Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Напалков, О преобразовании Бореля на пространстве Дирихле, *Матем. заметки*, 1996, том 60, выпуск 1, 58–65

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1803>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 17:36:37

О ПРЕОБРАЗОВАНИИ БОРЕЛЯ НА ПРОСТРАНСТВЕ ДИРИХЛЕ

В. В. Напалков (мл.)

Пусть $f(z)$ – целая функция экспоненциального типа. Если $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k/k!)z^k$, то $\gamma_f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k/t^{k+1}$ называется функцией, ассоциированной по Борелю с $f(z)$. Пусть D_f – сопряженная диаграмма функции f , т.е. наименьшее выпуклое множество, содержащее все особенности функции γ_f , и $K_{D_f}(\varphi) = \sup_{z \in D_f} \operatorname{Re}(ze^{-i\varphi})$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, опорная функция области D , а $h_f(\varphi) = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} (\ln |f(re^{i\varphi})|)/r$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, – индикатриса роста функции f .

Связь роста функции f с ее ассоциированной по Борелю характеризуется теоремой Поля: $K_{D_f}(\varphi) = h_f(-\varphi)$. Рост функции f , когда γ_f принадлежит различным пространствам, рассматривался в работах многих авторов. Так, например, в работах [1], [2] рассмотрены счетно-нормированные пространства γ_f , а в работах [3], [4] изучен рост целой функции, если ее ассоциированная по Борелю имеет на границе области D граничные значения класса $L_2(\partial D)$. В данной работе исследуется рост целой функции f , ассоциированная по Борелю которой принадлежит пространству Дирихле – $\gamma \in B_2^1(\mathbb{C} \setminus \overline{D})$, т.е. удовлетворяет соотношению

$$\int_{\mathbb{C} \setminus D} |\gamma'(\xi)|^2 dv(\xi) < \infty,$$

где $dv(\xi)$ – элемент площади.

Будет доказана

ТЕОРЕМА. Пусть f целая функция экспоненциального типа, D_f – сопряженная диаграмма f , кривизна границы которой ограничена от нуля и бесконечности. Следующие условия эквивалентны:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\infty |f(re^{i\varphi})|^2 e^{-2rh_f(\varphi)} r^{3/2} dr d\varphi \stackrel{\text{об}}{=} \|f\|_2^2 < \infty, \quad (1)$$

$$\int_{\mathbb{C} \setminus D_f} |\gamma'_f(\xi)|^2 dv(\xi) \stackrel{\text{об}}{=} \|\gamma_f\|_1^2 < \infty. \quad (2)$$

При этом справедливы неравенства

$$C_1 \|\gamma_f\|_1 < \|f\|_2 < C_2 \|\gamma_f\|_1,$$

где $C_1, C_2 > 0$ – некоторые постоянные.

Для упрощения в дальнейшем вместо γ_f , $h_f(\varphi)$ и D_f будем писать γ , $h(\varphi)$ и D соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В полуплоскости $\operatorname{Re}(ze^{i\varphi}) > h(\varphi)$ функция γ голоморфна и имеет место представление [5, с. 240]

$$\gamma'(z) = - \int_0^\infty f(re^{i\varphi}) re^{i\varphi} e^{-2r\varphi} e^{-zrh(\varphi)} dr.$$

Представим z в виде $z = e^{-i\varphi}(h(\varphi) + x + iy)$, $x > 0, y \in (-\infty, +\infty)$. Тогда

$$\begin{aligned} \gamma'(e^{-i\varphi}(h(\varphi) + x + iy)) &= - \int_0^\infty f(re^{i\varphi}) re^{i\varphi} e^{-2r\varphi} e^{-(x+iy)rh(\varphi)} dr \\ &= \int_{-\infty}^0 -f(-te^{i\varphi})(-t)^{1/2} e^{2i\varphi+th(\varphi)} e^{t(x+iy)+0.5 \ln(-t)} dt. \end{aligned} \quad (3)$$

