j} u(t, x) \right| \leq q_1(t), \quad \left| \frac{\partial^j}{\partial t^j} u_{x_k}(t, x) \right| \leq q_2(t) |x|^{-2},$$

где $j = 0, 1, 2, k = 1, 2$.

Определение класса $\mathcal{M}_3$ формулируется так же, как и определение класса $\mathcal{M}_2$, но вместо первого неравенства из определения класса $\mathcal{M}_2$ должно выполняться следующее неравенство:

$$\left| \frac{\partial^j}{\partial t^j} u(x, t) \right| \leq q_1(t) |x|^{-1}, \quad j = 0, 1, 2.$$

Уравнение внутренних гравитационно-гироскопических волн в стратифицированной вращающейся жидкости в случае 2-х пространственных переменных имеет вид [5], [10]–[12]

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta u + \omega_1^2 u_{x_1 x_1} + \omega_2^2 u_{x_2 x_2} = 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \quad (1.2)$$

где $\omega_1 \geq 0$ – частота Вейселя–Брента, $\omega_2 \geq 0$ – удвоенная частота вращения вокруг оси Ox_2 .

Через $u = u(t, x)$ обозначена потенциальная функция, с помощью которой можно найти давление и поле скоростей в жидкости [12].

Сформулируем начально-краевые задачи $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \mathfrak{K}_3$.

ЗАДАЧА $\mathfrak{K}_1$. Найти функцию $u(t, x)$ из класса G , удовлетворяющую в классическом смысле уравнению (1.2) в области $(0, \infty) \times D$ начальным условиям

$$u(0, x) = u_t(0, x) = 0, \quad x \in D, \quad (1.3)$$

граничному условию на Γ

$$\mathcal{N}_{tx} u(t, x(s)) = f(t, s), \quad t \geq 0, \quad (1.4)$$

и такую, что $u(t, x) \in \mathcal{M}_1$.

ЗАДАЧА $\mathcal{K}_2$ формулируется так же, как и задача $\mathcal{K}_1$ с заменой условия $u(t, x) \in \mathcal{M}_1$ на условие $u(t, x) \in \mathcal{M}_2$.

ЗАДАЧА $\mathcal{K}_3$ формулируется так же, как и задача $\mathcal{K}_1$ с заменой условия $u(t, x) \in \mathcal{M}_1$ на условие $u(t, x) \in \mathcal{M}_3$.

Условия $u(t, x) \in \mathcal{M}_j$ в задаче $\mathcal{K}_j$ ($j = 1, 2, 3$) представляют собой условия на бесконечности. Тем самым, три сформулированные задачи отличаются условиями на бесконечности.

В соответствии с определением класса G выражение, стоящее в левой части (1.4), должно существовать на границе в смысле непрерывной продолжимости на границу по нормали. При этом непрерывная продолжимость ∇u и ∇u_{tt} на Γ не требуется.

С физической точки зрения задача $\mathcal{K}_j$, $j = 1, 2, 3$, описывает возбуждение нестационарных внутренних волн в области D , заполненной стратифицированной вращающейся жидкостью. Волны возбуждаются малыми колебаниями границы области [12], начиная с момента времени $t = 0$.

Задача $\mathcal{K}_1$ описывает открытую физическую систему с источниками на бесконечности. Задачи $\mathcal{K}_2$ и $\mathcal{K}_3$ описывают замкнутую систему без источников на бесконечности.

Ниже, наряду с обычным обозначением интеграла 1-го рода $\int_{\Gamma} \dots dl$, будем использовать обозначение $\int_{\Gamma} \dots ds$, поскольку при обходе Γ в положительном направлении $dl = ds$.

Через K_r обозначим круг достаточно большого радиуса r с центром в начале координат, содержащий целиком границу Γ . Через D_r обозначим пересечение области D и круга K_r .

Изучим вопрос о единственности задач $\mathcal{K}_{1,2,3}$. Справедлива

ЛЕММА 1. *Если u – классическое решение уравнения (1.2) в $(0, \infty) \times D$ и $u \in G$, то для любого $t \geq 0$ и любого достаточно большого r имеют место тождества*

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|\nabla u_t\|_r^2 + \omega_1^2 \|u_{x_1}\|_r^2 + \omega_2^2 \|u_{x_2}\|_r^2) = \int_{\partial D_r} u_t \mathcal{N}_{tx} u \, dl, \quad (1.5)$$

$$\int_{\partial D_r} \mathcal{N}_{tx} u \, dl = 0, \quad (1.6)$$

где норма $\|\cdot\|_r$ берется в пространстве $L_2(D_r)$ и в определении $\mathcal{N}_{tx}$ используется внешняя к D_r нормаль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы 1 в случае, когда граница Γ кусочно-гладкая, а ∇u , ∇u_{tt} непрерывно продолжаемы на Γ , дано в [12]. Все результаты из [12] легко переносятся на рассматриваемый случай, если воспользоваться техникой эквивалентных кривых [13] и учесть, что $\Gamma \in C^{2,0}$.

Непосредственно из леммы 1 вытекает

ТЕОРЕМА 1 (о единственности). 1) Если решение задачи $\mathfrak{K}_1$ существует, то оно определяется с точностью до произвольной аддитивной функции времени $c(t) \in C_0^2[0, \infty)$. 2) Необходимое условие разрешимости задач $\mathfrak{K}_2$ и $\mathfrak{K}_3$ имеет вид

$$\int_{\Gamma} f(t, s) ds = 0, \quad t \geq 0.$$

Если решение задачи $\mathfrak{K}_2$ существует, то оно определяется с точностью до произвольной аддитивной функции времени $c(t) \in C_0^2[0, \infty)$. Если решение задачи $\mathfrak{K}_3$ существует, то оно единственно.

СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА п. 2) теоремы приведена в [12]. Докажем п. 1) с помощью леммы 1. Пусть u – решение однородной задачи $\mathfrak{K}_1$, тогда (1.5) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|\nabla u_t\|_r^2 + \omega_1^2 \|u_{x_1}\|_r^2 + \omega_2^2 \|u_{x_2}\|_r^2) \\ &= \int_{\partial K_r} u_t \mathcal{N}_{tx} u dl = \int_0^{2\pi} u_t \mathcal{N}_{tx} u|_{|x|=r} r d\varphi \\ &= (Q'_1(t) \ln r + Q'_2(t)) \int_0^{2\pi} \mathcal{N}_{tx} u|_{|x|=r} r d\varphi \\ &+ \int_0^{2\pi} [u_t - Q'_1(t) \ln r - Q'_2(t)] \mathcal{N}_{tx} u|_{|x|=r} r d\varphi, \end{aligned}$$

где использованы обозначения из условий на бесконечности для задачи $\mathfrak{K}_1$ (см. определение класса $\mathcal{M}_1$) и введены полярные координаты (r, φ) с центром в начале координат. Первое слагаемое в последнем выражении равно нулю, так как, согласно (1.6)

$$\int_{\partial K_r} \mathcal{N}_{tx} u dl = \int_0^{2\pi} \mathcal{N}_{tx} u|_{|x|=r} r d\varphi = 0, \quad t \geq 0.$$

Второе слагаемое стремится к нулю при $r \rightarrow \infty$. Это следует из условий на бесконечности для задачи $\mathfrak{K}_1$, которые содержатся в определении класса $\mathcal{M}_1$. Таким образом, полагая $r \rightarrow \infty$, получим

$$\|\nabla u_t\|^2 + \omega_1^2 \|u_{x_1}\|^2 + \omega_2^2 \|u_{x_2}\|^2 = 0, \quad t \geq 0,$$

где $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L_2(D)}$. Следовательно, $u = c(t)$ и из условий задачи $\mathfrak{K}_1$ вытекает, что $c(t) \in C_0^2[0, \infty)$. Теорема доказана.

Перейдем к построению классического решения задач $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \mathfrak{K}_3$.

§ 2. Сведение задач к интегральному уравнению

Введем некоторые классы функций. Через $C^k([0, \infty), \mathcal{H})$ обозначим класс k непрерывно-дифференцируемых при $t \geq 0$ абстрактных функций $\Phi(t)$ со значениями в банаховом пространстве $\mathcal{H}$. Кроме того, введем следующий класс абстрактных функций:

$$C_0^k([0, \infty); \mathcal{H}) \\ = \{ \Phi(t) : \Phi(t) \in C^k([0, \infty); \mathcal{H}), \Phi(0) = \Phi'(0) = \dots = \Phi^{(k-1)}(0) = 0 \}.$$

Под обозначением $C^0([0, T]; \mathcal{H})$, где $T > 0$, будем понимать банахово пространство абстрактных функций, норма в котором определяется формулой

$$\| \cdot \|_{C^0([0, T]; \mathcal{H})} = \| \| \cdot \|_{\mathcal{H}} \|_{C^0[0, T]}.$$

Через $C_1^0(\Gamma)$ обозначим множество функций $\mathcal{F}(s)$, каждая из которых принадлежит банаховому пространству $C^0(\Gamma)$ и удовлетворяет условию

$$\int_{\Gamma} \mathcal{F}(s) ds = 0. \quad (2.1)$$

Легко показать, что $C_1^0(\Gamma)$ является банаховым пространством с той же нормой, что и в банаховом пространстве $C^0(\Gamma)$.

В дальнейшем из теории абстрактных функций нам понадобится следующий результат, схема доказательства которого приведена в [14, с. 28–29].

ЛЕММА 2. *Классы функций $C^0([0, \infty), C^0(\Gamma))$ и $C^0([0, \infty) \times \Gamma)$ эквивалентны, т.е. всякая функция из первого класса принадлежит второму и наоборот.*

Перейдем к построению решения задач $\mathfrak{K}_{1,2,3}$.

Поскольку задачи $\mathfrak{K}_2, \mathfrak{K}_3$ отличаются от $\mathfrak{K}_1$ более жесткими условиями на бесконечности, то вначале изучим разрешимость $\mathfrak{K}_1$. Будем предполагать, что функция $f(t, s)$ из граничного условия (1.4) принадлежит классу $C^0([0, \infty); C^0(\Gamma))$. Рассмотрим функцию $V[\bar{\mu}](t, x)$, введенную в [5] и названную динамическим логарифмическим потенциалом для уравнения (1.2):

$$V[\bar{\mu}](t, x) = \int_{\Gamma} \bar{\mu}(t, s) \ln |x - y(s)| ds \\ + \int_0^t \int_{\Gamma} \bar{\mu}(t - \tau, s) H(\lambda(x, y(s)), \tau) ds d\tau, \quad (2.2)$$

где $x = (x_1, x_2)$, $y(s) = (y_1(s), y_2(s)) \in \Gamma$,

$$\begin{aligned} H(\lambda, \tau) &= \int_0^\lambda \sin \xi \tau d\xi = \frac{1}{\tau} [1 - \cos \lambda \tau], \\ \lambda &= \lambda(x, y) = \frac{|x - y|_0}{|x - y|} \\ &= (\omega_1^2 \sin^2 \psi(x, y) + \omega_2^2 \cos^2 \psi(x, y))^{1/2}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} |x - y| &= [(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2]^{1/2}, \\ |x - y|_0 &= (\omega_2^2 (x_1 - y_1)^2 + \omega_1^2 (x_2 - y_2)^2)^{1/2}, \\ \cos \psi(x, y) &= \frac{x_1 - y_1}{|x - y|}, \quad \sin \psi(x, y) = \frac{x_2 - y_2}{|x - y|}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Формулы (2.4) определяют с точностью до $2\pi n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ угол $\psi(x, y)$ между вектором $\vec{y}x = x - y$ и направлением оси Ox_1 .

Относительно плотности $\bar{\mu}(t, s)$ потенциала (2.2) будем предполагать, что она имеет вид

$$\bar{\mu}(t, s) = \int_0^t \int_0^\tau \mu(\tau_1, s) d\tau_1 d\tau = \int_0^\tau (t - \tau) \mu(\tau, s) d\tau,$$

где $\mu(t, s)$ – произвольная функция из класса $(C^0[0, \infty); C^0(\Gamma))$, так что $\bar{\mu}(t, s) \in C_0^2([0, \infty); C^0(\Gamma))$.

