Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Савушкина, О группе сопрягающих автоморфизмов свободной группы, *Матем. заметки*, 1996, том 60, выпуск 1, 92–108

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1806>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 06:11:57

О ГРУППЕ СОПРЯГАЮЩИХ АВТОМОРФИЗМОВ СВОБОДНОЙ ГРУППЫ

А. Г. Савушкина

Пусть F_n , ($n \geq 2$) – свободная группа со свободными образующими $a_1, \dots, a_n$ и пусть $\text{Aut } F_n$ – группа автоморфизмов свободной группы F_n . Автоморфизм из группы $\text{Aut } F_n$ называется *сопрягающим автоморфизмом*, если он отображает каждую образующую a_p в слово вида $W_p^{-1}(a_1, \dots, a_n)a_{i_p}W_p(a_1, \dots, a_n)$. Группа сопрягающих автоморфизмов обозначается через C_n . При задании автоморфизмов неподвижные образующие не выписываются. Автоморфизм из группы C_n называется *сопрягающим базис автоморфизмом* (см. [1]), если он отображает каждую образующую a_p в слово вида $W_p^{-1}(a_1, \dots, a_n)a_pW_p(a_1, \dots, a_n)$. Группа сопрягающих базис автоморфизмов $\mathfrak{M}_n$ порождается автоморфизмами (см. [2])

$$\varepsilon_{i,j}: a_i \rightarrow a_j^{-1}a_i a_j \quad (1 \leq i, j \leq n, i \neq j) \quad (1)$$

и определяющими соотношениями (см. [1])

$$\begin{aligned} \varepsilon_{i,j}\varepsilon_{k,l} &= \varepsilon_{k,l}\varepsilon_{i,j} \quad (i \neq k, i \neq l, j \neq k), \\ \varepsilon_{i,k}\varepsilon_{i,j}\varepsilon_{k,i} &= \varepsilon_{k,j}\varepsilon_{i,j}\varepsilon_{i,k}. \end{aligned} \quad (2)$$

Симметрическая группа подстановок $\mathfrak{S}_n$ является подгруппой группы C_n . Она порождается автоморфизмами

$$\alpha_i: \begin{cases} a_i \rightarrow a_{i+1} \\ a_{i+1} \rightarrow a_i \end{cases} \quad (i = 1, \dots, n-1), \quad (3)$$

и определяющими соотношениями (см., например, [3])

$$\begin{aligned} \alpha_i^2 &= 1, \quad \alpha_i\alpha_{i+1}\alpha_i = \alpha_{i+1}\alpha_i\alpha_{i+1} \quad (1 \leq i \leq n-2), \\ \alpha_i\alpha_k &= \alpha_k\alpha_i \quad (1 \leq i, k \leq n-1, |i-k| > 1). \end{aligned} \quad (4)$$

Подгруппа группы C_n , состоящая из тех автоморфизмов, которые отображают на себя произведение $a_1a_2 \cdots a_n$, является группой кос $\mathfrak{B}_n$ (см., например, [4]). Она порождается автоморфизмами

$$\sigma_i: \begin{cases} a_i \rightarrow a_{i+1} \\ a_{i+1} \rightarrow a_{i+1}^{-1}a_i a_{i+1} \end{cases} \quad (i = 1, \dots, n-1), \quad (5)$$

и определяющими соотношениями (см. [5])

$$\begin{aligned}\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i &= \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \quad (i = 1, \dots, n-2), \\ \sigma_i \sigma_j &= \sigma_j \sigma_i \quad (i, j = 1, \dots, n-1, \quad |i-j| > 1).\end{aligned}\quad (6)$$

Подгруппа группы кос $\mathfrak{B}_n$, порожденная автоморфизмами

$$\rho_{i,j} = \sigma_{j-1} \sigma_{j-2} \cdots \sigma_{i+1} \sigma_i^2 \sigma_{i+1} \cdots \sigma_{j-2} \sigma_{j-1} \quad (1 \leq i < j \leq n), \quad (7)$$

является группой крашенных кос $\mathfrak{N}_n$ (см. [6]).

В настоящей работе доказано, что группа сопрягающих автоморфизмов $\mathbf{C}_n$ является полупрямым произведением (нормальной) подгруппы $\mathfrak{M}_n$ на подгруппу $\mathfrak{S}_n$. Приведено задание группы $\mathbf{C}_n$ через образующие групп $\mathfrak{B}_n$ и $\mathfrak{S}_n$. Указаны выражения образующих группы $\mathfrak{N}_n$ через образующие группы $\mathfrak{M}_n$. Группы $\mathbf{C}_n$ и $\mathfrak{M}_n$ имеют тривиальные центры. Указаны необходимые и достаточные условия принадлежности автоморфизма коммутанту $\mathbf{C}'_n$ группы $\mathbf{C}_n$ и коммутанту $\mathfrak{M}'_n$ группы $\mathfrak{M}_n$. Доказано, что $\mathfrak{M}'_n \cap \mathfrak{B}'_n = \mathfrak{N}'_n$. Показано, что ядро представления Бурау группы кос $\mathfrak{B}_n$ матрицами n -го порядка (с элементами из кольца многочленов Лорана от одной переменной с целыми коэффициентами) принадлежит $\mathfrak{N}'_n$, и всякий элемент из ядра представления Гасснер группы крашенных кос $\mathfrak{N}_n$ матрицами n -го порядка (с элементами из кольца многочленов Лорана от n переменных с целыми коэффициентами) при выдергивании любой нити переходит в некоторый элемент ядра представления Гасснер группы $\mathfrak{N}_{n-1}$. Эти результаты усиливают оба утверждения теоремы 3.14 Бирман [7].

ЛЕММА 1. *Группа $\mathbf{C}_n$ порождается автоморфизмами (1), (3) и определяющими соотношениями (2), (4) и*

$$\begin{aligned}\varepsilon_{i,j} \alpha_k &= \alpha_k \varepsilon_{i,j}, \quad k \neq i, i-1, j, j-1, \\ \varepsilon_{i,j} \alpha_i &= \alpha_i \varepsilon_{i+1,j}, \quad \varepsilon_{i,j} \alpha_j = \alpha_j \varepsilon_{i,j+1}, \quad \varepsilon_{i,i+1} \alpha_i = \alpha_i \varepsilon_{i+1,i}.\end{aligned}\quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $C = a_i \rightarrow W_i^{-1} a_{\gamma_i} W_i$ ($i = 1, \dots, n$), где $\begin{pmatrix} 1 \dots n \\ \gamma_1 \dots \gamma_n \end{pmatrix}$ – подстановка, – произвольный автоморфизм из группы $\mathbf{C}_n$. Автоморфизм $Q = a_{\gamma_j} \rightarrow a_j$ ($j = 1, \dots, n$) может быть представлен, как слово в алфавите $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$. Если $Q = R(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$, то автоморфизм CR является сопрягающим базис и по теореме Хэмфри (см. [2]) порождается образующими $\{\varepsilon_{i,j}\}$. Если $CR = T(\varepsilon_{i,j})$, то $C = T(\varepsilon_{i,j})R^{-1}(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$, т.е. автоморфизм C порождается автоморфизмами $\{\varepsilon_{i,j}\}, \{\alpha_k\}$.

