Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Попов, О проблеме моментов для быстроубывающих функций, *Матем. заметки*, 1996, том 60, выпуск 1, 66–74

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1804>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 06:38:39

О ПРОБЛЕМЕ МОМЕНТОВ ДЛЯ БЫСТРОУБЫВАЮЩИХ ФУНКЦИЙ

А. Ю. Попов

Публикация посвящена описанию классов функций $\{f\}$, определенных на $(0, +\infty)$, в которых проблема моментов вида

$$\int_0^{+\infty} t^{\alpha_n} f(t) dt = c_n \quad (1)$$

имеет решения при любых правых частях c_n . Другими словами, произвольная последовательность комплексных чисел $\{c_n\}$ должна быть “допустимой” для решения интерполяционной задачи (1) в одном из упомянутых выше классов.

В [1] Д. Пойа для любой последовательности комплексных чисел $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ доказал существование целой функции f такой, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^n f(t) dt = c_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

В [2] был получен следующий результат. Пусть S_+ – множество всех комплекснозначных функций $\varphi \in C^\infty[0, +\infty)$, для которых выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}_0 \quad \varphi^{(k)}(0) &= 0, \\ \forall k, m \in \mathbb{N}_0 \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} t^m \varphi^{(k)}(t) &= 0. \end{aligned}$$

Тогда любая последовательность комплексных чисел $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ является моментами на $(0, +\infty)$ некоторой функции $f \in S_+$, т.е. выполняются равенства

$$\int_0^{+\infty} t^n f(t) dt = c_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

В этой работе доказаны более сильные утверждения. Через S^∞ обозначим множество всевозможных последовательностей комплексных чисел, а через S_0 – множество всех непрерывных и ограниченных на $(0, +\infty)$ комплекснозначных функций, для которых выполняются соотношения

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} t^m \varphi(t) = 0.$$

В частности, для $\forall \varphi \in S_0$ и $\forall a \geq 0$ сходятся интегралы

$$\int_0^{+\infty} t^a |\varphi(t)| dt.$$

Для $\varphi \in S_0$ и $q > 1$ определим множество функций

$$E_{\varphi, q} = \left\{ f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \varphi(tq^{-k}) \mid \{b_k\}_{k=0}^{\infty} \in \mathbb{C}^{\infty}, \right. \\ \left. b_0 = 1, \lim_{k \rightarrow +\infty} |b_k|^{1/k} = 0 \right\}. \quad (4)$$

Именно классы $E_{\varphi, q}$ при соответствующих ограничениях на функцию φ и будут поставлять нам решения проблемы моментов (1).

ТЕОРЕМА. Пусть $q > 1$, $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность комплексных чисел, удовлетворяющая следующим условиям:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \alpha_n = +\infty \quad (5)$$

и при всех $m \neq n$, для которых $\operatorname{Re} \alpha_n = \operatorname{Re} \alpha_m$, имеем

$$\frac{(\operatorname{Im} \alpha_n - \operatorname{Im} \alpha_m) \ln q}{2\pi} \notin \mathbb{Z}. \quad (6)$$

Пусть также $\varphi \in S_0$ и функция $t^{\alpha} \varphi(t)$, где $\alpha = \min \operatorname{Re} \alpha_n$, ограничена на $(0, 1)$.

Тогда для любой $\{c_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{C}^{\infty}$ существует функция $f \in E_{\varphi, q}$, удовлетворяющая условиям

$$\int_0^{+\infty} t^{\alpha_n} f(t) dt = c_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (7)$$

в том и только том случае, когда при всех $n \in \mathbb{N}$

$$\varphi_n = \int_0^{+\infty} t^{\alpha_n} \varphi(t) dt \neq 0. \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $q > 1$ и последовательность $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяют условиям (5) и (6), то все числа $\{q^{\alpha_n}\}_{n=1}^{\infty}$ различны и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^{\alpha_n} = \infty.$$

Следовательно, если φ_n – моменты функции $\varphi \in S_0$ (см. (8)) – отличны от нуля, то согласно [3, с. 297] для любой $\{c_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{C}^{\infty}$ существует целая функция $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ такая, что

$$g(0) = 1, \quad g(q^{\alpha_n}) = \frac{c_n}{\varphi_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (9)$$

Положим

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k q^{-k} \varphi(tq^{-k}). \quad (10)$$