Функция $-\overline{f(-te^{i\varphi})}(-t)^{1/2} e^{-2i\varphi+th(\varphi)}$, $t < 0$, принадлежит пространству

$$L_2((-\infty, 0), \sqrt{1/|t|}) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ g \in L_{\text{loc}}(\mathbb{R}) \mid \int_{-\infty}^0 |g(t)|^2 (-t)^{1/2} dt < \infty \right\}.$$

Последнее вытекает из условия (1). Поэтому правую часть равенства (3) можно понимать как обобщенное преобразование Лапласа функции $-\overline{f(-te^{i\varphi})}(-t)^{1/2} e^{-2i\varphi+th(\varphi)}$ с весом $w(t) = e^{-0.5 \ln(-t)} = \sqrt{-1/t}$, $t < 0$, т.е. скалярное произведение в пространстве $L_2((-\infty, 0), \sqrt{1/|t|})$ функции $-\overline{f(-te^{i\varphi})}(-t)^{1/2} e^{-2i\varphi+th(\varphi)}$ и экспоненты (см. [6], [7]). В работе [6] доказано, что обобщенное преобразование Лапласа устанавливает изометрию между пространством

$$L_2(I, w) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ g \in L_{\text{loc}}(\mathbb{R}) \mid \int_I |g(t)|^2 \frac{1}{w(t)} dt < \infty \right\}$$

и пространством $H^*(I^* + i\mathbb{R}, dv(x) \otimes dy)$ функций p голоморфных в полосе $I^* + i\mathbb{R}$, где

$$I^* = \left\{ x \in \mathbb{R} : \int_I e^{2xt} \frac{1}{w(t)} dt < \infty \right\},$$

для которых

$$\int_{I^* + i\mathbb{R}} |p(x + iy)|^2 dv(x) dy < \infty,$$

если

$$\frac{1}{w(t)} = \int_{I^*} e^{2xt} d\nu(x).$$

В данном случае $I = (-\infty, 0)$, $I^* = (0, +\infty)$ и имеют место равенства

$$\frac{\pi}{(-t)^{1/2}} = \int_0^\infty e^{2xt} \frac{1}{(x)^{1/2}} dx.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |f(re^{i\varphi})|^2 e^{-2rh(\varphi)} r^{3/2} dr &= \int_{-\infty}^0 |f(-te^{i\varphi})|^2 (-t) e^{2th(\varphi)} (-t)^{1/2} dt \\ &= \pi \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty |\gamma'(e^{-i\varphi}(h(\varphi) + x + iy))|^2 \frac{1}{(x)^{1/2}} dy dx \end{aligned}$$

или, интегрируя это равенство, получим

$$\|f\|_2^2 = \pi \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty |\gamma'(e^{-i\varphi}(h(\varphi) + x + iy))|^2 \frac{1}{(x)^{1/2}} dy dx d\varphi \stackrel{\text{об}}{=} S(\gamma).$$

Таким образом, теорема будет доказана, если мы покажем, что квадрат нормы функции γ эквивалентен $S(\gamma)$. Сделаем замену переменных в интеграле:

$$\begin{cases} \xi = u + iv = e^{-i\varphi}(h(\varphi) + x + iy), \\ \vartheta = \varphi. \end{cases}$$

При фиксированном ϑ переменная $\xi = u + iv$ пробегает полуплоскость $\{\eta \in \mathbb{C} : \eta = e^{-i\vartheta}(h(\vartheta) + x + iy), x > 0, y \in \mathbb{R}\}$. При фиксированном ξ переменная ϑ пробегает значения от $\theta_1(\xi)$ до $\theta_2(\xi)$, где $(\theta_1(\xi), \theta_2(\xi))$ – максимальный интервал, такой, что опорные прямые, перпендикулярные направлению $\vartheta \in (\theta_1(\xi), \theta_2(\xi))$ отделяют точку ξ от области D . Якобиан перехода от старых переменных к новым равен единице. Таким образом,

$$S(\gamma) = \int_{\mathbb{C} \setminus D} |\gamma'(\xi)|^2 \left(\int_{\theta_1(\xi)}^{\theta_2(\xi)} \frac{d\vartheta}{(\operatorname{Re} \xi e^{i\vartheta} - h(\vartheta))^{1/2}} \right) dv(\xi),$$

и утверждение теоремы будет вытекать из следующей леммы, доказательство которой будет приведено ниже.