Потенциал (2.2) связан с другим потенциалом $W[\mu](t, x)$, введенным в [5] и построенном на сингулярном решении $w_2(t, x)$ для уравнения (1.2) (более подробно см. [5]), так что

$$V[\bar{\mu}](t, x) = 2\pi W[\mu](t, x).$$

Из свойств потенциалов, приведенных в [5], вытекает

ЛЕММА 3. *При любой плотности $\mu(t, s) \in C^0([0, \infty); C^0(\Gamma))$ потенциал (2.2) принадлежит классу G , удовлетворяет в области $(0, \infty) \times D$ в классическом смысле уравнению (1.2), начальным условиям (1.3), а также принадлежит классу $\mathcal{M}_1$. Более того, существуют такие функции $\bar{q}_1(t), \bar{q}_2(t) \in C^0[0, \infty)$, что при $|x| \rightarrow \infty$ выполнены оценки*

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^j}{\partial t^j} V[\bar{\mu}](t, x) - \frac{\partial^j}{\partial t^j} \int_\Gamma \bar{\mu}(t, s) ds \ln |x| \right| &\leq \bar{q}_1(t) |x|^{-1}, \\ \left| \frac{\partial^j}{\partial t^j} \frac{\partial}{\partial x_k} V[\bar{\mu}](t, x) - \frac{\partial^j}{\partial t^j} \int_\Gamma \bar{\mu}(t, s) ds \frac{x_k}{|x|^2} \right| &\leq \bar{q}_2(t) |x|^{-2}, \end{aligned}$$

где $j = 0, 1, 2$, $k = 1, 2$.

Справедливость оценок проверяется непосредственно.

Таким образом, потенциал (2.4) удовлетворяет всем условиям задачи $\mathfrak{K}_1$, кроме граничных условий (1.4). Выберем плотность $\mu(t, s)$ так, чтобы удовлетворить этим условиям. Предельные значения потенциала (2.2) при стремлении к границе по нормали даются формулой

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{tx} V[\bar{\mu}](t, x(s)) \\ = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_1^2 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_2^2 \right) \left\{ \frac{1}{6} t^3 * [-\pi \mu(t, s) - A\mu(t, s) + B\mu(t, s)] \right\}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где знаком $*$ обозначается операция свертки по времени, так что для двух функций времени $a(t)$, $b(t)$

$$a(t) * b(t) = \int_0^t a(t - \tau) b(\tau) d\tau = \int_0^t a(\tau) b(t - \tau) d\tau.$$

Через A и B обозначены следующие операторы:

$$\begin{aligned} A\mu(t, s) &= \int_{\Gamma} \mu(t, \sigma) \mathcal{A}(x(s), y(\sigma)) d\sigma, \\ \mathcal{A}(x(s), y(\sigma)) &= -\frac{\partial}{\partial n_x} \ln |x(s) - y(\sigma)| = \frac{\cos \theta(\sigma, s)}{|x(s) - y(\sigma)|} \\ &= -\frac{\sin[\psi(x(s), y(\sigma)) - \alpha(s)]}{|x(s) - y(\sigma)|}, \\ B\mu(t, s) &= B_1\mu(t, s) - B_2(\mu(t, s)), \\ B_1\mu(t, s) &= \int_0^t \int_{\Gamma} \mu(\tau, \sigma) \mathcal{B}_1(t - \tau, x(s), y(\sigma)) d\sigma d\tau, \\ \mathcal{B}_1(t, x(s), y(\sigma)) &= \lambda(x(s), y(\sigma)) \mathcal{A}(x(s), y(\sigma)) \sin(t\lambda(x(s), y(\sigma))), \\ B_2\mu(t, s) &= \int_0^t \mathcal{B}_2(t - \tau) \mu(\tau, s) d\tau, \\ \mathcal{B}_2(t) &= \pi(-\omega_1 J_1(\omega_1 t) - \omega_2 J_1(\omega_2 t) + \omega_1 \omega_2 J_1(\omega_1 t) * J_1(\omega_2 t)), \end{aligned}$$

где $J_1(\xi)$ – функция Бесселя 1-го порядка, $\lambda(x, y)$, $\psi(x, y)$ даются формулами (2.5), (2.6), $\theta(\sigma, s)$ – угол между вектором $\vec{xy} = y(\sigma) - x(s)$ и направлением внешней нормали $\mathbf{n}$ в точке $x(s)$, так что

$$\theta(\sigma, s) = \psi(x(s), y(\sigma)) - \alpha(s) + \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}.$$

Через $\alpha(s)$ обозначен угол между направлением вектора касательной к Γ в точке $x(s)$, указывающего положительное направление обхода, и направлением оси Ox_1 , так что

$$\cos \alpha(s) = x'_1(s), \quad \sin \alpha(s) = x'_2(s).$$

Подставляя выражение для $\mathcal{N}_t V[\bar{u}](t, x(s))$ в граничное условие (1.4) и обращая внешний оператор по времени, приходим к интегральному уравнению относительно функции $\mu(t, s) \in C^0([0, \infty); C^0(\Gamma))$:

$$-\pi\mu(t, s) - A\mu(t, s) + B\mu(t, s) = F(t, s), \quad (2.6)$$

где

$$F(t, s) = (1 - \omega_1 \sin(\omega_1 t)*) (1 - \omega_2 \sin(\omega_2 t)*) f(t, s) \in C^0([0, \infty); C_1^0(\Gamma)). \quad (2.7)$$

Изучим некоторые свойства операторов A и B .

ЛЕММА 4. 1) Функции $\lambda(x(s), y(\sigma)), \mathcal{A}(x(s), y(\sigma)) \in C^0(\Gamma \times \Gamma)$, $\mathcal{B}_1(t, x(s), y(\sigma)) \in C^0([0, \infty) \times \Gamma \times \Gamma)$, $\mathcal{B}_2(t) \in C^0[0, \infty)$.

2) Оператор A компактный как оператор, действующий из $C^0(\Gamma)$ в $C^0(\Gamma)$. Оператор A ограничен как оператор, действующий в банаховом пространстве $C^0([0, T]; C^0(\Gamma))$ при любом $T > 0$.

