Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Р. Романовский, Вычисление локальных симметрий обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка методом эквивалентности Картана, *Матем. заметки*, 1996, том 60, выпуск 1, 75–91

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1805>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 17:22:15

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЛОКАЛЬНЫХ СИММЕТРИЙ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА МЕТОДОМ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ КАРТАНА

Ю. Р. Романовский

1. Введение. Мы рассматриваем обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка

$$y'' = F(x, y, p), \quad p = y', \quad (1)$$

разрешенные относительно старшей производной. Правая часть F есть гладкая функция, определенная на открытом множестве U пространства 1-струй $J^1(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y)$ с координатами (x, y, p) . Решениями уравнения (1) мы называем кривые в $J^1(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y)$, касающиеся поля направлений

$$\frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial y} + F \frac{\partial}{\partial p}. \quad (2)$$

На множестве уравнений (1) действует псевдогруппа локальных диффеоморфизмов плоскости $\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y$. Действительно, любая неособая подстановка

$$\Phi = (\varphi(x, y), \psi(x, y)) \quad (3)$$

в плоскости $\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y$ продолжается естественным образом [1], [2] до контактного преобразования Φ^1 в пространстве $J^1(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y)$, где

$$\Phi^1 = \left(\Phi, \frac{\alpha}{\beta} \right), \quad \alpha = \psi_x + p\psi_y, \quad \beta = \varphi_x + p\varphi_y.$$

Точечное преобразование Φ^1 индуцирует отображение на множестве полей направлений, имеющих вид (2). При этом обратное преобразование $(\Phi^1)^{-1}$ переводит решения уравнения (1) в решения уравнения

$$y'' = H(x, y, p), \quad (4a)$$

$$H = \frac{(F \circ \Phi^1)\beta^3 + \alpha(\beta_x + p\beta_y) - \beta(\alpha_x + p\alpha_y)}{\Delta}, \quad (4b)$$

где $\Delta = (\varphi_x \psi_y - \varphi_y \psi_x)$. Уравнения (1) и (4) локально эквивалентны.

Инварианты такого действия исследовались в работах Р. Лиувилля [3], А. Трессе [4], Э. Картана [5], [6], а также в работах ряда современных авторов (см. [7], [8]). Данную статью можно рассматривать как продолжение этих исследований, цель которого есть вычисление инвариантов, различающих наиболее симметричные уравнения (т.е. уравнения, сохраняющиеся под действием достаточно большой группы Ли точечных преобразований) среди множества уравнений

$$y'' = A(x, y) + B(x, y)p + C(x, y)p^2 + D(x, y)p^3, \quad (5)$$

замкнутого относительно действия псевдогруппы. Геометрический смысл уравнений (5) состоит в том, что они находятся во взаимно однозначном соответствии с проективными структурами на двумерных многообразиях (см. [5], [6]).

Хорошо известно, что существование группы Ли симметрий проявляется на инфинитезимальном уровне. Напомним, что векторное поле

$$X = \xi(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial}{\partial y}, \quad (6)$$

определенное на открытом множестве плоскости $\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y$, называется инфинитезимальной точечной симметрией уравнения (1), если однопараметрическая группа сдвигов вдоль траекторий первого продолжения (см. [1], [2])

$$X^1 = X + (\eta_x + (\eta_y - \xi_x)p - \xi_y p^2) \frac{\partial}{\partial p} \quad (7)$$

сохраняет поле направлений (2). Это условие равносильно уравнению

$$\left[X^1, \frac{d}{dx} \right] + (\xi_x + p\xi_y) \frac{d}{dx} = 0, \quad (8)$$

где скобки $[\cdot, \cdot]$ обозначают коммутатор векторных полей. Множество всех инфинитезимальных точечных симметрий уравнения (1) образует алгебру Ли, которую мы обозначим через $\text{Sym}(F)$. Стандартный подход к вычислению алгебры $\text{Sym}(F)$ состоит в следующем [1]. Уравнение (8) эквивалентно переопределенной системе линейных дифференциальных уравнений, наложенной на неизвестные компоненты $\xi(x, y)$ и $\eta(x, y)$ векторного поля (6). Например, для уравнения (5) получается переопределенная система

$$\begin{cases} \eta_{xx} = A_x \xi + A_y \eta - A \eta_y + 2A \xi_x + B \eta_x, \\ 2\eta_{xy} - \xi_{xx} = B_x \xi + B_y \eta + 2C \eta_x + B \xi_x + 3A \xi_y, \\ \eta_{yy} - 2\xi_{xy} = C_x \xi + C_y \eta + 3D \eta_x + C \eta_y + 2B \xi_y, \\ -\xi_{yy} = D_x \xi + D_y \eta + 2D \eta_y - D \xi_x + C \xi_y, \end{cases} \quad (9)$$

которую мы будем называть системой Ли. Распространенный метод исследования переопределенных систем основан на преобразовании их либо к формально интегрируемому виду [9], либо к пассивной нормальной форме, т.е. к такой специальной форме, которая содержит и уравнения исходной системы, и все их нетривиальные дифференциальные следствия (теория Рикье–Жане–Томаса [10], [11], [12]). Например,

$$\begin{cases} u_{xx} = u_y, \\ u_{xy} = u, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_{xx} = u_y, \\ u_{xy} = u, \\ u_{yy} = u_x. \end{cases}$$

Это преобразование аналогично построению базиса Гребнера для идеала в кольце линейных дифференциальных операторов (см. [13]). Оно позволяет сделать заключение о совместности переопределенной системы и указать число произвольных параметров в ее общем решении. Кроме того, в процессе преобразования могут возникнуть простые дифференциальные следствия (например, $\xi_y = 0$ или $\eta_x = 0$), которые дают ключ к нахождению решения в явном виде.

Существенный недостаток указанного подхода состоит в том, что алгоритмы преобразования к формально интегрируемому виду или к пассивной нормальной форме являются весьма трудоемкими. Эксперименты с конкретными системами Ли показывают, что объем промежуточных вычислений становится серьезным препятствием к достижению ответа (даже при использовании ЭВМ). В общем случае этот подход приводит к следующей теореме, впервые доказанной Софусом Ли.