Ввиду (10) и (4) $f \in E_{\varphi, q}$. Ясно, что при любом $\beta \in \mathbb{C}$, $b = \operatorname{Re} \beta \geq \alpha = \min \operatorname{Re} \alpha_n$ последовательность функций

$$t^\beta \sum_{k=0}^N a_k q^{-k} \varphi(tq^{-k}) \quad (11)$$

сходится в каждой точке $t \in (0, +\infty)$ к $t^\beta f(t) \in C(0, +\infty)$ и ограничена по абсолютной величине функцией

$$t^b \psi(t) = t^b \sum_{k=0}^{\infty} |a_k q^{-k} \varphi(tq^{-k})|.$$

Из условия теоремы и определения класса S_0 видно, что при всех $b \geq \alpha$ имеет место оценка

$$\sup_{x>0} |x^b \varphi(x)| = M(b) < +\infty.$$

А так как $\{a_n\}$ — коэффициенты Тейлора целой функции, то при любом $\gamma \in \mathbb{R}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k q^{k\gamma}| = C(\gamma) < +\infty.$$

Отсюда при всех $b \geq \alpha$ находим

$$\begin{aligned} t^b \psi(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} |a_k q^{-k} q^{kb}| (tq^{-k})^b |\varphi(tq^{-k})| \\ &\leq \sup_{x>0} |x^b \varphi(x)| \sum_{k=0}^{\infty} |a_k q^{k(b-1)}| = M(b) C(b-1). \end{aligned}$$

Следовательно, функции $t^b \psi(t)$ ограничены на $(0, +\infty)$ при всех $b \geq \alpha$. А это влечет за собой включения

$$t^b \psi(t) \in L_1(0, +\infty) \quad \forall b \geq \alpha. \quad (12)$$

Ввиду (12) к последовательности функций (11) можно применить теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла. Имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} t^\beta f(t) dt &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k q^{-k} \int_0^{+\infty} t^\beta \varphi(tq^{-k}) dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k q^{k\beta} \int_0^{+\infty} (tq^{-k})^\beta \varphi(tq^{-k}) d(tq^{-k}) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k q^{k\beta} \int_0^{+\infty} x^\beta \varphi(x) dx = g(q^\beta) \int_0^{+\infty} t^\beta \varphi(t) dt. \end{aligned} \quad (13)$$

Из (13) и (9) получаем (7). Если же для какого-то $n \in \mathbb{N}$ имеем равенство $\int_0^{+\infty} t^{\alpha_n} \varphi(t) dt = 0$, то и для любой функции $f \in E_{\varphi, q}$ справедливо $\int_0^{+\infty} t^{\alpha_n} f(t) dt = 0$. Следовательно, в этом случае, бесконечная система уравнений (7) не может быть разрешима в классе $E_{\varphi, q}$ при любых правых частях. Теорема доказана.

Нетрудно сообразить, что для любой строго возрастающей последовательности вещественных чисел $\{\alpha_n\}$ выполнено (6), а соотношения (8) в этом случае будут справедливы для любой неотрицательной функции $\varphi \in S_0$, не равной нулю тождественно.

Сказанное позволяет без труда получить из теоремы

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ — произвольная строго возрастающая последовательность действительных чисел, $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = +\infty$. Пусть также $\varphi \in S_0$ — неотрицательная на $(0, +\infty)$ функция, не равная нулю тождественно, и, кроме того, функция $t^{\alpha_1} \varphi(t)$ ограничена на $(0, 1)$.

Тогда, каковы бы ни были $q > 1$ и $\{c_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{C}^{\infty}$, существует функция $f \in E_{\varphi, q}$ такая, что

$$\int_0^{+\infty} t^{\alpha_n} f(t) dt = c_n \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (14)$$

Следствие 1, в свою очередь, позволяет получить ряд предложений, усиливающих результаты работ [1] и [2].

СЛЕДСТВИЕ 2. Для любой $\{c_n\}_{n=0}^{\infty} \in \mathbb{C}^{\infty}$ существует целая функция f порядка 2 типа 1, удовлетворяющая условиям (2).

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $1/2 < \rho < +\infty$, $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ — произвольная строго возрастающая последовательность действительных чисел, $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = +\infty$. Тогда для любой $\{c_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{C}^{\infty}$ и любого σ , $0 < \sigma < +\infty$, существует целая функция f порядка ρ типа σ , для которой выполняются соотношения (14).