3) Для функций $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} |\mathcal{B}_1(t, x(s), y(\sigma))| &< C(\mathcal{B}_1), \quad t \geq 0, \quad s, \sigma \in \Gamma, \\ |\mathcal{B}_2(t)| &< C(\mathcal{B}_2)(1 + t), \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

где $C(\mathcal{B}_1), C(\mathcal{B}_2)$ – константы.

4) Оператор B действует из $C^0([0, \infty); C^0(\Gamma))$ в $C^0([0, \infty); C^0(\Gamma))$.

5) Оператор B компактен как оператор, действующий в $C^0([0, T]; C^0(\Gamma))$ при любом $T > 0$.

6) Если $\mu(t, s) \in C^0([0, \infty); C^0(\Gamma))$ то справедливо тождество

$$\int_{\Gamma} \{-\pi\mu(t, s) - A\mu(t, s) + B\mu(t, s)\} ds = -2\pi \int_{\Gamma} \mu(t, s) ds - 2B_2 \int_{\Gamma} \mu(t, s) ds.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО п. 1) проводится непосредственной проверкой с использованием техники, развитой в [15], [16]. Докажем п. 2). Оператор A компактен при действии из $C^0(\Gamma)$ в $C^0(\Gamma)$ как интегральный оператор с непрерывным ядром [17, с. 321]. Пусть $h(t, s) \in C^0([0, T]; C^0(\Gamma))$, тогда функция $Ah(t, s)$ непрерывна при каждом t по s . Кроме того, $\|Ah(t, \cdot) - Ah(t', \cdot)\|_{C^0(\Gamma)} \leq \text{const} \|h(t, \cdot) - h(t', \cdot)\|_{C^0(\Gamma)}$. С учетом гладкости функции $h(t, s)$ отсюда следует, что $Ah(t, s) \in C^0([0, T]; C^0(\Gamma))$. Таким образом, оператор A действует из $C^0([0, T]; C^0(\Gamma))$ в $C^0([0, T]; C^0(\Gamma))$. Из очевидного неравенства

$$\|Ah(\cdot, \cdot)\|_{C^0([0, T]; C^0(\Gamma))} \leq \text{const} \|h(\cdot, \cdot)\|_{C^0([0, T]; C^0(\Gamma))}$$

вытекает ограниченность оператора A при действии из $C^0([0, T]; C^0(\Gamma))$ в $C^0([0, T]; C^0(\Gamma))$. Тем самым п. 2) доказан. Справедливость п. 3) вытекает из п. 1) и явного вида функций $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$.

Согласно п. 1) ядра операторов B_1 , B_2 непрерывны. Из явного вида этих операторов следует, что они действуют из $C^0([0, \infty) \times \Gamma)$ в $C^0([0, \infty) \times \Gamma)$. Так же действует и оператор B . Применяя теперь лемму 2, докажем п. 4).

Перейдем к п. 5). Докажем компактность операторов B_1 и B_2 в банаховом пространстве $C^0([0, T]; C^0(\Gamma))$, тогда и оператор B будет компактным в нем [18, с. 65].

Пусть M – ограниченное множество абстрактных функций $h(t, s)$ в банаховом пространстве $C^0([0, T]; C^0(\Gamma))$, т.е. существует константа C_M , такая, что

$$\|h(\cdot, \cdot)\|_{C^0([0, T]; C^0(\Gamma))} < C_M, \quad h \in M.$$

Операторы B_1 и B_2 будут компактными, если множества $B_1 M$, $B_2 M$ компактны. Для выяснения компактности этих множеств воспользуемся следующим аналогом теоремы Арцела для абстрактных функций [14, с. 32].

УТВЕРЖДЕНИЕ. Для того, чтобы множество $\mathfrak{M} \subset C^0([0, T]; C^0(\Gamma))$ было компактным, необходимо и достаточно выполнение двух условий.

1. Функции множества $\mathfrak{M}$ равномерно ограничены, т.е. существует такая константа C , что

$$\|g(\cdot, \cdot)\|_{C^0([0, T]; C^0(\Gamma))} < C, \quad g(t, s) \in \mathfrak{M}.$$

2. Функции множества $\mathfrak{M}$ равномерно непрерывны, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что если $|t - t'| < \delta$, $t, t' \in [0, T]$, то сразу для всех $g(t, s) \in \mathfrak{M}$ справедливо неравенство

$$\|g(t, \cdot) - g(t', \cdot)\|_{C^0(\Gamma)} < \varepsilon.$$

Равномерную ограниченность множеств $B_1 M$ и $B_2 M$ в $C^0([0, T]; C^0(\Gamma))$ легко получить с учетом оценок из п. 3) и равномерной ограниченности множества M в этом пространстве. Исследуем равномерную непрерывность $B_2 M$. Используя п. 3 леммы, получаем следующие неравенства:

$$\begin{aligned} \|B_2 h(t, \cdot) - B_2 h(t', \cdot)\|_{C^0(\Gamma)} &\leq \left\| \int_{t'}^t \mathcal{B}_2(t - \tau) h(\tau, \cdot) d\tau \right\|_{C^0(\Gamma)} \\ &+ \left\| \int_0^{t'} (\mathcal{B}_2(t - \tau) - \mathcal{B}_2(t' - \tau)) h(\tau, \cdot) d\tau \right\|_{C^0(\Gamma)} \\ &\leq C_M C(\mathcal{B}_2)(1 + T)|t - t'| + C_M \int_0^T |\mathcal{B}_2(t - \tau) - \mathcal{B}_2(t' - \tau)| d\tau, \\ &h \in M, \quad t, t' \in [0, T]. \end{aligned}$$

Поскольку функция $\mathcal{B}_2(t)$ непрерывна на $[0, T]$, то по теореме Кантора она равномерно непрерывна на этом сегменте, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon)$, что если $|t - t'| < \delta(\varepsilon)$, $t, t' \in [0, T]$, то $|\mathcal{B}_2(t) - \mathcal{B}_2(t')| < \varepsilon$. По любому $\varepsilon > 0$ выберем $\delta_0(\varepsilon) = \min\{\varepsilon, \delta(\varepsilon)\}$, где $\delta(\varepsilon)$ гарантировано теоремой Кантора. Таким образом, если $|t - t'| < \delta_0(\varepsilon)$, $t, t' \in [0, T]$, то

$$\|B_2 h(t, \cdot) - B_2 h(t', \cdot)\|_{C^0(\Gamma)} < (1 + T)C_M[C(\mathcal{B}_2) + 1]\varepsilon, \quad h \in M.$$

Следовательно, в силу произвольности $\varepsilon > 0$ множество $B_2 M$ является равностепенно непрерывным, а оператор B_2 – компактным.