ТЕОРЕМА 1. *Для любой правой части F в уравнении (1) размерность алгебры $\text{Sym}(F)$ не превосходит числа 8. Максимальная размерность 8 достигается на уравнении*

$$y'' = 0. \quad (10)$$

Алгебра Ли точечных симметрий этого уравнения изоморфна $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$ и состоит из инфинитезимальных проективных преобразований.

Необходимые и достаточные условия того, что уравнение (1) допускает алгебру Ли точечных симметрий максимальной размерности 8, являются результатом классическим, который различными методами был получен в работах [3]–[6]. Мы приводим здесь эти условия в той форме, в которой они сформулированы в статье [7], посвященной подробному изложению метода эквивалентности Эли Картана для обыкновенных дифференциальных уравнений (1).

ТЕОРЕМА 2. *Следующие четыре условия равносильны:*

- (i) *уравнение (1) имеет восьмимерную алгебру $\text{Sym}(F)$;*
- (ii) *уравнение (1) локально эквивалентно линейному уравнению;*
- (iii) *уравнение (1) локально эквивалентно уравнению (10);*

(iv) уравнение (1) имеет вид (5), где коэффициенты A, B, C, D удовлетворяют соотношениям

$$L_1 \equiv -A_{yy} + \frac{2}{3}B_{xy} - \frac{1}{3}C_{xx} - DA_x - 2AD_x + CA_y + AC_y + \frac{1}{3}BC_x - \frac{2}{3}BB_y = 0, \quad (11)$$

$$L_2 \equiv \frac{2}{3}C_{xy} - \frac{1}{3}B_{yy} - D_{xx} + AD_y + 2DA_y - DB_x - BD_x - \frac{1}{3}CB_y + \frac{2}{3}CC_x = 0. \quad (12)$$

Очевидно, условие (iv) можно рассматривать как простой алгоритм, позволяющий распознать уравнения с алгеброй $\text{Sym}(F)$ максимальной размерности. При этом, если соотношения (11) и (12) выполнены, то соответствующая система Ли (9) сама является формально интегрируемой. В геометрических терминах теории Картана [5], [6] соотношения (11) и (12) означают, что проективная кривизна уравнения (5) обращается в нуль. Здесь нужно заметить, что существует критерий 8-мерности алгебры симметрий, принадлежащий самому Софусу Ли. Это критерий изложен в написанной с большим методическим мастерством брошюре Н.Х. Ибрагимова [14], где затронут также ряд других интересных вопросов группового анализа. По коэффициентам A, B, C, D Софус Ли строит некую переопределенную систему четырех нелинейных уравнений с частными производными первого порядка на две функции от (x, y) . Критерий же состоит в проверке совместности этой системы. Очевидно, что по эффективности этот результат уступает геометрическому критерию Эли Картана.

Естественно, возникает следующий вопрос. Можно ли подобным теореме 2 образом охарактеризовать уравнения с алгебрами точечных симметрий меньшей размерности?

В пункте 2, следуя работе [7], мы приводим необходимую информацию о методе Картана решения проблемы эквивалентности на множестве уравнений (1). На этой основе в пункте 3 мы вычисляем допустимые значения размерности $\dim$ алгебры $\text{Sym}(F)$: либо $\dim = 8$, либо $\dim \leq 3$. Этот результат получил еще С. Ли [15] как следствие своей знаменитой классификации конечномерных алгебр векторных полей на плоскости. Но мы даем в предложении 1 новое его доказательство по следующей причине. В этом доказательстве, основанном на теории Картана, явно вычислены 5 структурных инвариантов, остающихся независимыми на любом нелинеаризуемом уравнении. Существование таких инвариантов вместе с явными формулами для них является гораздо более сильным фактом, чем оценка размерности алгебры симметрий, которая становится теперь очевидным следствием: $\dim \leq 8 - 5 = 3$, где 8 – размерность расслоения проективных реперов. Именно этот факт, а не сама оценка, систематически используется для получения всех остальных результатов работы. К ним относятся:

теорема 3, где устанавливается аналогичный теореме 2 простой критерий того, что уравнение (5) имеет трехмерную алгебру симметрий, и предложение 2, где вычисляется пара универсальных дифференциальных следствий первого порядка системы Ли (9), означающих инвариантность тензора проективной кривизны Эли Картана. Кроме того, в предложении 3 для любого уравнения (5) с трехмерной алгеброй симметрий вычисляется третье универсальное дифференциальное следствие первого порядка системы Ли (9) и, тем самым, явно находится ее формально интегрируемый вид – теорема 4. Вывод всех трех универсальных дифференциальных следствий первого порядка системы Ли (9) основан на процедуре продолжения векторных полей из $\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y$ в расслоение проективных реперов.

Роль преобразования системы Ли к формально интегрируемому виду Σ особенно заметна для уравнений (5) с двумерной алгеброй симметрий $\mathcal{G}$. Можно показать, что в этом случае Σ состоит из четырех уравнений первого порядка (в то время как сама система Ли состоит из четырех уравнений второго порядка), а в алгебре $\mathcal{G}$ (т.е. в пространстве решений системы Σ) существует выделенная прямая $\mathcal{L} = [\mathcal{G}, \mathcal{G}] \neq 0$. Такие условия позволяют редуцировать Σ к системе первого порядка на одномерную подалгебру $\mathcal{L}$ и, как следствие, проинтегрировать исходную систему уравнений Ли (9) в квадратурах.

Отметим в заключение, что любая двумерная подалгебра в алгебре $\text{Sym}(F)$ есть информация, достаточная для решения в квадратурах самого уравнения (1) (см. [14], [16]).

2. Метод эквивалентности Картана. Проблема эквивалентности в данном случае формулируется следующим образом. Даны два уравнения с правыми частями F и H . Требуется описать все подстановки (3), преобразующие одно уравнение в другое по правилу (4). Если множество таких подстановок не пусто, то уравнения локально эквивалентны.