Через $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ обозначим множество всех функций, аналитичных в области $\mathcal{D}$.

СЛЕДСТВИЕ 4. Какова бы ни была строго возрастающая последовательность действительных чисел α_n , $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = +\infty$, для любой $\{c_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{C}^{\infty}$ существует функция $f \in S_+ \cap \mathcal{A}(\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0])$, удовлетворяющая условиям (14).

Если в следствии 4 положить $\alpha_n = n - 1$, $n \in \mathbb{N}$, то получим предложение, усиливающее приведенный выше результат из [2].

СЛЕДСТВИЕ 5. Для любой $\{c_n\}_{n=0}^{\infty} \in \mathbb{C}^{\infty}$ существует функция $f \in S_+ \cap \mathcal{A}(\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0])$, для которой выполняются равенства (3).

Теперь из следствия 1 выведем следствия 2–4. Поясним основную идею их доказательств. Приводимые ниже леммы 1–3 устанавливают, что функции из множеств $E_{\varphi, q}$ наследуют ряд аналитических свойств функции φ .

Поэтому согласно следствию 1 для доказательства разрешимости проблемы моментов

$$\int_0^{+\infty} t^{\alpha_n} f(t) dt = c_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где $\alpha_n \uparrow +\infty$, при любых правых частях $\{c_n\}$ в том или ином классе функций X , оказывается достаточным установить справедливость следующих двух утверждений:

1) хотя бы при одном значении $q > 1$

$$\forall \varphi \in X \implies E_{\varphi, q} \subset X;$$

2) в классе X содержится функция $\varphi \in S_0$, неотрицательная на $(0, +\infty)$ и не равная нулю тождественно.

Через $[\rho, \sigma)$, $0 < \rho < +\infty$, $0 < \sigma < +\infty$, обозначим множество целых функций, порядок которых или меньше ρ , или равен ρ , но тип меньше σ .

ЛЕММА 1. Пусть $q > 1$, $0 < \rho < +\infty$, $0 < \sigma < +\infty$, φ — целая функция порядка ρ типа σ , $f \in E_{\varphi, q}$. Тогда

$$u(t) = f(t) - \varphi(t) \in [\rho, \sigma).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (4) следует, что функция $u(t)$ имеет вид

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \varphi(tq^{-k}). \quad (15)$$

Поскольку

$$\max_{|t| \leq R} \max_{k \in \mathbb{N}} |\varphi(tq^{-k})| = \max_{|z| \leq Rq^{-1}} |\varphi(z)|,$$

а $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k| = b < +\infty$, то заключаем, что ряд (15) сходится равномерно в любом круге $|t| \leq R$, и, кроме того, при любом $R > 0$ справедливо неравенство

$$\max_{|z| \leq R} |u(z)| \leq b \max_{|z| \leq Rq^{-1}} |\varphi(z)|.$$

Отсюда вытекает утверждение леммы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следствия 2. Положим

$$\varphi_j(t) = t^j \exp(-t^2), \quad j = 0, 1, \quad \alpha_n = n - 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Возьмем и зафиксируем некоторое $q > 1$. Нетрудно видеть, что все условия следствия 1 для последовательности $\{\alpha_n\}$ и функций φ_j , $j = 0, 1$, выполняются. Следовательно, для любой $\{c_n\}_{n=0}^{\infty} \in \mathbb{C}^{\infty}$ существуют функции $f_j \in E_{\varphi_j, q}$, $j = 0, 1$, для которых справедливы равенства

$$\int_0^{+\infty} t^n f_j(t) dt = \frac{c_n}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0, \quad j = 0, 1. \quad (16)$$

Теперь положим $f(t) = f_0(t) + f_1(t)$. По лемме 1

$$f(t) = \varphi_0(t) + u_0(t) + \varphi_1(t) + u_1(t),$$

где $u_0(t), u_1(t) \in [2, 1)$. Следовательно,

$$f(t) = (1 + t) \exp(-t^2) + u(t),$$

где $u(t) = u_0(t) + u_1(t) \in [2, 1)$. Отсюда заключаем, что f является целой функцией порядка 2 типа 1. Так как функция f_0 четна, а f_1 нечетна, то из (16) находим

$$\int_{-\infty}^0 t^n f_j(t) dt = (-1)^{n+j} \frac{c_n}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0, \quad j = 0, 1. \quad (17)$$