То, что (2), (4), (8) выполняются в группе $\mathbf{C}_n$ проверяется из определений автоморфизмов $\{\varepsilon_{i,j}\}$ и $\{\alpha_k\}$. Для любой пары образующих α_k и $\varepsilon_{i,j}$ в системе (8) найдется соотношение вида $\alpha_k \varepsilon_{i,j} = \varepsilon_{i_1,j_1} \alpha_k$ для некоторого ε_{i_1,j_1} . “Передвигаая” в тождественном автоморфизме $P(\varepsilon_{i,j}, \alpha_i)$ все α_i в конец слова, переведем соотношениями (8) слово $P(\varepsilon_{i,j}, \alpha_i)$ в слово

$R(\varepsilon_{i,j})V(\alpha_i)$. Поскольку $V(\alpha_i) = R^{-1}(\varepsilon_{i,j})$, то автоморфизм $V(\alpha_i)$ является сопрягающим базис и, следовательно, переводится в единицу соотношениями (4). Автоморфизм $R(\varepsilon_{i,j})$ также тождественный и по теореме Маккула (см. [1]) переводится в единицу соотношениями (2).

Рассмотрим список автоморфизмов

$$\beta_i: a_i \rightarrow a_{i+1}^{-1} a_i a_{i+1} \quad (i = 1, \dots, n-1). \quad (9)$$

Аutomорфизмы $\{\alpha_k\}$ и $\{\beta_k\}$ назовем элементарными.

Из определения автоморфизмов следует равенство

$$\beta_i = \varepsilon_{i,i+1} \quad (i = 1, \dots, n-1). \quad (10)$$

Равенства

$$\begin{aligned} \varepsilon_{i,j} &= \alpha_{j-1} \alpha_{j-2} \cdots \alpha_{i+1} \beta_i \alpha_{i+1} \cdots \alpha_{j-2} \alpha_{j-1}, \quad (i < j), \\ \varepsilon_{j,i} &= \alpha_{j-1} \alpha_{j-2} \cdots \alpha_{i+1} \alpha_i \beta_i \alpha_i \alpha_{i+1} \cdots \alpha_{j-2} \alpha_{j-1} \quad (i < j) \end{aligned} \quad (11)$$

показывают, каким образом автоморфизмы $\varepsilon_{i,j}$ выражаются через элементарные автоморфизмы. Равенства (11) проверяются из определений автоморфизмов.

ЛЕММА 2. *Группа C_n порождается автоморфизмами (3), (9) и определяющими соотношениями (4) и*

$$\beta_i \beta_j = \beta_j \beta_i, \quad |i - j| > 1, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \alpha_i \beta_j &= \beta_j \alpha_i, \quad |i - j| > 1, \quad \alpha_i \beta_{i+1} \alpha_i = \alpha_{i+1} \beta_i \alpha_{i+1}, \\ (\alpha_i \beta_{i+1})^2 &= (\beta_{i+1} \alpha_i)^2, \quad (\alpha_i \beta_{i+1})^2 \beta_i = \beta_i (\alpha_i \beta_{i+1})^2. \end{aligned} \quad (13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 1 группа C_n порождается автоморфизмами $\{\varepsilon_{i,j}\}$, $\{\alpha_k\}$ и определяющими соотношениями (2), (4), (8). Добавив образующие $\{\beta_k\}$ и определяющие соотношения (10) получим изоморфную группу. Из определений автоморфизмов $\alpha_i, \beta_i, \varepsilon_{i,j}$ следует, что равенства (11), (12), (13) выполняются в группе C_n . Следовательно, по лемме 1 они выводимы из соотношений (2), (4), (8), (10), и группа, задаваемая образующими $\{\varepsilon_{i,j}\}$, $\{\alpha_k\}$, $\{\beta_k\}$ и определяющими соотношениями (2), (4), (8), (10), (11), (12), (13), изоморфна группе C_n . В дальнейшем мы покажем, что соотношения (2), (8) выводятся из (4), (10), (11), (12), (13). Соотношения

$$\begin{aligned} &\alpha_{j-1} \alpha_{j-2} \cdots \alpha_{i+1} \beta_i \alpha_{i+1} \cdots \alpha_{j-2} \alpha_{j-1} \\ &= \alpha_i \alpha_{i+1} \cdots \alpha_{j-2} \beta_{j-1} \alpha_{j-2} \cdots \alpha_{i+1} \alpha_i \quad (i < j), \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} &\alpha_{j-1} \alpha_{j-2} \cdots \alpha_i \beta_i \alpha_i \cdots \alpha_{j-2} \alpha_{j-1} \\ &= \alpha_i \alpha_{i+1} \cdots \alpha_{j-1} \beta_{j-1} \alpha_{j-1} \cdots \alpha_{i+1} \alpha_i \quad (i < j) \end{aligned} \quad (15)$$

выводятся из соотношений (4), (13), поэтому ими можно пользоваться.

Воспользовавшись соотношениями (11), запишем соотношения (8) в алфавите $\{\alpha_k\}, \{\beta_k\}$. “Передвигая” при помощи соотношений (4) образующие α_k внутрь выражений

$$\begin{aligned} & \alpha_{j-1}\alpha_{j-2}\cdots\alpha_{i+1}\beta_i\alpha_{i+1}\cdots\alpha_{j-2}\alpha_{j-1}, \\ & \alpha_{j-1}\alpha_{j-2}\cdots\alpha_{i+1}\alpha_i\beta_i\alpha_i\alpha_{i+1}\cdots\alpha_{j-2}\alpha_{j-1} \end{aligned}$$

и используя соотношения (13), мы приведем полученные равенства к тождествам.

Для доказательства первого соотношения системы (2) сначала необходимо доказать выводимость равенства

$$\varepsilon_{p,q}\beta_i = \beta_i\varepsilon_{p,q} \quad (i \neq p, q, p-1). \quad (16)$$

Если $q < i < p$, то, воспользовавшись соотношениями (11), (15), получим равенство

$$\begin{aligned} & \alpha_q\alpha_{q+1}\cdots\alpha_{p-1}\beta_{p-1}\alpha_{p-1}\cdots\alpha_{q+1}\alpha_q\beta_i \\ & = \beta_i\alpha_q\alpha_{q+1}\cdots\alpha_{p-1}\beta_{p-1}\alpha_{p-1}\cdots\alpha_{q+1}\alpha_q, \end{aligned}$$

выводимое из соотношений (12), (13).

Если $q < p < i$, то, воспользовавшись соотношениями (11), (15), получим равенство

$$\begin{aligned} & \alpha_q\alpha_{q+1}\cdots\alpha_{p-1}\beta_{p-1}\alpha_{p-1}\cdots\alpha_{q+1}\alpha_q\beta_i \\ & = \beta_i\alpha_q\alpha_{q+1}\cdots\alpha_{p-1}\beta_{p-1}\alpha_{p-1}\cdots\alpha_{q+1}\alpha_q, \end{aligned}$$

выводимое из соотношений (12), (13).

Если $i < q < p$ и $i \neq q-1$, то, воспользовавшись соотношениями (11), (15), получим равенство

$$\begin{aligned} & \alpha_q\alpha_{q+1}\cdots\alpha_{p-1}\beta_{p-1}\alpha_{p-1}\cdots\alpha_{q+1}\alpha_q\beta_i \\ & = \beta_i\alpha_q\alpha_{q+1}\cdots\alpha_{p-1}\beta_{p-1}\alpha_{p-1}\cdots\alpha_{q+1}\alpha_q, \end{aligned}$$

выводимое из соотношений (12), (13).