Первым шагом в решении проблемы эквивалентности методом Картана является формулировка задачи на языке теории G -структур. С этой целью мы рассмотрим подвижный корепер

$$\omega_F = (dx, dp - F \cdot dx, dy - p \cdot dx)^t, \quad (13)$$

определенный на открытом множестве $U \subset J^1(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y)$. Можно проверить [7], что если подстановка Φ в плоскости $\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y$ есть эквивалентность пары уравнений с правыми частями F и H , то точечное преобразование $\Psi = \Phi^1$ удовлетворяют условию

$$\Psi^* \omega_F = M \omega_H, \quad (14)$$

где M есть функция на $V = \Psi^{-1}(U)$ со значениями в четырехмерной линейной группе

$$G_4 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & e \\ 0 & 0 & ac \end{pmatrix} \in \text{GL}(3, \mathbb{R}) \mid ac \neq 0 \right\}. \quad (15)$$

Обратно, если диффеоморфизм Ψ в пространстве $J^1(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y)$ удовлетворяет условию (14), то Ψ есть точечное преобразование $\Psi = \Phi^1$, где подстановка Φ есть эквивалентность пары уравнений с правыми частями F и H .

Тем самым, задача свелась к следующей. Даны два корепера ω_F и ω_H , определенные на открытых множествах U и V соответственно. Требуется описать все диффеоморфизмы $\Psi: V \rightarrow U$, удовлетворяющие условию (14), где M есть функция на V со значениями в предписанной структурной линейной группе. Это и есть стандартная формулировка проблемы эквивалентности в локальной теории G -структур (см. [17], [18]).

Метод Картана, грубо говоря, представляет собой попытку редуцировать проблему эквивалентности с нетривиальной структурной группой к аналогичной проблеме с единичной группой, т.е. к проблеме эквивалентности абсолютных параллелизмов (определенных, вообще говоря, на большем пространстве), для которой имеется стандартная процедура решения (см. [19]).

В нашем случае задача действительно сводится к стандартной. Реализация метода Картана для корепера (13) и структурной группы (15) с описанием всех промежуточных редукций и продолжений изложена в работе [7]. Здесь же приводится только ответ, дополненный рядом замечаний и формул.

Успешная реализация метода Картана для корепера (13) и структурной группы (15) означает, что

- 1) найдено расслоение

$$E_F = B_{G_1} \rightarrow B_{G_4} \rightarrow U \subset J^1(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y), \quad (16)$$

где B_{G_4} есть G_4 -структура на U , порожденная корепером (13) и группой (15) (структурная функция B_{G_4} имеет постоянное значение), B_{G_1} есть G_1 -структура на B_{G_4} с одномерной структурной группой

$$G_1 = \left\{ \begin{pmatrix} \text{id} & 0 \\ Q & \text{id} \end{pmatrix} \in \text{GL}(7, \mathbb{R}) \mid Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & q \\ q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q \\ 0 & q & 0 \end{pmatrix}, q \in \mathbb{R} \right\},$$

являющаяся дважды редуцированным продолжением структуры B_{G_4} ;

- 2) найден подвижный корепер $\Omega_F = (\Omega^1, \dots, \Omega^8)^t$ на E_F , который задает абсолютный параллелизм, порожденный продолжением структуры B_{G_1} (продолжение алгебры Ли группы G_1 равно нулю);
- 3) диффеоморфизм тотальных пространств $\chi: E_H \rightarrow E_F$ есть эквивалентность абсолютных параллелизмов Ω_H и Ω_F :

$$\chi^* \Omega_F = \Omega_H$$

тогда и только тогда, когда χ является естественным продолжением диффеоморфизма $\Psi: V \rightarrow U$, удовлетворяющего условию (14).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пространство E_F для уравнения (5) можно интерпретировать как расслоение проективных реперов (т.е. как проективную структуру) на плоскости $\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y$, а параллелизм Ω_F – как форму, задающую в этом расслоении нормальную проективную связность (связность Картана [5], [6], [20]).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Расслоение E_F можно отождествить (при помощи тривиализации) с цилиндром $U \times G_4 \times G_1$ в прямом произведении $E = J^1(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y) \times G_4 \times G_1$, снабженном координатной системой (x, p, a, b, c, e, q) . Тогда уравнения (1) будут находиться во взаимно однозначном соответствии с параллелизмами Ω_F специального вида, определенными в одном и том же пространстве E . Этот специальный вид параллелизма Ω_F мы указываем в терминах дуального подвижного репера $\nabla_F = (\nabla_1, \dots, \nabla_8)$ ($\Omega^j(\nabla_i) = \delta_i^j$):