ЛЕММА. Пусть D область с гладкой границей, содержащая начало координат, такая, что кривизна ее границы ограничена от 0 и ∞ . Если $\xi \in \mathbb{C} \setminus D$, то $(\theta_1(\xi), \theta_2(\xi))$ – максимальный интервал, такой, что опорные прямые, перпендикулярные направлению

$\vartheta \in (\theta_1(\xi), \theta_2(\xi))$ отделяют точку ξ от области D . Тогда найдутся постоянные $A_1, A_2 > 0$ такие, что

$$A_1 |\xi|^{-3/2} \leq \int_{\theta_1(\xi)}^{\theta_2(\xi)} \frac{d\vartheta}{(\operatorname{Re} \xi e^{i\vartheta} - h(\vartheta))^{1/2}} \leq A_2 |\xi|^{3/2}.$$

Действительно, покажем, что найдется постоянная K такая, что

$$\int_{\mathbb{C} \setminus D} |\gamma'(\xi)|^2 |\xi|^{3/2} dv(\xi) \leq K \int_{\mathbb{C} \setminus D} |\gamma'(\xi)|^2 dv(\xi).$$

Выберем круг R с центром в нуле радиуса r , содержащий область D . Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{C} \setminus D} |\gamma'(\xi)|^2 |\xi|^{3/2} dv(\xi) &= \int_{(\mathbb{C} \setminus D) \cap R} |\gamma'(\xi)|^2 |\xi|^{3/2} dv(\xi) \\ &\quad + \int_{\mathbb{C} \setminus R} |\gamma'(\xi)|^2 |\xi|^{3/2} dv(\xi). \end{aligned}$$

Очевидно, что

$$\int_{(\mathbb{C} \setminus D) \cap R} |\gamma'(\xi)|^2 |\xi|^{3/2} dv(\xi) \leq K_1 \int_{(\mathbb{C} \setminus D) \cap R} |\gamma'(\xi)|^2 dv(\xi).$$

Покажем, что

$$\int_{\mathbb{C} \setminus R} |\gamma'(\xi)|^2 |\xi|^{3/2} dv(\xi) \leq K_2 \int_{\mathbb{C} \setminus R} |\gamma'(\xi)|^2 dv(\xi).$$

Разложение в ряд Лорана функции $\gamma'(\xi)$ будет иметь вид

$$\gamma'(\xi) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{b_k}{\xi^k}.$$

Легко показать, что

$$\int_{\mathbb{C} \setminus R} |\gamma'(\xi)|^2 |\xi|^{3/2} dv(\xi) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|b_k|^2 r^{-2k+7/2}}{2k+7/2}$$

и

$$\int_{\mathbb{C} \setminus R} |\gamma'(\xi)|^2 dv(\xi) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|b_k|^2 r^{-2k+5/2}}{2k+5/2}.$$

Поскольку $k \geq 2$, найдется постоянная K_2 такая, что

$$\int_{\mathbb{C} \setminus R} |\gamma'(\xi)|^2 |\xi|^{3/2} dv(\xi) \leq K_2 \int_{\mathbb{C} \setminus R} |\gamma'(\xi)|^2 dv(\xi).$$

Таким образом, для $K = \max(K_1, K_2)$ имеем

$$\int_{\mathbb{C} \setminus D} |\gamma'(\xi)|^2 |\xi|^{3/2} dv(\xi) \leq K \int_{\mathbb{C} \setminus D} |\gamma'(\xi)|^2 dv(\xi).$$

Аналогично показывается, что

$$\int_{\mathbb{C} \setminus D} |\gamma'(\xi)|^2 |\xi|^{-3/2} dv(\xi) \geq L \int_{\mathbb{C} \setminus D} |\gamma'(\xi)|^2 dv(\xi),$$

где $L > 0$ – некоторая постоянная. Таким образом, теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Без ограничения общности поместим начало координат в точку ξ , а угол $\vartheta = 0$ соответствует направлению, на котором достигается минимум расстояний от точки ξ до области D . В этом случае доказываемое неравенство примет вид

$$A_1 |\xi|^{-3/2} \leq \int_{\theta_1(\xi)}^{\theta_2(\xi)} \frac{d\vartheta}{(-h(\vartheta))^{1/2}} \leq A_2 |\xi|^{3/2}.$$