Складывая соотношения (16) и (17), приходим к равенствам

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^n f(t) dt = \frac{c_n}{2} (2 + (-1)^n + (-1)^{n+1}) = c_n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Следствие 2 доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следствия 3. При всех ρ , $1/2 < \rho < +\infty$, существует целая функция F_ρ порядка ρ , имеющая конечный и положительный тип, неотрицательная на $(0, +\infty)$ и лежащая в S_0 . Действительно, если $\rho = 1$, то указанным условиям удовлетворяет функция $\exp(-z)$, а если $\rho > 1/2$ и $\rho \neq 1$, то полагаем

$$F_\rho(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - z^m n^{-\tau})^2, \quad (18)$$

где $m = [\rho] + 1$, а $\tau = m/\rho$. Из результатов, имеющих в [4, с. 290–304], следует, что функция (18) обладает всеми требуемыми свойствами.

Возьмем $N \in \mathbb{N}$ таким, чтобы $N + \alpha_1 > 0$. Из сказанного вытекает, что если заданы числа $\rho > 1/2$ и $\sigma > 0$, то при некотором $\gamma > 0$ функция

$$\varphi(t) = t^N F_\rho(\gamma t)$$

имеет порядок ρ и тип σ , неотрицательна на $(0, +\infty)$ и лежит в S_0 . При этом, очевидно, функция $t^{\alpha_1} \varphi(t)$ ограничена на $(0, 1)$. Зафиксируем некоторое $q > 1$. Тогда согласно следствию 1 для любой $\{c_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{C}^\infty$ существует $f \in E_{\varphi, q}$, удовлетворяющая условиям (14). По лемме 1 $f(t) = \varphi(t) + u(t)$, причем $u \in [\rho, \sigma)$. Следовательно, f – целая функция порядка ρ типа σ . Следствие 3 доказано.

ЛЕММА 2. Если $q > 1$, $\varphi \in S_+$, то $E_{\varphi, q} \subset S_+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\varphi \in S_+$, то $\forall m \in \mathbb{N}_0$ $\varphi^{(m)} \in S_0$. Поэтому m раз продифференцированные ряды вида (4) сходятся равномерно на $[0, +\infty)$ и являются рядами такого же вида. Тем самым, для любой функции $f \in E_{\varphi, q}$ справедливы включения

$$f \in \mathbb{C}^\infty[0, +\infty) \quad \forall m \in \mathbb{N}_0, \quad f^{(m)} \in E_{\varphi, q}. \quad (19)$$

В доказательстве теоремы мы фактически проверили, что для любых $\psi \in S_0$ и $q > 1$ множество $E_{\psi, q}$ содержится в S_0 . Это вместе с (19) дает

$$f^{(m)} \in S_0 \quad \forall m \in \mathbb{N}_0. \quad (20)$$

Подставив $t = 0$ в продифференцированные ряды для функции f , убеждаемся в том, что соотношения

$$\varphi^{(m)}(0) = 0 \quad \forall m \in \mathbb{N}_0$$

влекут за собой равенства

$$f^{(m)}(0) = 0 \quad \forall m \in \mathbb{N}_0. \quad (21)$$

Из (20) и (21) получаем утверждение леммы.

Через $H_\infty(\Delta_\theta)$, $0 < \theta < \pi$, обозначим множество всех функций, аналитических и ограниченных в угле

$$\Delta_\theta = \{z \in \mathbb{C} \mid -\theta < \arg z < \theta, z \neq 0\}.$$

ЛЕММА 3. Пусть $q > 1$, $\varphi \in \bigcap_{0 < \theta < \pi} H_\infty(\Delta_\theta)$. Тогда

$$E_{\varphi, q} \subset \mathcal{A}(\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$M_\theta = \sup_{z \in \Delta_\theta} |\varphi(z)| < +\infty, \quad \theta \in (0, \pi).$$

Заметим, что если $\theta \in (0, \pi)$, $z \in \Delta_\theta$, то при всех $k \in \mathbb{N}$ имеем $zq^{-k} \in \Delta_\theta$. Поэтому

$$\sup_{k \in \mathbb{N}_0} \sup_{z \in \Delta_\theta} |\varphi(zq^{-k})| = M_\theta.$$

Ввиду сказанного все ряды вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k \varphi(zq^{-k}), \quad \text{где} \quad \sum_{k=0}^{\infty} |b_k| < +\infty,$$

равномерно сходятся в углах $\Delta_\theta \quad \forall \theta \in (0, \pi)$. Следовательно, для любой функции $f \in E_{\varphi, q}$ справедливы включения

$$f \in \bigcap_{0 < \theta < \pi} H_\infty(\Delta_\theta) \subset \mathcal{A}(\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]).$$

Лемма доказана.