$$\begin{aligned} \nabla_1 &= a^{-1} \frac{d}{dx} + c^{-1}(2e + cF_p) \frac{\partial}{\partial a} - ac[q - (ac)^{-2}b(3e + cF_p)] \frac{\partial}{\partial b} \\ &\quad - a^{-1}(e + cF_p) \frac{\partial}{\partial c} - a^{-1}cF_y \frac{\partial}{\partial e} - \left[qa^{-1}F_p + a^{-2}c^{-1} \right. \\ &\quad \left. \times \left(F_{yp} - a^{-1}b \frac{d}{dx} F_p - c^{-1}eF_{pp} \right) + 2(qe(ac)^{-1} - T) \right] \frac{\partial}{\partial q}, \\ \nabla_2 &= c^{-1} \frac{\partial}{\partial p} + c^{-1}b \frac{\partial}{\partial a} - 2a^{-1}b \frac{\partial}{\partial c} - ac[q + (ac)^{-2}b(3e + cF_p) + S] \\ &\quad \times \frac{\partial}{\partial e} - [(ac)^{-1}b(q + S) - R] \frac{\partial}{\partial q}, \\ \nabla_3 &= (ac)^{-1} \left(-a^{-1}b \frac{d}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} - c^{-1}e \frac{\partial}{\partial p} \right) - aq \frac{\partial}{\partial a} - ac \\ &\quad \times [(ac)^{-1}bq + R] \frac{\partial}{\partial b} - c(q + S) \frac{\partial}{\partial c} - ac[(ac)^{-1}e(q + S) + T] \frac{\partial}{\partial e} \\ &\quad - \left[-q^2 + \frac{1}{6}(ac)^{-2} \frac{d}{dx} F_{ppp} - \frac{2}{3}a^{-3}c^{-2}b \frac{d}{dx} F_{pp} \right. \\ &\quad \left. + a^{-4}c^{-2}b^2 \frac{d}{dx} F_p - \frac{1}{3}a^{-2}c^{-3}eF_{ppp} + \frac{2}{3}a^{-3}c^{-2}bF_{yp} \right. \\ &\quad \left. + 2a^{-4}c^{-3}b^2eF_p - 2a^{-4}c^{-2}b^2F_y + 2(ac)^{-4}b^2e^2 \right] \frac{\partial}{\partial q}, \\ \nabla_4 &= a \frac{\partial}{\partial a} + b \frac{\partial}{\partial b} - q \frac{\partial}{\partial q}, \quad \nabla_5 = ac \frac{\partial}{\partial b} + (ac)^{-1}(2e + cF_p) \frac{\partial}{\partial q}, \\ \nabla_6 &= c \frac{\partial}{\partial c} + e \frac{\partial}{\partial e} - q \frac{\partial}{\partial q}, \quad \nabla_7 = ac \frac{\partial}{\partial e} + (ac)^{-1}b \frac{\partial}{\partial q}, \quad \nabla_8 = \frac{\partial}{\partial q}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 R &= \frac{1}{2}(ac)^{-2}bF_{pp} - \frac{1}{6}a^{-1}c^{-2}F_{ppp} - a^{-3}c^{-2}b^2F_p - (ac)^{-3}b^2e, \\
 S &= \frac{1}{2}(ac)^{-1}F_{pp} - 2a^{-2}c^{-1}bF_p - 3(ac)^{-2}be, \\
 T &= -\frac{1}{6}a^{-2}c^{-1}\frac{d}{dx}F_{pp} - \frac{1}{2}(ac)^{-2}eF_{pp} + \frac{2}{3}a^{-2}c^{-1}F_{yp} \\
 &\quad + a^{-3}c^{-2}beF_p - a^{-3}c^{-1}bF_y + (ac)^{-3}be^2.
 \end{aligned}$$

Сказанное допускает следующее резюме. Эквивалентности Φ пары уравнений с правыми частями F и H находятся во взаимно однозначном соответствии с эквивалентностями χ пары абсолютных параллелизмов ∇_F и ∇_H в пространстве E . Это соответствие дается формулой

$$\chi = \text{PROLONG}(\Phi^1), \quad (17)$$

где операция PROLONG индуцирована естественным продолжением в расщеплении (16):

$$\begin{aligned}
 \chi &= \left(\Phi^1, \frac{a}{\beta}, \frac{b\beta - a\varphi_y}{\Delta}, \frac{c\beta^2}{\Delta}, \frac{e\beta - c\beta^3\lambda/\Delta}{\Delta}, q + \frac{\mu}{\beta} \right), \\
 \lambda &= \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)_y - \varphi_y F \circ \Phi^1, \quad \mu = \frac{(a - bp)c\beta_y - bc\beta_x - \varphi_y(ae + bcH)}{(ac)^2}.
 \end{aligned}$$

В частности, когда $F = H$, множество всех эквивалентностей Φ совпадает с группой точечных симметрий уравнения (1). Всякая ее однопараметрическая подгруппа $\Phi(t)$ определяется векторным полем (6) с компонентами

$$\xi(x, y) = \frac{\partial}{\partial t}\varphi(x, y, t)|_{t=0}, \quad \eta(x, y) = \frac{\partial}{\partial t}\psi(x, y, t)|_{t=0}.$$

Соответствующая однопараметрическая подгруппа $\chi(t)$ автоморфизмов параллелизма ∇_F также определяется некоторым векторным полем X_F в пространстве E , которое находится как инфинитезимальное следствие формулы (17):

$$\begin{aligned}
 X_F &= X^1 - a(\xi_x + p\xi_y)\frac{\partial}{\partial a} - [(a - bp)\xi_y + b\eta_y]\frac{\partial}{\partial b} \\
 &\quad - c(\eta_y - \xi_x - 2p\xi_y)\frac{\partial}{\partial c} - \left[e(\eta - \xi p)_y + c\frac{d}{dx}(\eta - \xi p)_y \right] \frac{\partial}{\partial e} \\
 &\quad + (ac)^{-2}[(a - bp)c(\xi_{xy} + p\xi_{yy}) - bc(\xi_{xx} + p\xi_{xy}) \\
 &\quad - (ae + bcF)\xi_y] \frac{\partial}{\partial q}.
 \end{aligned} \quad (18)$$

При этом векторное поле (6) является инфинитезимальной симметрией уравнения (1) тогда и только тогда, когда

$$[X_F, \nabla_F] = 0.$$

Теперь мы готовы продемонстрировать преимущества перехода от уравнения (1) к параллелизму ∇_F . Например, [19], размерность группы автоморфизмов параллелизма в сумме с рангом параллелизма дает размерность пространства. Следовательно,

$$\dim \text{Sym}(F) = 8 - \text{rank}(\nabla_F). \quad (19)$$

Напомним, что ранг параллелизма $\text{rank}(\nabla_F)$ совпадает с рангом семейства функций $\mathcal{F}_s$, состоящего из компонент C_{ij}^k структурной функции параллелизма и их ковариантных производных до порядка s включительно:

$$\mathcal{F}_s = \{C_{ij}^k, \nabla_F(C_{ij}^k), \nabla_F^2(C_{ij}^k), \dots, \nabla_F^s(C_{ij}^k)\},$$

где

$$\sum_{k=1}^8 C_{ij}^k \nabla_k = [\nabla_i, \nabla_j] \quad (1 \leq i, j \leq 8), \quad (20)$$

s есть порядок параллелизма ∇_F , т.е. минимальное число удовлетворяющее условию $\text{rank}(\mathcal{F}_{s+1}) = \text{rank}(\mathcal{F}_s)$. Ранг семейства функций $\text{rank}(\mathcal{F})$ равен числу функционально независимых элементов в $\mathcal{F}$.