Если $i < q < p$ и $i = q-1$, то, воспользовавшись последовательно первым, вторым и третьим равенством соотношений (13), получим равенство

$$\begin{aligned} & \alpha_{p-1}\alpha_{p-2}\cdots\alpha_q\alpha_{q-1}\beta_q\alpha_{q-1}\beta_q\alpha_q\alpha_{q+1}\cdots\alpha_{p-2}\alpha_{p-1} \\ & = \beta_q\alpha_{p-1}\alpha_{p-2}\cdots\alpha_q\beta_q\alpha_q\cdots\alpha_{p-2}\alpha_{p-1}, \end{aligned}$$

выводимое из соотношений (13).

Если $p < i < q$, то, воспользовавшись соотношениями (11), получим равенство

$$\begin{aligned} & \alpha_{q-1}\alpha_{q-2}\cdots\alpha_{p+1}\beta_p\alpha_{p+1}\cdots\alpha_{q-2}\alpha_{q-1}\beta_i \\ & = \beta_i\alpha_{q-1}\alpha_{q-2}\cdots\alpha_{p+1}\beta_p\alpha_{p+1}\cdots\alpha_{q-2}\alpha_{q-1}, \end{aligned}$$

выводимое из соотношений (12), (13).

Если $p < q < i$, то, воспользовавшись соотношениями (11), получим равенство

$$\begin{aligned} \alpha_{q-1}\alpha_{q-2}\cdots\alpha_{p+1}\beta_p\alpha_{p+1}\cdots\alpha_{q-2}\alpha_{q-1}\beta_i \\ = \beta_i\alpha_{q-1}\alpha_{q-2}\cdots\alpha_{p+1}\beta_p\alpha_{p+1}\cdots\alpha_{q-2}\alpha_{q-1}, \end{aligned}$$

выводимое из соотношений (12), (13).

Если $i < p < q$, то, воспользовавшись соотношениями (11), получим равенство

$$\begin{aligned} \alpha_{q-1}\alpha_{q-2}\cdots\alpha_{p+1}\beta_p\alpha_{p+1}\cdots\alpha_{q-2}\alpha_{q-1}\beta_i \\ = \beta_i\alpha_{q-1}\alpha_{q-2}\cdots\alpha_{p+1}\beta_p\alpha_{p+1}\cdots\alpha_{q-2}\alpha_{q-1}, \end{aligned}$$

выводимое из соотношений (12), (13).

Докажем первое равенство соотношений (2). Используя соотношения (11), перепишем его в виде

$$\begin{aligned} \alpha_{j-1}\alpha_{j-2}\cdots\alpha_{i+1}\beta_i\alpha_{i+1}\cdots\alpha_{j-2}\alpha_{j-1}\varepsilon_{k,l} \\ = \varepsilon_{k,l}\alpha_{j-1}\alpha_{j-2}\cdots\alpha_{i+1}\beta_i\alpha_{i+1}\cdots\alpha_{j-2}\alpha_{j-1} \quad (i < j), \\ \alpha_{i-1}\alpha_{i-2}\cdots\alpha_j\beta_j\alpha_j\cdots\alpha_{i-2}\alpha_{i-1}\varepsilon_{k,l} \\ = \varepsilon_{k,l}\alpha_{i-1}\alpha_{i-2}\cdots\alpha_j\beta_j\alpha_j\cdots\alpha_{i-2}\alpha_{i-1} \quad (j > i). \end{aligned}$$

Пользуясь соотношениями (8), которые, как мы уже доказали, выводимы из (4), (10), (11), (12), (13), “передвинем” образующие $\{\alpha_k\}$ соответственно в начала и концы соотношений и сократим их. В результате получим соотношение (16).

Для доказательства второго соотношения системы (2) докажем выводимость равенств

$$\varepsilon_{i,j+1}\beta_j\varepsilon_{i,j} = \varepsilon_{i,j}\beta_j\varepsilon_{i,j+1} \quad (i < j), \quad (17)$$

$$\varepsilon_{i,j}\varepsilon_{i+1,j}\beta_i = \beta_i\varepsilon_{i+1,j}\varepsilon_{i,j} \quad (j < i), \quad (18)$$

$$\beta_i\varepsilon_{j,i+1}\varepsilon_{i,j} = \varepsilon_{i,j}\varepsilon_{j,i+1}\beta_i \quad (j < i). \quad (19)$$

Используя соотношения (11), перепишем соотношение (17) в алфавите $\{\alpha_k\}, \{\beta_k\}$. Применим соотношение (14) и сократим слева и справа образующие $\{\alpha_k\}$. Затем, пользуясь соотношениями (13) и (4), приведем его к виду $\alpha_{j-1}\beta_j\alpha_{j-1}\beta_j\beta_{j-1} = \beta_{j-1}\beta_j\alpha_{j-1}\beta_j\alpha_{j-1}$, т.е. к четвертому равенству соотношения (13).

Используя соотношения (11), перепишем соотношения (18) в алфавите $\{\alpha_k\}, \{\beta_k\}$. Из соотношений (4) имеем

$$\begin{aligned} \alpha_j\alpha_{j+1}\cdots\alpha_{i-2}\alpha_{i-1}\alpha_i\alpha_{i-1}\alpha_{i-2}\cdots\alpha_{j+1}\alpha_j \\ = \alpha_i\alpha_{i-1}\cdots\alpha_{j+1}\alpha_j\alpha_{j+1}\cdots\alpha_{i-1}\alpha_i. \end{aligned}$$

Используем второе равенство соотношения (13) и соотношения (4). Применив соотношение (15), сократим слева и справа образующие $\{\alpha_k\}$. Затем, пользуясь соотношениями (13) и (4), приведем его к виду $\alpha_j \beta_{j+1} \alpha_j \beta_{j+1} \beta_j = \beta_j \beta_{j+1} \alpha_j \beta_{j+1} \alpha_j$, т.е. к четвертому равенству соотношения (13).

Используя соотношения (11), перепишем соотношение (19) в алфавите $\{\alpha_k\}, \{\beta_k\}$. Применив соотношения (14) и (15), сократим в алфавите $\{\alpha_k\}, \{\beta_k\}$. Применив соотношения (14) и (15), сократим образующие $\{\alpha_k\}$. Затем, пользуясь соотношениями (13) и (4), приведем его к виду $\alpha_{i-1} \beta_i \alpha_{i-1} \beta_i \beta_{i-1} = \beta_{i-1} \beta_i \alpha_{i-1} \beta_i \alpha_{i-1}$, т.е. к четвертому равенству соотношения (13).

Доказательство второго соотношения системы (2) разбивается на шесть случаев в зависимости от величин i, j, k . Если $i < j < k$, то, воспользовавшись соотношением (11), получим

$$\begin{aligned} & \varepsilon_{i,j} \alpha_{k-1} \alpha_{k-2} \cdots \alpha_{j+1} \alpha_j \beta_j \alpha_{j+1} \alpha_{j+1} \cdots \\ & \quad \alpha_{k-2} \alpha_{k-1} \alpha_{k-1} \alpha_{k-2} \cdots \alpha_{i+1} \beta_i \alpha_{i+1} \cdots \alpha_{k-2} \alpha_{k-1} \\ & = \alpha_{k-1} \alpha_{k-2} \cdots \alpha_{i+1} \beta_i \alpha_{i+1} \cdots \\ & \quad \alpha_{k-2} \alpha_{k-1} \alpha_{k-1} \alpha_{k-2} \cdots \alpha_{j+1} \alpha_j \beta_j \alpha_j \alpha_{j+1} \cdots \alpha_{k-2} \alpha_{k-1} \varepsilon_{i,j}. \end{aligned}$$

Применив соотношения (4), сократим образующие $\{\alpha_k\}$. Пользуясь соотношениями (8), “передвинем” образующие соответственно в начало и в конец соотношений и сократим их. Домножим равенство слева и справа на α_j и сократим α_j^2 . По третьему равенству соотношения (8) и соотношению (11) получим соотношение (17).