Здесь через $\theta_i(\xi)$, $i = 1, 2$, обозначены новые углы. В дальнейшем для упрощения будем писать θ_i вместо $\theta_i(\xi)$. Пусть $l_\vartheta \stackrel{\text{def}}{=} \{z = x + iy \in \mathbb{C} : x \cos(\vartheta) + y \sin(\vartheta) - h(\vartheta) = 0\}$ – опорная прямая к области D , соответствующая углу ϑ [3]. Пусть p_ϑ – точка касания опорной прямой l_ϑ границы области D . Пусть ϑ_1 и ϑ_2 , $\vartheta_1 < \vartheta_2$, – два произвольных значения из отрезка $[\theta_1, \theta_2]$. Известно [3, с. 108], что величина $\Delta(\vartheta_2) - \Delta(\vartheta_1)$, где

$$\Delta(\vartheta) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\vartheta h(\tau) d\tau + h'(\vartheta),$$

есть длина дуги границы области D , ограниченной точками p_{ϑ_1} и p_{ϑ_2} , а величина $h(\vartheta) + h''(\vartheta)$ есть радиус кривизны границы области D в точке касания ее опорной прямой l_ϑ . Радиус кривизны кривой есть обратная величина к кривизне кривой. Поскольку кривизна границы области D ограничена от нуля и бесконечности, найдутся положительные постоянные m и M такие, что имеют место неравенства $m d\vartheta \leq d\Delta(\vartheta) \leq M d\vartheta$, и мы получаем неравенства для интегралов:

$$\frac{1}{M} \int_0^{\theta_2} \frac{d\Delta(\vartheta)}{(-h(\vartheta))^{1/2}} \leq \int_0^{\theta_2} \frac{d\vartheta}{(-h(\vartheta))^{1/2}} \leq \frac{1}{m} \int_0^{\theta_2} \frac{d\Delta(\vartheta)}{(-h(\vartheta))^{1/2}}.$$

Сделаем замену переменных в интеграле

$$\int_0^{\theta_2} \frac{d\Delta(\vartheta)}{(-h(\vartheta))^{1/2}}.$$

Каждому ϑ поставим в соответствие $x = pr_{l_0}p_\vartheta$ – проекцию p_ϑ на прямую l_0 . Если ϑ меняется от 0 до θ_2 , то x пробегает отрезок $[0, x_2]$. Пусть ϑ_1 и ϑ_2 , $\vartheta_1 < \vartheta_2$, – два произвольных значения из отрезка $[0, \theta_2]$. Пусть η – точка пересечения прямых l_{ϑ_1} и l_{ϑ_2} . Найдется $\psi \in [\vartheta_1, \vartheta_2]$ такое, что имеют место неравенства

$$\frac{y_1 - y_2}{\cos(\psi)} \leq \Delta(\vartheta_1) - \Delta(\vartheta_2) \leq |p_{\vartheta_1} - \eta| + |p_{\vartheta_2} - \eta|,$$

где $y_i = pr_{l_0}p_{\vartheta_i}$. Далее, $|p_{\vartheta_1} - \eta| + |p_{\vartheta_2} - \eta| \leq (y_1 - y_2)/\cos(\vartheta_2)$. Тогда справедливы неравенства

$$\frac{y_2 - y_1}{\cos(\psi)} \leq \Delta(\vartheta_2) - \Delta(\vartheta_1) \leq \frac{y_2 - y_1}{\cos(\vartheta_2)}.$$

Отсюда

$$dx = \cos(\vartheta)d\Delta(\vartheta), \quad \vartheta \in (\theta_1(\xi), \theta_2(\xi)).$$

Имеем

$$\int_0^{\theta_2} \frac{d\Delta(\vartheta)}{(-h(\vartheta))^{1/2}} = \int_0^{x_2} \frac{dx}{\cos(\vartheta(x))(-h(\vartheta(x)))^{1/2}}.$$