Набор функционально независимых элементов семейства $\mathcal{F}$ максимальной длины $\text{rank}(\mathcal{F})$ назовем фундаментальной системой в $\mathcal{F}$.

ЛЕММА. *Порядок и ранг параллелизма ∇_F вместе с набором функциональных зависимостей элементов семейства $\mathcal{F}_{s+1}$ от элементов фиксированной фундаментальной системы в семействе $\mathcal{F}_s$ однозначно определяют уравнение (1) в комплексном случае с точностью до локальной эквивалентности (см. [19]).*

Для преобразования системы Ли (9) к формально интегрируемому виду оказывается полезным следующий простой факт. Если векторное поле (6) есть инфинитезимальная симметрия уравнения (1), то любой элемент $f \in \mathcal{F}_s$ является первым интегралом векторного поля (18):

$$X_F(f) = 0. \quad (21)$$

Укажем, наконец, значения отличных от нуля компонент структурной функции в (20):

$$\begin{aligned}
 C_{21}^3 &= C_{14}^1 = C_{17}^6 = C_{18}^5 = C_{52}^4 = C_{26}^2 = C_{28}^7 = C_{34}^3 = C_{35}^1 \\
 &= C_{36}^3 = C_{37}^2 = C_{38}^4 = C_{38}^6 = C_{47}^7 = C_{48}^8 = C_{65}^5 = C_{75}^8 = C_{68}^8 = 1, \\
 C_{71}^4 &= C_{25}^6 = 2, \quad C_{13}^8 = \nabla_2(C_{31}^7), \\
 C_{23}^8 &= \nabla_1(C_{32}^5), \quad C_{32}^5 = -\frac{1}{6ac^3}F_{pppp}, \\
 C_{31}^7 &= -\frac{1}{6a^3c} \\
 &\times \left(\frac{d^2}{dx^2}F_{pp} - F_p \frac{d}{dx}F_{pp} - 4\frac{d}{dx}F_{yp} - 3F_y F_{pp} + 4F_p F_{yp} + 6F_{yy} \right).
 \end{aligned}$$

В частности, $\mathcal{F}_0 = \{C_{32}^5, C_{31}^7, \nabla_1(C_{32}^5), \nabla_2(C_{31}^7)\}$. Отсюда видно, что ранг параллелизма ∇_F равен нулю тогда и только тогда, когда

$$C_{32}^5 = 0, \quad C_{31}^7 = 0. \quad (22)$$

Эти соотношения равносильны условию (iv) теоремы 2. Уравнения (20) при этом превращаются в структурные алгебры $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$.

3. Приложения к групповому анализу. Прежде всего установим допустимые значения размерности алгебры $\text{Sym}(F)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Размерность алгебры точечных симметрий уравнения (1) либо равна восьми, либо не превосходит числа три.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (19) достаточно показать, что либо $\text{rank}(\nabla_F) = 0$, либо $\text{rank}(\nabla_F) \geq 5$. Условие $\text{rank}(\nabla_F) = 0$ равносильно соотношениям (22). Допустим, что соотношения (22) не выполнены. При этом возможны три случая: 1) $C_{32}^5 \neq 0$, $C_{31}^7 \neq 0$; 2) $C_{32}^5 = 0$, $C_{31}^7 \neq 0$; 3) $C_{32}^5 \neq 0$, $C_{31}^7 = 0$.

Пусть $C_{32}^5 \neq 0$, $C_{31}^7 \neq 0$. Здесь легко видеть, что $\text{rank}(\nabla_F) \geq 5$, поскольку все пять элементов семейства $\mathcal{F}_0 \cup \{\nabla_3(C_{31}^7)\} \subset \mathcal{F}_1$ суть независимые функции переменных (a, b, c, e, q) .

Пусть $C_{32}^5 = 0$, $C_{31}^7 \neq 0$. Заметим, что данный случай соответствует классу уравнений (5). Обозначим

$$I = C_{31}^7, \quad I_i = \nabla_i(I), \quad I_{i\dots j} = \nabla_i \cdots \nabla_j(I), \quad (23)$$

и рассмотрим семейство $\mathcal{F}^1 = \mathcal{F}_0 \cup \{I_1, I_3, I_{12}, I_{23}\} \subset \mathcal{F}_1$, где $\mathcal{F}_0 = \{I, I_2\}$. Пользуясь структурными уравнениями (20) и соотношениями

$$I_4 = -3I, \quad I_5 = 0, \quad I_6 = -I, \quad I_7 = 0, \quad I_8 = 0, \quad (24)$$

нетрудно показать, что все элементы из $\mathcal{F}_1 \setminus \mathcal{F}^1$ суть функции от

$$I, I_1, I_2, I_3 \in \mathcal{F}^1, \quad (25)$$

и, как следствие,

$$\text{rank}(\mathcal{F}_1) = \text{rank}(\mathcal{F}^1) \geq 4. \quad (26)$$

Неравенство в (26) объясняется тем, что структурные инварианты (25) суть независимые функции переменных (a, b, c, e, q) . Оценка (26) является точной: равенство достигается, например, для уравнения

$$y'' = y^2. \quad (27)$$

Следовательно, необходимо обратиться ко второму продолжению $\mathcal{F}_2$ семейства $\mathcal{F}_0$. Докажем, что

$$\text{rank}(\mathcal{F}_2) \geq 5. \quad (28)$$

Семейство $\mathcal{F}^2 = \mathcal{F}^1 \cup \{I_{11}, I_{13}, I_{33}, I_{112}, I_{123}, I_{233}\}$ содержится в $\mathcal{F}_2$. Опираясь, как и выше, на структурные уравнения (20) и соотношения (24), можно установить, что все элементы из $\mathcal{F}_2 \setminus \mathcal{F}^2$ функционально зависят от элементов семейства $\mathcal{F}^2$ и, как следствие, $\text{rank}(\mathcal{F}_2) = \text{rank}(\mathcal{F}^2)$. Проверим, что $\text{rank}(\mathcal{F}^2) \geq 5$. На самом деле мы проверим, что справедливо неравенство

$$\text{rank}(I, I_1, I_2, I_3, I_{12}, I_{11}) \geq 5. \quad (29)$$

Предположим противное:

$$I_{1i} = F_{1i}(I, I_1, I_2, I_3), \quad i = 1, 2. \quad (30)$$

Тогда имеют место формулы

$$F_{11} = \frac{6I_1^2}{5I}, \quad F_{12} = \frac{3I_1I_2}{4I} + \frac{I_3}{4}. \quad (31)$$