Если $i < k < j$, то, воспользовавшись соотношением (11), получим

$$\begin{aligned} & \alpha_{j-1} \alpha_{j-2} \cdots \alpha_{i+1} \beta_i \alpha_{i+1} \cdots \alpha_{j-2} \alpha_{j-1} \alpha_{j-1} \alpha_{j-2} \cdots \\ & \quad \alpha_{k+1} \beta_k \alpha_{k+1} \cdots \alpha_{j-2} \alpha_{j-1} \varepsilon_{i,k} \\ & = \varepsilon_{i,k} \alpha_{j-1} \alpha_{j-2} \cdots \alpha_{k+1} \beta_k \alpha_{k+1} \cdots \\ & \quad \alpha_{j-2} \alpha_{j-1} \alpha_{j-1} \alpha_{j-2} \cdots \alpha_{i+1} \beta_i \alpha_{i+1} \cdots \alpha_{j-2} \alpha_{j-1}. \end{aligned}$$

Применив соотношения (4), сократим образующие $\{\alpha_k\}$. Пользуясь соотношениями (8), “передвинем” образующие $\{\alpha_k\}$ соответственно в начало и в конец соотношений и сократим их. По соотношению (11) получим равенство (17).

Если $j < i < k$, то, воспользовавшись соотношением (11), получим

$$\begin{aligned} & \varepsilon_{i,j} \alpha_{k-1} \alpha_{k-2} \cdots \alpha_{j+1} \alpha_j \beta_j \alpha_j \alpha_{j+1} \cdots \\ & \quad \alpha_{k-2} \alpha_{k-1} \alpha_{k-1} \alpha_{k-2} \cdots \alpha_{i+1} \beta_i \alpha_{i+1} \cdots \alpha_{k-2} \alpha_{k-1} \\ & = \alpha_{k-1} \alpha_{k-2} \cdots \alpha_{i+1} \beta_i \alpha_{i+1} \cdots \\ & \quad \alpha_{k-2} \alpha_{k-1} \alpha_{k-1} \alpha_{k-2} \cdots \alpha_{j+1} \alpha_j \beta_j \alpha_j \alpha_{j+1} \cdots \alpha_{k-2} \alpha_{k-1} \varepsilon_{i,j}. \end{aligned}$$

Применив соотношения (4), сократим образующие $\{\alpha_k\}$. Пользуясь соотношениями (8), “передвинем” образующие $\{\alpha_k\}$ соответственно в начало и в конец соотношений и сократим их. По соотношению (11) получим равенство (18).

Если $j < k < i$, то, воспользовавшись соотношением (11), получим

$$\begin{aligned} & \alpha_{i-1}\alpha_{i-2}\cdots\alpha_{j+1}\alpha_j\beta_j\alpha_j\alpha_{j+1}\cdots \\ & \quad \alpha_{i-2}\alpha_{i-1}\varepsilon_{k,j}\alpha_{i-1}\alpha_{i-2}\cdots\alpha_{k+1}\alpha_k\beta_k\alpha_k\alpha_{k+1}\cdots\alpha_{i-2}\alpha_{i-1} \\ & = \alpha_{i-1}\alpha_{i-2}\cdots\alpha_{k+1}\alpha_k\beta_k\alpha_k\alpha_{k+1}\cdots \\ & \quad \alpha_{i-2}\alpha_{i-1}\varepsilon_{k,j}\alpha_{i-1}\alpha_{i-2}\cdots\alpha_{j+1}\alpha_j\beta_j\alpha_j\alpha_{j+1}\cdots\alpha_{i-2}\alpha_{i-1}. \end{aligned}$$

Сократим слева и справа образующие $\{\alpha_k\}$. Пользуясь соотношениями (8), “передвинем” образующие $\{\alpha_k\}$ и сократим их. По второму равенству соотношения (8) и соотношению (11) получим соотношение (18).

Если $k < i < j$, то, воспользовавшись соотношением (11), получим

$$\begin{aligned} & \alpha_{j-1}\alpha_{j-2}\cdots\alpha_{i+1}\beta_i\alpha_{i+1}\cdots \\ & \quad \alpha_{j-2}\alpha_{j-1}\alpha_{j-1}\alpha_{j-2}\cdots\alpha_{k+1}\beta_k\alpha_{k+1}\cdots\alpha_{j-2}\alpha_{j-1}\varepsilon_{i,k} \\ & = \varepsilon_{i,k}\alpha_{j-1}\alpha_{j-2}\cdots\alpha_{k+1}\beta_k\alpha_{k+1}\cdots \\ & \quad \alpha_{j-2}\alpha_{j-1}\alpha_{j-1}\alpha_{j-2}\cdots\alpha_{i+1}\beta_i\alpha_{i+1}\cdots\alpha_{j-2}\alpha_{j-1}. \end{aligned}$$

Применив соотношения (4), сократим образующие $\{\alpha_k\}$. Пользуясь соотношениями (8), “передвинем” образующие $\{\alpha_k\}$ соответственно в начало и в конец соотношений и сократим их. По соотношению (11) получим равенство (19).

Если $k < j < i$, то, воспользовавшись соотношением (11), получим

$$\begin{aligned} & \alpha_{i-1}\alpha_{i-2}\cdots\alpha_{j+1}\alpha_j\beta_j\alpha_j\alpha_{j+1}\cdots \\ & \quad \alpha_{i-2}\alpha_{i-1}\varepsilon_{k,j}\alpha_{i-1}\alpha_{i-2}\cdots\alpha_{k+1}\alpha_k\beta_k\alpha_k\alpha_{k+1}\cdots\alpha_{i-2}\alpha_{i-1} \\ & = \alpha_{i-1}\alpha_{i-2}\cdots\alpha_{k+1}\alpha_k\beta_k\alpha_k\alpha_{k+1}\cdots \\ & \quad \alpha_{i-2}\alpha_{i-1}\varepsilon_{k,j}\alpha_{i-1}\alpha_{i-2}\cdots\alpha_{j+1}\alpha_j\beta_j\alpha_j\alpha_{j+1}\cdots\alpha_{i-2}\alpha_{i-1}. \end{aligned}$$

Сократим слева и справа образующие $\{\alpha_k\}$. Пользуясь соотношениями (8), “передвинем” образующие $\{\alpha_k\}$ и сократим их. По третьему равенству соотношения (8) и соотношению (11) получим соотношение (19).

Таким образом, соотношения (2), (8) выводятся из соотношений (4), (10), (11), (12), (13) и могут быть исключены. Соотношение (10) является частным случаем первого равенства соотношения (11) при $j = i + 1$ и тоже может быть исключено. И, наконец, в заключение доказательства исключим образующие и определяющие соотношения (11).

Равенства

$$\sigma_i = \alpha_i\beta_i \quad (i = 1, \dots, n-1) \quad (20)$$

показывают, каким образом автоморфизмы σ_i выражаются через элементарные автоморфизмы. Равенства (20) проверяются из определений автоморфизмов.