Для исследования равностепенной непрерывности множества $B_1 M$ запишем следующие оценки, в которых учтен п. 3) леммы.

$$\begin{aligned} & \|B_1 h(t, \cdot) - B_1 h(t', \cdot)\|_{C^0(\Gamma)} \\ & \leq \left\| \int_{t'}^t \int_{\Gamma} \mathcal{B}_1(t - \tau, x(\cdot), y(\sigma)) h(\tau, \sigma) d\sigma d\tau \right\|_{C^0(\Gamma)} \\ & + \left\| \int_0^{t'} \int_{\Gamma} [\mathcal{B}_1(t - \tau, x(\cdot), y(\sigma)) - \mathcal{B}_1(t' - \tau, x(\cdot), y(\sigma))] h(\tau, \sigma) d\sigma d\tau \right\|_{C^0(\Gamma)} \\ & \leq l(\Gamma)C_M \left[C(\mathcal{B}_1)|t - t'| \right. \\ & \quad \left. + \int_0^{t'} \left\| \mathcal{B}_1(t - \tau, x(\cdot), y(\cdot)) - \mathcal{B}_1(t' - \tau, x(\cdot), y(\cdot)) \right\|_{C^0(\Gamma \times \Gamma)} d\tau \right], \end{aligned}$$

где $t, t' \in [0, T]$, $h(t, s) \in M$, $l(\Gamma)$ – длина границы Γ .

Согласно п. 1), функция $\mathcal{B}_1(t, x(s), y(\sigma))$ непрерывна в $[0, T] \times \Gamma \times \Gamma$, а значит, по теореме Кантора равномерно непрерывна на этом множестве. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что если $R(t, s, \sigma; t', s, \sigma) = |t - t'| < \delta(\varepsilon)$, то $|\mathcal{B}_1(t, x(s), y(\sigma)) - \mathcal{B}_1(t', x(s), y(\sigma))| < \varepsilon$. Здесь через R обозначено расстояние между точками (t, s, σ) и (t', s, σ) в трехмерном пространстве. Поскольку это расстояние не зависит от s, σ , то последнее неравенство выполняется равномерно по $s, \sigma \in \Gamma$ и может быть записано в виде

$$\left\| \mathcal{B}_1(t, x(\cdot), y(\cdot)) - \mathcal{B}_1(t', x(\cdot), y(\cdot)) \right\|_{C^0(\Gamma \times \Gamma)} < \varepsilon.$$

Выбирая $\delta_0(\varepsilon) = \min\{\varepsilon, \delta(\varepsilon)\}$, где $\delta(\varepsilon)$ гарантировано теоремой Кантора, заметим, что если $|t - t'| < \delta_0(\varepsilon)$, $t, t' \in [0, T]$, то

$$\|B_1 h(t, \cdot) - B_1 h(t', \cdot)\|_{C^0(\Gamma)} < l(\Gamma)C_M[C(\mathcal{B}_1) + T]\varepsilon$$

при любом $h(t, s) \in M$. Отсюда следует равностепенная непрерывность множества $B_1 M$, а значит, компактность оператора B_1 в $C^0([0, T]; C^0(\Gamma))$.

Докажем п. 6). С помощью соотношений Коши–Римана можно показать, что

$$\mathcal{A}(x(s), y(\sigma)) = \frac{\partial}{\partial s} \psi(x(s), y(\sigma)),$$

где функция $\psi(x, s)$ определена в (2.4). Далее,

$$\mathcal{B}_1(t, x(s), y(\sigma)) = \frac{\partial}{\partial s} \int_0^{\psi(x(s), y(\sigma))} \chi(\xi) \sin(t\chi(\xi)) d\xi,$$

где $\chi(\xi) = (\omega_1^2 \sin^2 \xi + \omega_2^2 \cos^2 \xi)^{1/2}$. Учитывая эти соотношения, несложно проверить, что

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} A\mu(t, s) ds &= \pi \int_{\Gamma} \mu(t, \sigma) d\sigma, \\ \int_{\Gamma} B_1\mu(t, s) ds &= \int_0^t \int_{\Gamma} \mu(t, \sigma) \int_0^{\pi} \chi(\xi) \sin(t\chi(\xi)) d\xi d\sigma d\tau, \end{aligned}$$

где использована π -периодичность функции $\chi(\xi)$. Как показано в [5, с. 163]

$$\int_0^{\pi} \chi(\xi) \sin(t\chi(\xi)) d\xi = -\mathcal{B}_2(t).$$

Пользуясь приведенными соотношениями, легко вывести тождество из п. 6) и завершить доказательство леммы.

В следующем параграфе изучим свойства операторов, входящих в уравнение (2.6), которые понадобятся для его решения.