Действительно, функции F_{11} и F_{12} однозначно находятся как решения структурных уравнений

$$(\nabla_4, \nabla_5, \nabla_6, \nabla_7, \nabla_8)(I_{11}) = (-5I_{11}, 0, -I_{11}, -12I_1, 0), \quad (32)$$

$$(\nabla_4, \nabla_5, \nabla_6, \nabla_7, \nabla_8)(I_{12}) = (-4I_{12}, -I_1, -2I_{12} - 4I_2, I), \quad (33)$$

где операторы $\nabla_4, \nabla_5, \nabla_6, \nabla_7, \nabla_8$ в координатах (25) имеют вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_4 = -3I \frac{\partial}{\partial I} - 4I_1 \frac{\partial}{\partial I_1} - 3I_2 \frac{\partial}{\partial I_2} - 4I_3 \frac{\partial}{\partial I_3}, \\ \nabla_5 = -I \frac{\partial}{\partial I_2} - I_1 \frac{\partial}{\partial I_3}, \\ \nabla_7 = -5I \frac{\partial}{\partial I_1} - I_2 \frac{\partial}{\partial I_3}, \quad \nabla_8 = 4I \frac{\partial}{\partial I_3}, \\ \nabla_6 = -I \frac{\partial}{\partial I} - I_1 \frac{\partial}{\partial I_1} - 2I_2 \frac{\partial}{\partial I_2} - 2I_3 \frac{\partial}{\partial I_3}. \end{array} \right. \quad (34)$$

Уравнения (32), (33) и формулы (34) являются прямыми следствиями структурных уравнения (20) и соотношений (24).

Из предложения (30), в силу структурных уравнений

$$\nabla_2(I_{12}) = I_{23}, \quad (35)$$

$$\nabla_2(I_{11}) - \nabla_1(I_{12}) = 2I_{13}, \quad \nabla_2(I_{13}) - \nabla_1(I_{23}) = I_{33}, \quad (36)$$

вытекает также, что

$$I_{i3} = F_{i3}(I, I_1, I_2, I_3), \quad i = 1, 2, 3. \quad (37)$$

В самом деле, операторы ∇_1 и ∇_2 в координатах (25) имеют вид

$$\begin{aligned} \nabla_1 &= I_1 \frac{\partial}{\partial I} + I_{11} \frac{\partial}{\partial I_1} + I_{12} \frac{\partial}{\partial I_2} + I_{13} \frac{\partial}{\partial I_3}, \\ \nabla_2 &= I_2 \frac{\partial}{\partial I} + (I_{12} + I_3) \frac{\partial}{\partial I_1} + I_{23} \frac{\partial}{\partial I_3}. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения вместе с (30) и (31) в уравнения (35), (36), мы приходим к (37), где

$$\begin{cases} F_{13} = -\frac{I_1^2 I_2}{20I^2} + \frac{5I_1 I_3}{4I}, \\ F_{23} = -\frac{I_1 I_2^2}{4I^2} + \frac{5I_2 I_3}{4I}, \\ F_{33} = -\frac{I_1^2 I_2^2}{20I^3} + \frac{5I_3^2}{4I}. \end{cases} \quad (38)$$

Для того, чтобы свести предположение (30) к противоречию, рассмотрим еще одно структурное уравнение:

$$\nabla_1(I_{13}) - \nabla_3(I_{11}) = 5I^2. \quad (39)$$

Учитывая, что оператор ∇_3 в координатах (25) имеет вид

$$\nabla_3 = I_3 \frac{\partial}{\partial I} + I_{13} \frac{\partial}{\partial I_1} + I_{23} \frac{\partial}{\partial I_2} + I_{33} \frac{\partial}{\partial I_3},$$

подставим в уравнение (39) функции F_{ij} вместо I_{ij} . В результате левая часть (39) обратится в нуль. Следовательно, предположение (30) противоречит условию $I \neq 0$. А это значит, что неравенство (29) и, как следствие, неравенство (28) полностью доказаны.

В случае 3 неравенство (28) устанавливается буквально так же, как и в случае 2. Предложение 1 доказано.

Трехмерную алгебру симметрий допускают, например, уравнения

$$y'' = \pm(x \cdot y' - y)^3. \quad (40)$$

Эти уравнения не эквивалентны друг другу в вещественном случае, но имеют одну и ту же алгебру точечных симметрий, которая изоморфна $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ и состоит из сохраняющих площадь инфинитезимальных линейных преобразований:

$$y \frac{\partial}{\partial x}, \quad x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y}, \quad x \frac{\partial}{\partial y}.$$

Множество решений уравнения (40) состоит из семейства прямых, проходящих через начало координат, и семейства квадрик:

$$[x \cos(t) - y \sin(t)]^2 \cdot R^2 \pm [x \sin(t) + y \cos(t)]^2 \cdot R^{-2} = 1.$$

ТЕОРЕМА 3. *Следующие условия равносильны:*

- (i) *уравнение (5) имеет трехмерную алгебру точечных симметрий;*
- (ii) *уравнение (5) локально эквивалентно уравнению (40);*
- (iii) *коэффициенты уравнения (5) удовлетворяют соотношениям*

$$J_{23}I = J_{12}I_2, \quad J_{11}J_{12} = \frac{25}{12}I^3, \quad J_{13}I = \frac{1}{5}J_{12}I_1 + J_{11}I_2, \quad (41)$$

где $J_{ij} = I_{ij} - F_{ij}$, а величины I , I_i , I_{ij} и F_{ij} определены в (23) и (31), (38) соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы будем доказывать теорему в следующем порядке: (i) $\iff$ (iii) $\iff$ (ii).