ТЕОРЕМА 1. *Группа C_n порождается автоморфизмами (3), (5) и определяющими соотношениями (4), (6), и*

$$\begin{aligned} \alpha_i \sigma_j &= \sigma_j \alpha_i, & |i - j| > 1, \\ \sigma_i \alpha_{i+1} \alpha_i &= \alpha_{i+1} \alpha_i \sigma_{i+1}, & \sigma_i \sigma_{i+1} \alpha_i = \alpha_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}. \end{aligned} \quad (21)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 2 группа C_n порождается автоморфизмами $\{\alpha_k\}, \{\beta_k\}$ и определяющими соотношениями (4), (12), (13). Добавив образующие (5) и определяющие соотношения (20), получим изоморфную группу. Из определений автоморфизмов α_i, σ_i следует, что равенства (6), (21) выполняются в группе C_n . Следовательно, по лемме 2 они выводимы из соотношений (4), (12), (13), (20). Группа, задаваемая образующими $\{\alpha_k\}, \{\beta_k\}, \{\sigma_k\}$ и определяющими соотношениями (4), (6), (12), (20), (21) изоморфна группе C_n .

Из равенств (20) и (4) получаем

$$\beta_i = \alpha_i \sigma_i \quad (i = 1, \dots, n - 1). \quad (22)$$

Подставив (22) в соотношение (12), получим равенство $\alpha_i \sigma_i \alpha_j \sigma_j = \alpha_j \sigma_j \alpha_i \sigma_i, |i - j| > 1$, выводимое из соотношений (4), (6), (21), и, следовательно, равенство (12) можно исключить. Подставив (22) в первое, второе и третье равенства соотношений (13), получим соответственно равенства

$$\begin{aligned} \alpha_i \alpha_j \sigma_j &= \alpha_j \sigma_j \alpha_i, & |i - j| > 1, \\ \alpha_i \alpha_{i+1} \sigma_{i+1} \alpha_i &= \alpha_{i+1} \alpha_i \sigma_i \alpha_{i+1}, \\ (\alpha_i \alpha_{i+1} \sigma_{i+1})^2 &= (\alpha_{i+1} \sigma_{i+1} \alpha_i)^2, \end{aligned}$$

выводимые из соотношений (4) и (21). Подставив (22) в четвертое равенство соотношений (13), получим равенство

$$(\alpha_i \alpha_{i+1} \sigma_{i+1})^2 \alpha_i \sigma_i = \alpha_i \sigma_i (\alpha_i \alpha_{i+1} \sigma_{i+1})^2,$$

выводимое из соотношений (21) и (6). Следовательно, соотношения (13) могут быть исключены. В заключение доказательства исключим образующие $\{\beta_k\}$ и определяющие соотношения (20).

ЛЕММА 3. *В группе автоморфизмов C_n подгруппа $\mathfrak{M}_n$ пересекается с подгруппой $\mathfrak{B}_n$ по группе крашенных кос $\mathfrak{N}_n$. Образующие $\rho_{i,j}$ ($1 \leq i < j \leq n$) группы $\mathfrak{N}_n$ выражаются через образующие группы $\mathfrak{M}_n$ равенствами*

$$\begin{aligned} \rho_{i,j} &= \varepsilon_{j,j-1} \varepsilon_{j,j-2} \cdots \varepsilon_{j,i+1} \varepsilon_{j,i} \varepsilon_{i,j} \varepsilon_{i+1,j} \cdots \varepsilon_{j-2,j} \varepsilon_{j-1,j} \\ &\quad (1 \leq i < j \leq n). \end{aligned} \quad (23)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Исходя из определений (7) и пользуясь равенством

$$\sigma_i = \alpha_i \varepsilon_{i,i+1} \quad (i = 1, \dots, n-1), \quad (24)$$

выразим автоморфизмы $\rho_{i,j}$ через автоморфизмы $\{\varepsilon_{i,j}\}, \{\alpha_k\}$. При помощи соотношений (8) получим равенства (23). Следовательно, $\mathfrak{N}_n \subset \mathfrak{M}_n$. Нити произвольной косы $C(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}) \in \mathfrak{B}_n$ реализуют подстановку $C(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$. Если $C(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}) \in \mathfrak{M}_n$, то автоморфизм $C(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$ является сопрягающим базис, и, следовательно, единичным. Таким образом, коса $C(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1})$ реализует единичную подстановку, т.е. является крашеной.

ТЕОРЕМА 2. *Группа $\mathfrak{M}_n$ имеет тривиальный центр. Группа $\mathbf{C}_n$ имеет тривиальный центр.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть автоморфизм

$$C = a_i \rightarrow X_i^{-1} a_i X_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

является элементом центра группы $\mathfrak{M}_n$. Докажем, что если X – несократимое слово в алфавите $a_1, \dots, a_n$ и $X^{\varepsilon_{1,2}} = X$, то слово X не содержит буквы a_1 . Действительно, пусть

$$X = K_1 T_1 K_2 T_2 \dots K_s T_s K_{s+1} \quad (s \geq 0),$$

где $T_1, T_2, \dots, T_s$ – непустые слова в алфавите $\{a_3, \dots, a_n\}$, $K_1, K_2, \dots, K_s, K_{s+1}$ – слова в алфавите $\{a_1, a_2\}$ и $K_2, \dots, K_s$ – непустые. Легко видеть, что

$$X^{\varepsilon_{1,2}} = K_1^{\varepsilon_{1,2}} T_1 K_2^{\varepsilon_{1,2}} T_2 \dots K_s^{\varepsilon_{1,2}} T_s K_{s+1}^{\varepsilon_{1,2}}$$

и $K_i^{\varepsilon_{1,2}} = a_2^{-1} K_i a_2$ в свободной группе. Следовательно,

$$X^{\varepsilon_{1,2}} = a_2^{-1} K_1 a_2 T_1 a_2^{-1} K_2 a_2 T_2 \dots a_2^{-1} K_s a_2 T_s a_2^{-1} K_{s+1} a_2,$$

где все слова T_i непустые, и поэтому равенство $X^{\varepsilon_{1,2}} = X$ возможно только в случае, когда $K_i = a_2^{-1} K_i a_2$, т.е., когда K_i не содержит букв a_1 . Поскольку $\varepsilon_{1,2}^{-1} C \varepsilon_{1,2} = C$, и автоморфизм $\varepsilon_{1,2}^{-1} C$ имеет вид

$$\begin{aligned} a_1 &\rightarrow X_2^{-1} a_2 X_2 X_1^{-1} a_1 X_1 X_2^{-1} a_2^{-1} X_2, \\ a_i &\rightarrow X_i^{-1} a_i X_i \quad (i = 2, \dots, n), \end{aligned}$$

то по доказанному подслова $X_2, \dots, X_n$ не содержат буквы a_1 . Аналогично, из равенства $\varepsilon_{2,3}^{-1} C \varepsilon_{2,3} = C$ получим, что слова $X_1, X_3, \dots, X_n$ не содержат буквы a_2 и т.д. Таким образом, для любого $i = 1, \dots, n$ слово X_i может содержать только букву a_i . Следовательно, автоморфизм C тождественный.