Найдется постоянная $C_1 > 0$ такая, что выполняются неравенства

$$\begin{aligned} & \int_0^{x_2} \frac{dx}{(-h(\vartheta(x))/\cos(\vartheta(x)))^{1/2}} \\ & \leq \int_0^{x_2} \frac{dx}{(\cos(\vartheta(x)))^{3/2}(-h(\vartheta(x))/\cos(\vartheta(x)))^{1/2}} \\ & \leq C_1|\xi|^{3/2} \int_0^{x_2} \frac{dx}{(-h(\vartheta(x))/\cos(\vartheta(x)))^{1/2}}. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь нижнее неравенство очевидно, верхнее следует из того, что

$$\max_{i=1,2} \frac{1}{(\cos(\theta_i))^{3/2}} \leq C_1|\xi|^{3/2}.$$

Действительно, если p – радиус наименьшего круга с центром в нуле, целиком содержащего область D , то очевидно неравенство

$$\frac{p^{3/2}}{(\cos(\theta_i))^{3/2}} \leq |\xi|^{3/2}, \quad i = 1, 2.$$

Для доказательства леммы остается показать, что найдутся постоянные $C_2, C_3 > 0$ такие, что

$$C_2|\xi|^{-3/2} \leq \int_0^{x_2} \frac{dx}{(-h(\vartheta(x))/\cos(\vartheta(x)))^{1/2}} \leq C_3. \quad (5)$$

Пусть $f(x)$ – выпуклая функция, определенная на $\mathbb{R}$, график которой на отрезке $[0, x_2]$ совпадает с границей области D , а в остальных точках положим $f(x) = +\infty$. Известно, что кривизна кривой, задаваемой уравнением $y = f(x)$ в точке x , равна $|f''(x)|/(1 + (f'(x))^2)^{3/2}$, и по условию леммы отграничена от нуля и бесконечности. Поэтому функция $f'(x)$ монотонно возрастает на отрезке $[0, x_2]$ от 0 до $t_2 \stackrel{\text{def}}{=} f'(x_2)$. Пусть $g(t) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{x \in \mathbb{R}} (xt - f(x) + r)$, $t \in \mathbb{R}$, – сопряженная по Юнгу к функции $f(x) - r$. Функция $g(t)$ принимает конечные значения на отрезке $[0, t_2]$ и выпукла. Сопряженная по Юнгу к функции $g(t)$ совпадает с функцией $f(x) - r$. При этом функция $g'(t)$ монотонно возрастает на отрезке $[0, t_2]$ от 0 до x_2 . Если t и x таковы, что $f'(x) = t$, то $g'(t) = x$. Пусть $\vartheta(x)$ – такое направление, что $x = pr_{l_0}(p_{\vartheta(x)})$. Величина $-h(\vartheta(x))/\cos(\vartheta(x))$ есть длина отрезка, соединяющего точку ξ и точку пересечения прямой $l_{\vartheta(x)}$ с прямой, проведенной под углом $\vartheta = 0$, проходящей через точку ξ . Легко видеть, что если $g'(t) = x$, то $-h(\vartheta(x))/\cos(\vartheta(x)) = r - g(t)$, где $r = \text{dist}(\xi, \partial D)$. Тогда неравенства (5) можно переписать следующим образом:

$$C_2 |\xi|^{-3/2} \leq \int_0^{t_2} \frac{dg'(t)}{(r - g(t))^{1/2}} \leq C_3.$$

Используя возрастание функции $g'(t)$, имеем

$$\int_0^{t_2} \frac{dg'(t)}{(r - g(t))^{1/2}} \leq \int_0^{t_2} \frac{dg'(t)}{(g'(t)(t_2 - t))^{1/2}}.$$

Сделаем замену переменных $g'(t) = x$. Если t пробегает интервал $(0, t_2)$, то x изменяется в пределах $(0, x_2)$. Если $g'(t) = x$, то по свойству сопряженных по Юнгу функций имеем $t = f'(x)$. Поэтому

$$\int_0^{t_2} \frac{dg'(t)}{(g'(t)(t_2 - t))^{1/2}} = \int_0^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{x}(f'(x_2) - f'(x))^{1/2}}.$$