Пусть уравнение (5) имеет трехмерную алгебру точечных симметрий. Тогда из (28) следует соотношение

$$\text{rank}(\mathcal{F}_2) = 5. \quad (42)$$

Отсюда, в силу неравенства (29) и структурных уравнений (33), (35), находим, что либо

$$\text{rank}(\mathcal{F}_1) = \text{rank}(I, I_1, I_2, I_3, I_{12}) = 5, \quad (43)$$

либо имеют место формулы $I_{12} = F_{12}$, $I_{23} = F_{23}$, которые эквивалентны соотношению

$$\text{rank}(\mathcal{F}_1) = 4. \quad (44)$$

С помощью техники, использованной в доказательстве предложения 1, трудно проверить, что из (42) и (44) вытекает неравенство $\text{rank}(\mathcal{F}_3) \geq 6$ (например, для уравнения (27) соотношения (42), (44) справедливы, и $\text{rank}(\mathcal{F}_3) = \text{rank}(\mathcal{F}_4) = 6$). Следовательно, соотношение (44) противоречит условию (i). А это значит, что пара соотношений (42) и (43) равносильна условию (i).

Покажем теперь, что пара соотношений (42) и (43) однозначно определяет функциональную зависимость каждого элемента семейства $\mathcal{F}_2$ от элементов фундаментальной системы

$$\{I, I_1, I_2, I_3, I_{12}\} \subset \mathcal{F}_1. \quad (45)$$

Для проверки этого факта достаточно исследовать функциональную зависимость элементов меньшего семейства $\mathcal{F}^2 \subset \mathcal{F}_2$, определенного в доказательстве предложения 1. Пусть

$$I_{23} = F_{23} + H_{23}, \quad I_{11} = F_{11} + H_{11}, \quad I_{13} = F_{13} + H_{13}, \quad (46)$$

где H_{ij} суть функции переменных (45). Все остальные элементы семейства $\mathcal{F}^2$ однозначно выражаются через функции H_{23} , H_{11} , H_{13} и их производные. Действительно, формулы для I_{33} , I_{112} фиксируются структурными уравнениями (36) и видом операторов ∇_1 , ∇_2 в координатах (45):

$$\begin{aligned} \nabla_1 &= I_1 \frac{\partial}{\partial I} + I_{11} \frac{\partial}{\partial I_1} + I_{12} \frac{\partial}{\partial I_2} + I_{13} \frac{\partial}{\partial I_3} + [\nabla_2(I_{11}) - 2I_{13}] \frac{\partial}{\partial I_{12}}, \\ \nabla_2 &= I_2 \frac{\partial}{\partial I} + (I_{12} + I_3) \frac{\partial}{\partial I_1} + I_{23} \frac{\partial}{\partial I_3} + I_{23} \frac{\partial}{\partial I_{12}}. \end{aligned}$$

Формулы для I_{123} и I_{233} выводятся непосредственно из определений:

$$I_{123} = \nabla_1(I_{23}), \quad I_{233} = \nabla_2(I_{33}).$$

Функции H_{ij} вычисляются тем же методом, что и функции F_{ij} . Соотношения (33) в данном случае используются для продолжения операторов (34) до дифференцирований на большем пространстве с координатами (45). Формула

$$H_{11} = \frac{k_1 I^3}{J_{12}} \quad (47)$$

находится из решений структурных уравнений (32). Формулы

$$H_{13} = \frac{I_1 J_{12}/5 + I_2 H_{11}}{I} + k_2 I J_{12}^{1/2}, \quad (48)$$

$$H_{23} = \frac{I_2 J_{12}}{I} + \frac{k_3 J_{12}^{5/2}}{I^2} \quad (49)$$

находятся из решения аналогичных структурных уравнений:

$$\begin{aligned} (\nabla_4, \nabla_5, \nabla_6, \nabla_7, \nabla_8)(I_{13}) &= (-5I_{13}, -I_{11}, -2I_{13}, -(I_{12} + 6I_3), 5I_1), \\ (\nabla_4, \nabla_5, \nabla_6, \nabla_7, \nabla_8)(I_{23}) &= (-4I_{23}, -(I_{12} + I_3), -3I_{23}, 0, 5I_2). \end{aligned}$$

Постоянные $k_1 = 25/12$, $k_2 = 0$, $k_3 = 0$ находятся в результате подстановки (46)–(49) в следующие уравнения:

$$\nabla_2(I_{23}) = 0, \quad \nabla_1(I_{33}) - \nabla_3(I_{13}) = 5I_2I,$$

где $I_{33} = F_{33} + H_{33}$, функция H_{33} и оператор ∇_3 даются формулами

$$H_{33} = \frac{2I_2H_{13}}{I} - \frac{4I_2^2H_{11}}{I^2} + \frac{2I_1H_{23}}{5I} - \frac{2I_1I_2J_{12}}{5I^2} - \frac{4J_{12}^2}{5I},$$

$$\nabla_3 = I_3 \frac{\partial}{\partial I} + I_{13} \frac{\partial}{\partial I_1} + I_{12} \frac{\partial}{\partial I_2} + I_{33} \frac{\partial}{\partial I_3} + [\nabla_1(I_{23})] \frac{\partial}{\partial I_{12}}.$$