Пусть C – элемент центра группы $\mathbf{C}_n$. Пользуясь леммой 1 и соотношениями (8), представим элемент C в виде $C = P(\dots, \varepsilon_{i,j}, \dots)Q(\dots, \alpha_i, \dots)$. Для произвольного $K(\dots, \alpha_i, \dots)$ из $\mathfrak{S}_n$ имеем

$$\begin{aligned} P(\dots, \varepsilon_{i,j}, \dots)Q(\dots, \alpha_i, \dots)K(\dots, \alpha_i, \dots) \\ = K(\dots, \alpha_i, \dots)P(\dots, \varepsilon_{i,j}, \dots)Q(\dots, \alpha_i, \dots). \end{aligned}$$

Пользуясь соотношениями (8), получим равенство

$$\begin{aligned} P(\dots, \varepsilon_{i,j}, \dots)Q(\dots, \alpha_i, \dots)K(\dots, \alpha_i, \dots) \\ = P_1(\dots, \varepsilon_{i,j}, \dots)K(\dots, \alpha_i, \dots)Q(\dots, \alpha_i, \dots) \end{aligned}$$

для некоторого слова $P_1(\dots, \varepsilon_{i,j}, \dots)$. Следовательно, автоморфизм $K(\dots, \alpha_i, \dots)Q(\dots, \alpha_i, \dots)K^{-1}(\dots, \alpha_i, \dots)Q^{-1}(\dots, \alpha_i, \dots)$, сопрягающий базис, а значит тождественный, т.е. слово $Q(\dots, \alpha_i, \dots)$ коммутирует с произвольным элементом $K(\dots, \alpha_i, \dots)$ в $\mathfrak{S}_n$.

Пусть $n > 2$. Группа $\mathfrak{S}_n$ при $n > 2$ имеет тривиальный центр (см. [8, с. 68]). Следовательно, элемент центра C имеет вид $P(\dots, \varepsilon_{i,j}, \dots)$. По первой части теоремы 5 подгруппа $\mathfrak{M}_n$ группы $\mathbf{C}_n$ имеет тривиальный центр. Следовательно, автоморфизм C тождественный. Пусть $n = 2$. Группа $\mathbf{C}_2$ задается образующими α_1, β_1 и определяющим соотношением $\alpha_1^2 = 1$, т.е. является свободным произведением двух неединичных групп и, следовательно, имеет тривиальный центр.

Будем говорить, что автоморфизм

$$a_i \rightarrow X_i^{-1}(a_1, \dots, a_n)a_{t_i}X_i(a_1, \dots, a_n) \quad (i = 1, \dots, n) \quad (25)$$

записан в нормальной форме, если для каждого $i = 1, \dots, n$ алгебраическая сумма показателей буквы a_{t_i} в слове X_i равна нулю. Легко видеть, что всякий автоморфизм может быть записан в нормальной форме. В дальнейшем, если не оговорено противное, будем считать, что автоморфизмы записываются в нормальной форме.

ЛЕММА 4. *Элемент $P(\dots, \varepsilon_{i,j}, \dots)$ группы $\mathfrak{M}_n$ принадлежит $\mathfrak{M}'_n$ тогда и только тогда, когда алгебраическая сумма показателей по каждой образующей $\varepsilon_{i,j}$ в слове P равна нулю. Автоморфизм группы $\mathfrak{M}_n$*

$$a_i \rightarrow X_i^{-1}(a_1, \dots, a_n)a_iX_i(a_1, \dots, a_n) \quad (i = 1, \dots, n) \quad (26)$$

принадлежит $\mathfrak{M}'_n$ тогда и только тогда, когда каждое слово $X_i(a_1, \dots, a_n)$ из (26) принадлежит коммутанту свободной группы F_n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение леммы легко следует из соотношений (2).

Известно, что элемент X принадлежит коммутанту свободной группы F_n тогда и только тогда, когда алгебраическая сумма показателей по каждой образующей a_i равна нулю. Индукцией по длине слова $P(\dots, \varepsilon_{i,j}, \dots)$ легко показать, что алгебраическая сумма показателей по каждой образующей $\varepsilon_{i,j}$ в слове $P(\dots, \varepsilon_{i,j}, \dots)$ с автоморфизмом (26) совпадает с алгебраической суммой показателей при образующей a_j в слове $X_i(a_1, \dots, a_n)$. Следовательно, слово $P(\dots, \varepsilon_{i,j}, \dots)$ принадлежит $\mathfrak{M}'_n$ тогда и только тогда, когда в каждом слове $X_i(a_1, \dots, a_n)$ алгебраическая сумма показателей по каждой образующей a_j при $j \neq i$ равна нулю. Поскольку автоморфизм (26) записан в нормальной форме, то алгебраическая сумма показателей по образующей a_i тоже равна нулю.

ЛЕММА 5. *Элемент $P(\dots, \alpha_k, \dots, \varepsilon_{i,j}, \dots)$ группы $\mathbf{C}_n$ принадлежит $\mathbf{C}'_n$ тогда и только тогда, когда слово P содержит четное число букв алфавита $\{\alpha_k\}$ и поровну положительных и отрицательных букв алфавита $\{\varepsilon_{i,j}\}$. Автоморфизм*

$$a_p \rightarrow X_p^{-1}(a_1, \dots, a_n) a_{i_p} X_p(a_1, \dots, a_n) \quad (p = 1, \dots, n)$$

принадлежит $\mathbf{C}'_n$ тогда и только тогда, когда подстановка $(\overset{1 \dots n}{i_1 \dots i_n})$ четная и слово $X_1 X_2 \dots X_n$ содержит поровну положительных и отрицательных букв алфавита $\{\alpha_k\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналогично лемме 4.

ЛЕММА 6. $\mathbf{C}'_n \cap \mathfrak{B}_n = \mathfrak{B}'_n$, $\mathfrak{N}_n \cap \mathfrak{M}'_n = \mathfrak{N}'_n$, $\mathfrak{M}'_n \cap \mathfrak{B}_n = \mathfrak{N}'_n$, $\mathfrak{M}'_n \cap \mathfrak{B}'_n = \mathfrak{N}'_n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко показать, что элемент $C(\dots, \sigma_k, \dots)$ группы $\mathfrak{B}_n$ принадлежит $\mathfrak{B}'_n$ тогда и только тогда, когда слово C содержит поровну положительных и отрицательных букв алфавита $\{\sigma_k\}$. Следовательно, $\mathbf{C}'_n \cap \mathfrak{B}_n \supset \mathfrak{B}'_n$. Пусть $K \in \mathbf{C}'_n$ и $K \in \mathfrak{B}_n$. Используя равенство $\sigma_i = \alpha_i \varepsilon_{i,i+1}$ ($i = 1, \dots, n-1$), запишем слово K в алфавите $\{\alpha_k, \varepsilon_{i,j}\}$ и в алфавите $\{\sigma_k\}$. По лемме 5 слово K содержит четное число букв алфавита $\{\alpha_k\}$ и поровну положительных и отрицательных букв алфавита $\{\varepsilon_{i,j}\}$. Пусть $K \notin \mathfrak{B}'_n$. Тогда число положительных букв алфавита $\{\sigma_k\}$ в слове K не равно числу отрицательных букв алфавита. Следовательно, число положительных букв алфавита $\{\varepsilon_{i,j}\}$ слова K не равно числу отрицательных букв алфавита $\{\varepsilon_{i,j}\}$. По лемме 1 определяющие соотношения группы $\mathbf{C}_n$ сохраняют количество положительных и отрицательных букв алфавита $\{\varepsilon_{i,j}\}$. Следовательно, у всех слов, равных K , в группе $\mathbf{C}_n$ число положительных букв алфавита $\{\varepsilon_{i,j}\}$ не равно числу отрицательных букв алфавита. Противоречие. Следовательно, $K \in \mathfrak{B}'_n$.