§ 3. Свойства операторов интегрального уравнения

Рассмотрим свойства операторов из уравнения (2.6). Докажем обратимость оператора $(-\pi - A)$ в $C^0(\Gamma)$. Для этого надо показать, что однородное уравнение Фредгольма 2-го рода

$$(-\pi - A)h(s) = 0 \tag{3.1}$$

имеет в $C^0(\Gamma)$ только тривиальное решение. Фредгольмовость этого уравнения вытекает из компактности оператора (см. п. 2), леммы 4 и [18, с. 67]. Доказательство проведем от противного. Пусть однородное уравнение имеет нетривиальное решение $h_0(s) \in C^0(\Gamma)$. Тогда заметим, что гармонический логарифмический потенциал

$$v(x) = \int_{\Gamma} h_0(\sigma) \ln |x - y(\sigma)| d\sigma$$

удовлетворяет всем условиям следующей однородной задачи Неймана для уравнения Лапласа

$$\Delta v(x) = 0, \quad x \in D, \quad \frac{\partial v}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = 0;$$

$$|v| < \text{const}, \quad |\nabla v| < \text{const} |x|^{-2}, \quad |x| \rightarrow \infty.$$

Действительно, при удовлетворении граничному условию, которое понимается в смысле непрерывного продолжения на границу по нормали, получим тождество $(-\pi - A)h_0(s) = 0$. Условия на бесконечности будут выполнены, поскольку, как несложно проверить,

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial n} ds = 0 = -2\pi \int_{\Gamma} h_0(s) ds$$

и, следовательно, $v(x) = O(|x|^{-1})$, $|\nabla v| = O(|x|^{-2})$ при $|x| \rightarrow \infty$. С помощью энергетических тождеств можно показать, что решением указанной задачи Неймана является константа. Тем самым, $v(x)$ тождественно равно константе в D . Из асимптотического поведения $v(x)$ на бесконечности вытекает, что эта константа равна нулю, т.е. $v(x) \equiv 0$ в D .

Через $D_1, \dots, D_N$ обозначим внутренние области, ограниченные кривыми $\Gamma_1, \dots, \Gamma_N$ соответственно. В силу непрерывности логарифмического потенциала $v(x)$ при переходе через границу Γ , в каждой из областей D_k , $k = 1, \dots, N$, функция $v(x)$ удовлетворяет следующей внутренней задаче Дирихле для уравнения Лапласа: $\Delta v = 0$ в D_k , $v|_{\Gamma_k} = 0$. Поскольку эта задача имеет только тривиальное решение, то $v(x) \equiv 0$ в D_k , $k = 1, \dots, N$, и, следовательно, $v(x) \equiv 0$ в $\mathbb{R}^2$. Пользуясь теоремой о скачке нормальной производной логарифмического потенциала на Γ , имеем $h_0(s) \equiv 0$. Таким образом, приходим к противоречию о том, что $h_0(s)$ — нетривиальное решение уравнения (3.1). Тем самым доказана

ЛЕММА 5. *Оператор $(-\pi - A)$ обратим в $C^0(\Gamma)$.*

Из п. 2) леммы 4 вытекает, что оператор $(-\pi - A)$ ограничен как оператор, действующий из $C^0(\Gamma)$ в $C^0(\Gamma)$. Из линейности и ограниченности оператора $(-\pi - A)$ в $C^0(\Gamma)$ по теореме Банаха [18, с. 59] следует, что обратный оператор $(-\pi - A)^{-1}$ также ограничен в $C^0(\Gamma)$.

Принимая во внимание п. 2) леммы 4, легко показать, что оператор $(-\pi - A)$ действует из $C^0([0, T]; C^0(\Gamma))$ в $C^0([0, T]; C^0(\Gamma))$, где $T > 0$, и при этом ограничен. Рассмотрим уравнение относительно функции $h(t, s) \in C^0([0, T]; C^0(\Gamma))$

$$-\pi h(t, s) - Ah(t, s) = g(t, s), \quad (3.2)$$

в котором $g(t, s) \in C^0([0, T]; C^0(\Gamma))$, $T > 0$. Время t входит в уравнение как параметр, так как оператор $(-\pi - A)$ от t не зависит. При каждом

фиксированном t все функции, входящие в уравнение, принадлежат $C^0(\Gamma)$ и по лемме 5 уравнение имеет единственное решение

$$h(t, s) = (-\pi - A)^{-1} g(t, s), \quad (3.3)$$

принадлежащее $C^0(\Gamma)$ при этом t . Изучим гладкость функции (3.3) по t . Как отмечено выше, оператор $(-\pi - A)^{-1}$ ограничен в $C^0(\Gamma)$ и, следовательно, непрерывен [18, с. 53]. Это значит, что если $\|g(t, \cdot) - g(t_0, \cdot)\|_{C^0(\Gamma)} \rightarrow 0, t \rightarrow t_0$, то для функции $h(t, s)$ из (3.3) имеем $\|h(t, \cdot) - h(t_0, \cdot)\|_{C^0(\Gamma)} \rightarrow 0, t \rightarrow t_0$. Тем самым, функция $h(t, s)$, построенная по формуле (3.3), принадлежит $C^0([0, T]; C^0(\Gamma))$.

Таким образом, при любой функции $g(t, s) \in C^0([0, T]; C^0(\Gamma))$, $T > 0$, уравнение (3.2) имеет единственное решение $h(t, s) \in C^0([0, T]; C^0(\Gamma))$, определяемое формулой (3.3). Это означает, что оператор $(-\pi - A)$ имеет обратный оператор $(-\pi - A)^{-1}$ в $C^0([0, T]; C^0(\Gamma))$ при любом $T > 0$. Из линейности и ограниченности оператора $(-\pi - A)$ в $C^0([0, T]; C^0(\Gamma))$ (см. п. 2) леммы 4) по теореме Банаха [18, с. 59] следует ограниченность обратного оператора $(-\pi - A)^{-1}$ в этом же пространстве. Из приведенных рассуждений вытекает

ЛЕММА 6. *Оператор $(-\pi - A)$ обратим в банаховом пространстве $C^0([0, T]; C^0(\Gamma))$ при любом $T > 0$ и обратный оператор $(-\pi - A)^{-1}$ ограничен в этом пространстве.*