Подставляя теперь (47)–(49) в (46), мы получаем соотношения (41). Из леммы, сформулированной в пункте 2, следует, что в комплексном случае соотношения (41) определяют единственное (с точностью до локальной эквивалентности) уравнение. Это уравнение имеет вид (40). Теорема 3 доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Если векторное поле (6) есть симметрия уравнения (5), то его компоненты $\xi(x, y)$ и $\eta(x, y)$ удовлетворяют соотношениям*

$$\begin{cases} L_1\xi_y + L_2\xi_x + 2L_2\eta_y + L_{2x}\xi + L_{2y}\eta = 0, \\ L_2\eta_x + L_1\eta_y + 2L_1\xi_x + L_{1x}\xi + L_{1y}\eta = 0, \end{cases} \quad (50)$$

где $L_1(x, y)$ и $L_2(x, y)$ определены в (11) и (12) соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пара соотношений (50) эквивалентна условию (21) при $f = I$. Этот факт легко проверить, используя следующую формулу: $I = (L_1 + L_2p)/(a^3c)$. Предложение 2 доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Уравнения (50) означают, что симметрии оставляют инвариантным тензор $(L_1dx + L_2dy) \otimes (dx \wedge dy)$, найденный Эли Картаном при вычислении проективной кривизны двухпараметрического семейства интегральных кривых уравнения (5) в плоскости $\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y$. Тензор проективной кривизны определяет вблизи каждой точки (x, y) инфинитезимальную проективную трансляцию с центром в самой точке (x, y) и неподвижной “бесконечно удаленной” прямой

$$L_1(x, y) dx + L_2(x, y) dy = 0. \quad (51)$$

В своей книге [6] Эли Картан установил, что если уравнение (5) есть уравнение геодезических римановой метрики, то направления (51) суть направления, ортогональные линиям постоянной гауссовой кривизны.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Если векторное поле (6) есть симметрия уравнения (5), локально эквивалентного (40), то его компоненты $\xi(x, y)$ и $\eta(x, y)$ удовлетворяют соотношению

$$2\rho(\xi_x + \eta_y) + \rho_x \xi + \rho_y \eta = 0 \quad (52)$$

и двум дифференциальным следствиям

$$\begin{cases} \xi_{xx} + \eta_{xy} = - \left[\frac{\rho_x \xi + \rho_y \eta}{2\rho} \right]_x, \\ \xi_{xy} + \eta_{yy} = - \left[\frac{\rho_x \xi + \rho_y \eta}{2\rho} \right]_y, \end{cases} \quad (53)$$

где

$$\begin{aligned} \rho &= L_{2x} + \frac{1}{2}L_2B - \frac{1}{4}L_{1y} - \frac{1}{4}L_1C - \frac{3}{4} \frac{(L_{1x} + L_2A)L_2}{L_1} \\ &= -L_{1y} + \frac{1}{2}L_1C + \frac{1}{4}L_{2x} - \frac{1}{4}L_2B + \frac{3}{4} \frac{(L_{2y} - L_1D)L_1}{L_2}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Соотношение (52), означающее инвариантность тензора $\rho(dx \wedge dy)^2$, равносильно условию (21) при $f = J_{12}$. В самом деле, для уравнения (40) имеет место следующая формула: $J_{12} = \rho/(a^4c^2)$. Правило преобразования (17) показывает, что эта формула справедлива также для любого уравнения, локально эквивалентного (40). Предложение 3 доказано.

ТЕОРЕМА 4. Система Ли (9) для уравнения (5) с трехмерной алгеброй точечных симметрий равносильна формально интегрируемой системе Σ , состоящей из шести уравнений второго порядка (9), (53) и трех уравнений первого порядка (50), (52).

Данное утверждение есть очевидное следствие предложений 2, 3 и теоремы 3. Уместно подчеркнуть здесь лишь то, что система Σ не совпадает с продолжением системы первого порядка (50), (52).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
- [2] Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989.
- [3] Liouville R. // Jour. de l'Ecole Polytechnique. 1889. V. 59. P. 7–88.
- [4] Tresse M. A. Determination des Invariants Ponctuels de l'Equation Differentielle Ordinaire du Second Ordre $y'' = \omega(x, y, y')$. Leipzig: Hizrel, 1896.
- [5] Cartan E. // Bull. Soc. Math. France. 1924. V. 52. P. 205–241.
- [6] Cartan E. Lecon sur la theorie des espaces a connexion projective. Paris: Gauthier-Villars, 1937.
- [7] Grissom C., Thompson G., Wilkens G. // J. Differential Equations. 1989. V. 77. P. 1–15.
- [8] Hsu L., Kamran N. // Proc. London Math. Soc. 1989. V. 58. № 3. P. 387–416.
- [9] Алексеевский Д. В., Виноградов А. М., Лычагин В. В. Основные идеи и понятия дифференциальной геометрии // Итоги науки и техн. Современ. пробл. матем. Фундамент. направления. Т. 28. М.: ВИНТИ, 1988.
- [10] Riquier C. Les systemes d'equations aux derivees partielles. Paris: Gauthier-Villars, 1910.
- [11] Janet M. Lecons sur les systemes d'equations aux derivees. Paris: Gauthier-Villars, 1929.
- [12] Thomas J. Differential Systems. AMS Colloquium publication. V. 21. N. Y., 1937.
- [13] Topunov V. L. // Acta Appl. Math. 1989. V. 16. P. 191–206.
- [14] Ибрагимов Н. Х. Опыт группового анализа обыкновенных дифференциальных уравнений. № 7. М.: Знание, 1991.
- [15] Lie S. Gesammelte Abhandlugen. V. 6. Leipzig-Oslo, 1927.
- [16] Duzhin S. V., Lychagin V. V. // Acta Appl. Math. 1991. V. 24. P. 29–57.
- [17] Cartan E. Les problemes d'equivalence // Oeuvres Completes. P. II. V. 2. Paris: Gauthier-Villars, 1953. P. 1311–1334.
- [18] Gardner R. B. The Method of Equivalence and Its Applications. Philadelphia: SIAM, 1989.
- [19] Стенберг С. Лекции по дифференциальной геометрии. М.: Мир, 1970.
- [20] Кобаяси Ш. Группы преобразований в дифференциальной геометрии. М.: Наука, 1986.