Группа крашенных кос $\mathfrak{N}_n$ порождается образующими $\rho_{i,j}$ ($1 \leq i < j \leq n$) (см. (7)). Пусть $K(\dots, \rho_{i,j}, \dots)$ – слово в положительных образующих

$\{\rho_{i,j}\}$. Пусть $L(\dots, \varepsilon_{i,j}, \dots)$ – результат подстановки (23) в слово $K(\dots, \rho_{i,j}, \dots)$. Из формулы (23) видно, что всякий элемент $\varepsilon_{q,s}$ такой, что $q < s$, слова $L(\dots, \varepsilon_{i,j}, \dots)$ принадлежит слову, полученному из некоторого $\rho_{t,s}$ слова $K(\dots, \rho_{i,j}, \dots)$ при $t \leq q$, и только ему. Пусть слово $L(\dots, \varepsilon_{i,j}, \dots)$ содержит $|\varepsilon_{i,j}|$ букв $\varepsilon_{i,j}$, и слово $K(\dots, \rho_{i,j}, \dots)$ содержит $|\rho_{i,j}|$ букв $\rho_{i,j}$. Тогда

$$|\varepsilon_{q,s}| = |\rho_{1,s}| + |\rho_{2,s}| + \dots + |\rho_{q,s}|. \quad (27)$$

Из равенства (27) индукцией по первому индексу легко доказать, что

$$|\rho_{1,s}| = |\varepsilon_{1,s}|, \quad |\rho_{q,s}| = |\varepsilon_{q,s}| - |\varepsilon_{q-1,s}| \quad (q = 2, \dots, s-1). \quad (28)$$

Из равенства (27) следует, что набор букв $\{\rho_{i,j}\}$ в слове $K(\dots, \rho_{i,j}, \dots)$ однозначно определяет набор букв $\{\varepsilon_{i,j}\}$ в слове $L(\dots, \varepsilon_{i,j}, \dots)$. Из равенств (28) следует, что набор букв $\{\varepsilon_{i,j}\}$ в слове $L(\dots, \varepsilon_{i,j}, \dots)$ однозначно определяет набор букв $\{\rho_{i,j}\}$ в слове $K(\dots, \rho_{i,j}, \dots)$. Если $K(\dots, \rho_{i,j}, \dots)$ в отрицательных образующих $\{\rho_{i,j}\}$, то для него справедливо аналогичное утверждение.

Пусть элемент $P(\dots, \varepsilon_{i,j}, \dots)$ группы $\mathfrak{N}_n$ принадлежит $\mathfrak{N}'_n$. Тогда он принадлежит $\mathfrak{M}'_n$, поскольку $\mathfrak{N}'_n \subset \mathfrak{M}'_n$. Следовательно, по лемме 4 алгебраическая сумма показателей по каждой образующей $\varepsilon_{i,j}$ в слове $P(\dots, \varepsilon_{i,j}, \dots)$ равна нулю. Представим элемент $P(\dots, \varepsilon_{i,j}, \dots)$ как слово $Q(\dots, \rho_{i,j}, \dots)$. Предположим, что в слове $Q(\dots, \rho_{i,j}, \dots)$ алгебраическая сумма показателей при некоторой образующей не равна нулю. Тогда набор положительных букв $\{\rho_{i,j}\}$ в слове $Q(\dots, \rho_{i,j}, \dots)$ отличается от набора отрицательных букв $\{\rho_{i,j}\}$ в слове $Q(\dots, \rho_{i,j}, \dots)$. Пусть $P^*(\dots, \varepsilon_{i,j}, \dots)$ – результат подстановки (23) в слово $Q(\dots, \rho_{i,j}, \dots)$. Тогда набор положительных букв $\{\varepsilon_{i,j}\}$ слова $P^*(\dots, \varepsilon_{i,j}, \dots)$ отличается от набора отрицательных букв $\{\varepsilon_{i,j}\}$ слова $P^*(\dots, \varepsilon_{i,j}, \dots)$. Так как $P^*(\dots, \varepsilon_{i,j}, \dots) = P(\dots, \varepsilon_{i,j}, \dots)$ в группе $\mathfrak{M}_n$, определяющие соотношения (2) группы $\mathfrak{M}_n$ сохраняют набор $\{\varepsilon_{i,j}\}$, а вставки и сокращения добавляют или убавляют от положительного и отрицательного набора по одной букве, то набор положительных букв $\{\varepsilon_{i,j}\}$ слова $P(\dots, \varepsilon_{i,j}, \dots)$ отличается от набора отрицательных букв $\{\varepsilon_{i,j}\}$ слова $P(\dots, \varepsilon_{i,j}, \dots)$. Противоречие. Следовательно, алгебраическая сумма показателей по каждой образующей $\rho_{i,j}$ в слове $Q(\dots, \rho_{i,j}, \dots)$ равна нулю.

Поскольку соотношения группы $\mathfrak{N}_n$ [6] сохраняют алгебраическую сумму показателей по каждой образующей, то элемент $Q(\dots, \rho_{i,j}, \dots)$ группы $\mathfrak{N}_n$ принадлежит $\mathfrak{N}'_n$ тогда и только тогда, когда алгебраическая сумма показателей по каждой $\rho_{i,j}$ в слове $Q(\dots, \rho_{i,j}, \dots)$ равна нулю.

Таким образом, $\mathfrak{N}_n \cap \mathfrak{M}'_n = \mathfrak{N}'_n$. Отсюда и из равенства $\mathfrak{M}_n \cap \mathfrak{B}_n = \mathfrak{N}_n$ (см. лемму 3) следует, что $\mathfrak{N}'_n = \mathfrak{M}'_n \cap \mathfrak{N}_n = \mathfrak{M}'_n \cap (\mathfrak{B}_n \cap \mathfrak{M}_n) = \mathfrak{M}'_n \cap \mathfrak{B}_n$, т.е. $\mathfrak{M}'_n \cap \mathfrak{B}_n = \mathfrak{N}'_n$. Так как $\mathfrak{B}'_n \subset \mathfrak{B}_n$, то $\mathfrak{M}'_n \cap \mathfrak{B}'_n \subset \mathfrak{N}'_n$. Поскольку $\mathfrak{N}_n \subset \mathfrak{M}_n$ и $\mathfrak{N}_n \subset \mathfrak{B}_n$, то $\mathfrak{N}'_n \subset \mathfrak{M}'_n$ и $\mathfrak{N}'_n \subset \mathfrak{B}'_n$. Следовательно, $\mathfrak{M}'_n \cap \mathfrak{B}'_n \supset \mathfrak{N}'_n$ и $\mathfrak{M}'_n \cap \mathfrak{B}'_n = \mathfrak{N}'_n$.

ЛЕММА 7. Пусть $A(\dots, \varepsilon_{i,j}, \dots)$ является крашеной косой группы $\mathfrak{N}_n$. Пусть коса $B(\dots, \varepsilon_{i,j}, \dots)$ получена из косы $A(\dots, \varepsilon_{i,j}, \dots)$ выдергиванием p -й нити ($p = 1, \dots, n$). Пусть слово $C(\dots, \varepsilon_{i,j}, \dots)$ получено из слова $A(\dots, \varepsilon_{i,j}, \dots)$ вычеркиванием всех букв $\varepsilon_{p,\alpha}, \varepsilon_{\alpha,p}$ ($\alpha = 1, \dots, n$) и уменьшением на единицу всех индексов, больших p , во всех образующих $\varepsilon_{i,j}$. Тогда $C(\dots, \varepsilon_{i,j}, \dots)$ – коса и $B(\dots, \varepsilon_{i,j}, \dots) = C(\dots, \varepsilon_{i,j}, \dots)$ в группе $\mathfrak{N}_{n-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ω_p ($p = 1, \dots, n$) – гомоморфизм группы $\mathfrak{N}_n$ в группу $\mathfrak{N}_{n-1}$, состоящий в выдергивании p -й нити косы. Из определения гомоморфизмов ω_p и формул (7) легко получить формулы действия гомоморфизмов ω_p на образующих $\{\rho_{i,j}\}$ группы $\mathfrak{N}_n$:

$$\begin{aligned}\omega_p(\rho_{k,l}) &= \rho_{k-1,l-1}, & 1 \leq p < k, \\ \omega_p(\rho_{k,l}) &= \rho_{k,l-1}, & k \leq p < l \quad (k < l-1), \\ \omega_p(\rho_{k,l}) &= 1, & k = p = l-1 \vee p = l, \\ \omega_p(\rho_{k,l}) &= \rho_{k,l}, & l < p \leq n.\end{aligned}\tag{29}$$