Исследуем свойства уравнения (2.8). Справедлива

ЛЕММА 7. *В классе функций $\mu(t, s) \in C^0([0, \infty]; C^0(\Gamma))$ однородное уравнение (2.8) имеет только тривиальное решение.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем от противного. Пусть однородное уравнение (2.6) имеет нетривиальное решение $\mu_0(t, s)$. Тогда функция $V[\bar{\mu}_0](t, s)$, где $\bar{\mu}_0(t, s) = \int_0^t (t - \tau) \mu_0(\tau, s) d\tau$, удовлетворяет всем условиям однородной задачи $\mathcal{K}_1$. В этом легко убедиться непосредственной проверкой. По теореме 1 решением однородной задачи $\mathcal{K}_1$ является функция времени $c(t) \in C_0^2[0, \infty)$. Следовательно, $V[\bar{\mu}_0](t, x) \equiv c(t)$ в D . В силу первого неравенства из леммы 2, описывающего поведение потенциала V при $|x| \rightarrow \infty$, получим $\int_{\Gamma} \bar{\mu}_0(t, s) ds = 0, c(t) \equiv 0$, т.е. $V[\bar{\mu}_0](t, x) \equiv 0$ в D . Поскольку [5] потенциал $V[\bar{\mu}_0](t, x)$ принадлежит $C^0(\mathbb{R}^2)$ при каждом t и, кроме того, удовлетворяет уравнению (1.2) в $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$, то в каждой из областей $D_k, k = 1, \dots, N$, функция $V[\bar{\mu}_0](t, x)$ удовлетворяет

- а) уравнению (1.2),
- б) однородным начальным условиям (1.3),
- в) первому однородному граничному условию $V[\bar{\mu}_0](t, x)|_{\Gamma_k} = 0$.

Напомним, что через D_k обозначается внутренняя область, ограниченная кривой Γ_k . В [12] показано, что однородная начально-краевая задача а)–в) в ограниченной области имеет только тривиальное решение. Следовательно, $V[\bar{\mu}_0](t, x) \equiv 0$ в $D_1, \dots, D_N$, а значит, $V[\bar{\mu}_0](t, x) \equiv 0$ в $\mathbb{R}^2$. Пользуясь теоремой из [5] о скачке нормальной производной потенциала $V[\bar{\mu}_0](t, x) = 2\pi W[\mu](t, x)$ на Γ , получим $\mu_0(t, s) \equiv 0, t \geq 0$. Таким образом, приходим к противоречию с предположением о том, что $\mu_0(t, s)$ – нетривиальное решение однородного уравнения (2.6). Лемма доказана.

§ 4. Разрешимость интегрального уравнения и краевых задач

Приведем один полезный результат из общей теории линейных уравнений, который понадобится для доказательства разрешимости уравнения (2.8). Рассмотрим уравнение

$$Uz + Pz = \eta. \quad (4.1)$$

Справедлива

ЛЕММА 8. Пусть U, P – линейные операторы, действующие в банаховом пространстве $\mathcal{H}$, причем оператор U ограничен и имеет ограниченный обратный оператор U^{-1} , а оператор P компактный. Кроме того, предположим, что однородное уравнение (4.1) имеет в $\mathcal{H}$ только тривиальное решение. Тогда уравнение (4.1) имеет единственное решение $z \in \mathcal{H}$ при любой правой части $\eta \in \mathcal{H}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО основано на фредгольмовости уравнения

$$z + U^{-1}Pz = U^{-1}\eta, \quad (4.2)$$

в котором оператор $U^{-1}P$ является компактным [18], [19].

Применим лемму 8 к изучению уравнения (2.6). Пусть $\mathcal{H} = C^0([0, T]; C^0(\Gamma))$, где T – любое фиксированное положительное число. По леммам 4 п. 2), 5, 6 оператор $U = (-\pi - A)$ ограничен в $\mathcal{H}$ и имеет обратный оператор, который также ограничен в $\mathcal{H}$. По лемме 4 п. 5) оператор $P = B$ компактен в $\mathcal{H}$. Наконец, по лемме 7 однородное уравнение (2.6) имеет только тривиальное решение. Таким образом, для уравнения (2.6) выполнены условия леммы 8 и, следовательно, это уравнение имеет единственное решение $\mu(t, s) \in C^0([0, T]; C^0(\Gamma))$ при любой правой части $F(t, s) \in C^0([0, T]; C^0(\Gamma))$.

В силу произвольности T справедлива

ТЕОРЕМА 2. При любой функции $F(t, s) \in C^0([0, \infty); C^0(\Gamma))$ уравнение (2.8) имеет единственное решение $\mu(t, s) \in C^0([0, \infty); C^0(\Gamma))$.

Отметим, что всякой функции $f(t, s) \in C^0([0, \infty); C^0(\Gamma))$ из граничного условия (1.4) задачи $\mathfrak{K}_1$ отвечает функция $F(t, s) \in C^0([0, \infty); C^0(\Gamma))$,

определяемая по формуле (2.7). Теорема 2 гарантирует существование решения $\mu(t, s)$ интегрального уравнения (2.6) из требуемого класса гладкости. Следовательно, потенциал (2.2), построенный на этой функции $\mu(t, s)$, принадлежит классу гладкости G и удовлетворяет всем остальным условиям задачи $\mathfrak{K}_1$ (см. лемму 3). Справедлива

ТЕОРЕМА 3. *При любой функции $f(t, s) \in C^0([0, \infty); C^0(\Gamma))$ классическое решение задачи $\mathfrak{K}_1$ существует и дается формулой*

$$u(t, x) = V[\bar{\mu}](t, x) + c(t), \quad (4.3)$$

где потенциал $V[\bar{\mu}](t, x)$ определен в (2.2), плотность $\mu(t, s) \in C^0([0, \infty); C^0(\Gamma))$ является решением интегрального уравнения (2.6), а $c(t)$ – произвольная функция из класса $C_0^2[0, \infty)$.