Если $\varphi \in S_+$, то $t^a \varphi(t) \in S_0$ при любом $a \in \mathbb{R}$. Поэтому для того, чтобы вывести следствие 4 из следствия 1 и лемм 2 и 3, достаточно доказать существование положительной на $(0, +\infty)$ функции φ , для которой одновременно выполняются включения

$$\varphi \in S_+, \quad (22)$$

$$\varphi \in \bigcap_{0 < \theta < \pi} H_\infty(\Delta_\theta). \quad (23)$$

В качестве такой функции φ можно взять

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1/B(t), & t \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0], \\ 0, & t = 0, \end{cases} \quad (24)$$

где $B(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2^{-n(n-1)} t^n$. Включение (23) следует из разложения функции $B(t)$ в бесконечное произведение, найденного в [5, лемма 3].

Для доказательства (22) достаточно проверить, что для функции φ , определенной в (24), выполняются равенства

$$\varphi^{(k)}(0) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}_0, \quad (25)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^m \varphi^{(k)}(t) = 0 \quad \forall m, k \in \mathbb{N}_0. \quad (26)$$

Установим справедливость (26). С этой целью будет доказана

ЛЕММА 4. *При любых $n \in \mathbb{N}$ и $x > x_0(n)$ выполняется неравенство*

$$0 < B^{(n)}(x) < 2B(x). \quad (27)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $B(x) = B^+(x) + B^-(x)$, где

$$B^+(x) = \sum_{m=0}^{\infty} 2^{-m(m-1)} x^m, \quad B^-(x) = \sum_{m=-\infty}^{-1} 2^{-m(m-1)} x^m.$$

Функция $B^-(z)$ является аналитической в области $|z| > 0$ и равна нулю на бесконечности. Следовательно, и все ее производные обладают этим же свойством. В то же время функция $B^+(x)$ при $x \in \mathbb{R}$, $x \rightarrow +\infty$, неограниченно возрастает со всеми своими производными. Ввиду сказанного, для доказательства соотношения (27) достаточно при $x \geq 0$ установить неравенства

$$B^{+(n)}(x) \leq B^+(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (28)$$

Легко проверить, что если последовательность $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ положительна и не возрастает, то функция $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n / n!$ является целой, все ее производные на луче $(0, +\infty)$ положительны и

$$\forall x \geq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad F^{(n)}(x) \leq F(x).$$

Это замечание вместе с очевидным соотношением $n! \cdot 2^{-n(n-1)} \searrow 0$ приводит нас к (28). Тем самым лемма 4 доказана.

Имеем

$$\varphi^{(n)}(t) = \frac{P_n(B(t), B'(t), \dots, B^{(n)}(t))}{(B(t))^{n+1}}, \quad (29)$$

где P_n — некоторый однородный многочлен от $n + 1$ переменных степени n . Поэтому, учитывая (27), получаем оценку

$$|P_n(B(t), B'(t), \dots, B^{(n)}(t))| = O\left((B(t))^n\right), \quad t \rightarrow +\infty. \quad (30)$$

Из (29), (30) и очевидного включения

$$\varphi(t) = \frac{1}{B(t)} \in S_0$$

выводим (26). Из (26) и легко проверяемого тождества $\varphi(1/z) = z\varphi(z)$ следует (25). Требуемые свойства функции $\varphi(t)$ установлены, а это доказывает следствие 4.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило

07.08.92

Исправленный вариант

02.10.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Polya G. Sur l'indetermination d'un problème voisin du problème des moments // C. R. Acad. Sci. Paris. 1938. V. 207. P. 708–711.
- [2] Duran A. J. The Stieltjes moments problem for rapidly decreasing functions // Proc. Amer. Math. Soc. 1989. V. 107. P. 731–741.
- [3] Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. Т. 2. М.: Наука, 1968.
- [4] Титчмарш Е. Теория функций. М.–Л.: ГИТТЛ, 1951.
- [5] Казьмин Ю. А. Об одной задаче А. О. Гельфонда // Матем. сб. 1973. Т. 90 (132). № 4. С. 521–543.