По теореме о среднем для $\tau_1, \tau_2 \in [0, x_2]$ найдется $\eta \in [\tau_1, \tau_2]$ такое, что справедливо равенство

$$|f'(\tau_1) - f'(\tau_2)| = |f''(\eta)| |\tau_1 - \tau_2|.$$

Воспользуемся тем, что кривизна кривой, задаваемой уравнением $y = f(x)$, в точке x равна $|f''(x)|/(1 + (f'(x))^2)^{3/2}$ и по условию отграничена от нуля и бесконечности. Величина $1 + (f'(x))^2$, очевидно, ограничена снизу единицей и справедливо неравенство $f'(x) \leq f'(x_2) \leq (r + d)/x_2$, где $d = \sup_{z, w \in D} (z - w)$ – диаметр области D , а $r = \text{dist}(\xi, D)$. Поэтому найдется постоянная $C_4 > 0$ такая, что $(1 + (f'(x))^2) \leq (C_4)^{2/3} |\xi|^2$. Тогда справедливы неравенства

$$\frac{1}{M} |\tau_1 - \tau_2| \leq |f'(\tau_1) - f'(\tau_2)| \leq \frac{C_4}{m |\xi|^3} |\tau_1 - \tau_2|, \quad \tau_1, \tau_2 \in [0, x_2].$$

Получим верхнюю оценку

$$\begin{aligned} \int_0^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{x}(f'(x_2) - f'(x))^{1/2}} &\leq \sqrt{M} \int_0^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{x}(x_2 - x)^{1/2}} \\ &= 2\sqrt{M} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{x_2} \right) \Big|_0^2 = \pi\sqrt{M}. \end{aligned} \quad (6)$$

Получим нижнюю оценку

$$\begin{aligned} \int_0^{t_2} \frac{dg'(t)}{(r - g(t))^{1/2}} &\geq \int_0^{t_2} \frac{dg'(t)}{(g'(t_2)(t_2 - t))^{1/2}} \\ &\geq \int_0^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{x_2}(f'(x_2) - f'(x))^{1/2}} \geq \sqrt{\frac{m}{C_4}} |\xi|^{-3/2} \int_0^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{x_2}(x_2 - x)^{1/2}} \\ &= \sqrt{\frac{m}{C_4}} |\xi|^{-3/2} \int_0^{x_2} \frac{dx}{x_2(1 - x/x_2)^{1/2}} \\ &= \sqrt{\frac{m}{C_4}} |\xi|^{-3/2} \int_0^1 \frac{d\tau}{(1 - \tau)^{1/2}} = 2\sqrt{\frac{m}{C_4}} |\xi|^{-3/2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Из (6) и (7) получаем неравенство (5). Аналогичные рассуждения можно проделать и для отрезка $[\theta_1, 0]$. Лемма доказана.

В заключение автор выражает глубокую благодарность Р.С. Юлмухаметову за постановку задачи и внимание к работе, а также В.И. Луценко за полезные обсуждения.

Институт математики с ВЦ УНЦ РАН

Поступило
25.05.94

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Юлмухаметов Р.С. Пространства аналитических функций, имеющих заданный рост вблизи границы // Матем. заметки. 1982. Т. 32. № 1. С. 41–57.
- [2] Напалков В.В. Пространства аналитических функций заданного роста вблизи границы // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1987. Т. 51. № 2. С. 287–305.
- [3] Любарский Ю.И. Теорема Винера–Пэли для выпуклых множеств // Изв. АН АрмССР. Сер. матем. 1986. № 4.
- [4] Луценко В.И., Юлмухаметов Р.С. Обобщение теоремы Винера–Пэли на пространства Смирнова // Тр. МИРАН. 1991.
- [5] Левин Б.Я. Распределение корней целых функций. М.: ГИТТЛ, 1956.
- [6] Луценко В.И., Юлмухаметов Р.С. Обобщения теоремы Пэли–Винера на весовые пространства // Матем. заметки. 1990. Т. 48. № 5. С. 80–87.
- [7] Youlmukhametov R.S., Lutsenko V.I. Weighted Laplace transform // Pitman Research Notes in Math. V. 256. P. 232–240.