Перейдем к решению задач $\mathfrak{K}_2, \mathfrak{K}_3$. Пусть $f(t, s) \in C^0([0, \infty); C_1^0(\Gamma))$, тогда выполнено необходимое условие разрешимости задач $\mathfrak{K}_2, \mathfrak{K}_3$ из теоремы 1. Функция $F(t, s)$, найденная по формуле (2.7), также принадлежит $C^0([0, \infty); C_1^0(\Gamma))$. Разыскивая решение задачи в виде (4.3), получим интегральное уравнение (2.6), которое по лемме 8 имеет единственное решение $\mu(t, s) \in C^0([0, \infty); C^0(\Gamma))$, обращающее (2.6) в тождество. Интегрируя это тождество по Γ и пользуясь п. 6) леммы 4, получим

$$-2\pi \int_{\Gamma} \mu(t, s) ds - 2B_2 \int_{\Gamma} \mu(t, s) ds = \int_{\Gamma} F(t, s) ds = 0, \quad t \geq 0,$$

или

$$(1 - \omega_1 J_1(\omega_1 t)*) (1 - \omega_2 J_1(\omega_2 t)*) \int_{\Gamma} \mu(t, s) ds = 0, \quad t \geq 0.$$

Пользуясь обратимостью оператора $(1 - \omega_k J_1(\omega_k t)*)$, $k = 1, 2$, имеем (см. [5])

$$\int_{\Gamma} \mu(t, s) ds = 0, \quad t \geq 0.$$

Следовательно, $\mu(t, s) \in C^0([0, \infty); C_1^0(\Gamma))$. Итак, нам удалось доказать следующее свойство уравнения (2.6): если правая часть этого уравнения принадлежит классу $C^0([0, \infty); C_1^0(\Gamma))$, то и его решение также принадлежит этому классу. Из неравенств леммы 2 следует, что в рассматриваемом случае $V[\bar{\mu}](t, x) \in \mathcal{M}_3$, а значит, является решением задачи $\mathfrak{K}_3$. Кроме того, в рассматриваемом случае функция (4.3) дает решение задачи $\mathfrak{K}_1$ и принадлежит $\mathcal{M}_2$. Следовательно, эта функция будет решением задачи $\mathfrak{K}_2$.

ТЕОРЕМА 4. При любой функции $f(t, s) \in C^0([0, \infty); C_1^0(\Gamma))$ решения задач $\mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{K}_3$ существуют. При этом решение задачи $\mathfrak{K}_3$ имеет вид $u(t, x) = V[\bar{\mu}](t, x)$, а решение задачи $\mathfrak{K}_2$ дается формулой $u(t, x) = V[\bar{\mu}](t, x) + c(t)$, где $c(t)$ – произвольная функция из класса $C_0^2[0, \infty)$. В обоих случаях потенциал $V[\bar{\mu}](t, x)$ определяется формулой (2.2), где плотность $\mu(t, s) \in C^0([0, \infty); C_1^0(\Gamma))$ является решением уравнения (2.6).

Результаты, приведенные в настоящей работе, свидетельствуют о том, что условия на бесконечности играют серьезную роль в постановке начально-краевых задач для уравнения (1.2). В заключение рассмотрим начально-краевую задачу $\mathfrak{K}$, которая формулируется так же, как задача $\mathfrak{K}_j$, но без условий на бесконечности, т.е. без условия $u \in \mathcal{M}_j$, $j = 1, 2, 3$. Покажем, что такая задача может иметь бесконечно много решений, зависящих от пространственных переменных. Пусть D – внешность единичного круга и для простоты $\omega_1 = \omega_2 = 1$, тогда уравнение (1.2) имеет вид

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta u + \Delta u = 0$$

и

$$\mathcal{N}_{tx} u = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} u + \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} u.$$

Рассмотрим в этом случае однородную задачу $\mathfrak{K}$. Очевидно, что всякая функция

$$u_{mk}(x) = \left(|x|^m + \frac{1}{|x|^m} \right) (C_1 \cos m\varphi + C_2 \sin m\varphi) t^k, \\ m = 1, 2, \dots, \quad k = 2, 3, \dots,$$

где $(|x|, \varphi)$ – полярные координаты, является решением этой однородной задачи $\mathfrak{K}$ при любых константах C_1, C_2 .

Таким образом, условия на бесконечности являются необходимыми в корректной постановке начально-краевых задач для уравнения (1.2), так как позволяют выделить решение, которое определяется однозначно (задача $\subset \mathfrak{K}_3$) либо с точностью до аддитивной функции времени (задачи $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2$).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Габов С. А., Шевцов П. В. Основные краевые задачи для уравнений колебаний стратифицированной жидкости // Докл. АН СССР. 1983. Т. 268. № 6. С. 1293–1296.
- [2] Габов С. А., Шевцов П. В. Об одном дифференциальном уравнении типа уравнения С. Л. Соболева // Докл. АН СССР. 1984. Т. 276. № 1. С. 14–17.
- [3] Шевцов П. В. Основные начально-краевые задачи для одного уравнения составного типа // Деп. ВИНТИ. № 3882–83.
- [4] Успенский С. В., Демиденко Г. В., Перепелкин В. Г. Теоремы вложения и приложения к дифференциальным уравнениям. Новосибирск: Наука, 1984.
- [5] Габов С. А., Свешников А. Г. Линейные задачи теории нестационарных внутренних волн. М.: Наука, 1990.
- [6] Капитонов Б. В. Теория потенциала для уравнения малых колебаний вращающейся жидкости // Матем. сб. 1979. Т. 109. № 4. С. 607–628.
- [7] Крутицкий П. А. Явное решение задачи Дирихле для уравнения составного типа многосвязной области // Докл. РАН. 1992. Т. 325. № 3. С. 428–433.
- [8] Крутицкий П. А. Об одной начально-краевой задаче, описывающей колебания системы пластин в стратифицированной вращающейся жидкости // Математический анализ и дифференц. уравнения. Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1991. С. 78–88.
- [9] Krutitskii P. A. // Conf. on Evolution Equations. Abstracts of lectures. Glasgow: Strathclyde Univ, 1994. P. 10.
- [10] Бреховских А. М., Гончаров В. В. Введение в механику сплошных сред. М.: Наука, 1982.
- [11] Le Blond P. H., Mysak L. A. Waves in the ocean. Amsterdam: Elsevier, 1978.
- [12] Крутицкий П. А. О начально-краевых задачах для уравнения стратифицированной вращающейся жидкости // Алгебра и математический анализ. Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1990. С. 40–50.
- [13] Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981.
- [14] Соболев С. Л. Избранные вопросы теории функциональных пространств и обобщенных функций. М.: Наука, 1989.
- [15] Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.
- [16] Крутицкий П. А. Задача Дирихле для уравнения Гельмгольца вне разрезом на плоскости // ЖВМиМФ. 1994. Т. 34. № 8, 9. С. 1237–1258.
- [17] Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1984.
- [18] Крейн С. Г. Функциональный анализ. М.: Наука, 1964.
- [19] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972.