Пусть Ψ_p ($p = 1, \dots, n$) – отображение группы $\mathfrak{M}_n$ в группу $\mathfrak{M}_{n-1}$, состоящее в вычеркивании всех букв $\varepsilon_{p,\alpha}, \varepsilon_{\alpha,p}$ ($\alpha = 1, \dots, n$) и уменьшением на единицу всех индексов, больших p , во всех образующих $\varepsilon_{i,j}$. Если $K(\dots, \varepsilon_{i,j}, \dots)$ переводится в $L(\dots, \varepsilon_{i,j}, \dots)$ одним элементарным преобразованием группы $\mathfrak{M}_n$ (см. (2)), то $\Psi_p K(\dots, \varepsilon_{i,j}, \dots) = \Psi_p L(\dots, \varepsilon_{i,j}, \dots)$ в группе $\mathfrak{M}_n$. Следовательно, если $K(\dots, \varepsilon_{i,j}, \dots) = Q(\dots, \varepsilon_{i,j}, \dots)$ в группе $\mathfrak{M}_n$, то

$$\Psi_p K(\dots, \varepsilon_{i,j}, \dots) = \Psi_p Q(\dots, \varepsilon_{i,j}, \dots)$$

в группе $\mathfrak{M}_n$. Отображение Ψ_p , очевидно, сохраняет операцию. Следовательно, отображение Ψ_p ($p = 1, \dots, n$) является гомоморфизмом.

Образующие $\rho_{k,l}$ ($1 \leq k < l \leq n$) группы $\mathfrak{N}_n$ выражаются через образующие группы $\mathfrak{M}_n$ равенствами (см. (23))

$$\rho_{k,l} = \varepsilon_{l,l-1} \varepsilon_{l,l-2} \cdots \varepsilon_{l,k+1} \varepsilon_{l,k} \varepsilon_{k,l} \varepsilon_{k+1,l} \cdots \varepsilon_{l-2,l} \varepsilon_{l-1,l}.\tag{30}$$

Из формул (29) и (30) следует, что

$$\omega_p(\rho_{k,l}) = \Psi_p(\rho_{k,l}) \quad (p = 1, \dots, n, \quad 1 \leq k < l \leq n).\tag{31}$$

Пусть $A'(\dots, \varepsilon_{i,j}, \dots)$ – представление косы $A(\dots, \varepsilon_{i,j}, \dots)$ в образующих (23) (см. лемму 3). Поскольку отображения ω_p и Ψ_p суть гомоморфизмы, то из формул (31) следует, что

$$\omega_p A'(\dots, \varepsilon_{i,j}, \dots) = \Psi_p A'(\dots, \varepsilon_{i,j}, \dots).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}B(\dots, \varepsilon_{i,j}, \dots) &= \omega_p A(\dots, \varepsilon_{i,j}, \dots) = \omega_p A'(\dots, \varepsilon_{i,j}, \dots), \\ C(\dots, \varepsilon_{i,j}, \dots) &= \Psi_p A(\dots, \varepsilon_{i,j}, \dots) = \Psi_p A'(\dots, \varepsilon_{i,j}, \dots).\end{aligned}$$

Таким образом, $C(\dots, \varepsilon_{i,j}, \dots) = B(\dots, \varepsilon_{i,j}, \dots)$ в группе $\mathfrak{N}_{n-1}$.

ЛЕММА 8. Пусть автоморфизм $B(\dots, \varepsilon_{i,j}, \dots)$ группы $\mathfrak{M}_n$ имеет вид

$$a_k \rightarrow Y_k^{-1} a_k Y_k \quad (k = 1, \dots, n), \quad (32)$$

и пусть p – фиксированное число ($p = 1, \dots, n$). Пусть слово $C(\dots, \varepsilon_{i,j}, \dots)$ получено из слова $B(\dots, \varepsilon_{i,j}, \dots)$ вычеркиванием всех букв $\varepsilon_{p,\alpha}, \varepsilon_{\alpha,p}$ ($\alpha = 1, \dots, n$), и пусть автоморфизм $C(\dots, \varepsilon_{i,j}, \dots)$ имеет вид

$$a_k \rightarrow Z_k^{-1} a_k Z_k \quad (k = 1, \dots, n). \quad (33)$$

Тогда слово Z_p пусто, а всякое слово Z_k ($k \neq p$) получено из слова Y_k вычеркиванием всех вхождений буквы $a_p^{\pm 1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Индукция по длине слова $B(\dots, \varepsilon_{i,j}, \dots)$. Если длина слова $B(\dots, \varepsilon_{i,j}, \dots)$ равна нулю, то длина всякого слова Y_i равна нулю, и лемма очевидна. Пусть $B = B_1 \varepsilon_{s,t}^{\pm 1}$, автоморфизм B имеет вид (32), а автоморфизм B_1 имеет вид

$$a_k \rightarrow W_k^{-1} a_k W_k \quad (k = 1, \dots, n). \quad (34)$$

По определению $\varepsilon_{s,t}^{\pm 1}$ всякое Y_k из (32) при $k \neq s$ получается из W_k и (34) заменой $a_s \rightarrow (a_t)^{\mp 1} a_s a_t^{\pm 1}$, а при $k = s$ слово Y_k имеет вид $a_t^{\pm 1} Y'_k$, где Y'_k получается из W_k заменой $a_s \rightarrow (a_t)^{\mp 1} a_s a_t^{\pm 1}$.

Если $s \neq p, t \neq p$, то $C = C_1 \varepsilon_{s,t}^{\pm 1}$, где слово C_1 получено из B_1 вычеркиванием всех $\varepsilon_{p,\alpha}, \varepsilon_{\alpha,p}$ ($\alpha = 1, \dots, n$). По индуктивному предположению автоморфизм имеет вид

$$a_k \rightarrow V_k^{-1} a_k V_k \quad (k = 1, \dots, n), \quad (35)$$

где слово V_p пусто, а всякое слово V_k ($k \neq p$) получено из слова W_k вычеркиванием всех вхождений буквы $a_p^{\pm 1}$. В свободной группе F_n слово, в котором сначала вычеркивается буква $a_p^{\pm 1}$, а затем производится замена $a_s \rightarrow (a_t)^{\mp 1} a_s a_t^{\pm 1}$ ($s \neq p, t \neq p$) равно слову, в котором сначала производится указанная замена, а затем вычеркивается буква $a_p^{\pm 1}$. Таким образом, в рассматриваемом случае лемма верна.

Пусть $s = p$, т.е. $B = B_1 \varepsilon_{p,t}^{\pm 1}$. По индуктивному предположению автоморфизм слова C_1 , полученного из слова B_1 вычеркиванием всех $\varepsilon_{p,\alpha}, \varepsilon_{\alpha,p}$ ($\alpha = 1, \dots, n$) имеет вид (35), где слово V_p пусто, а всякое слово V_k ($k \neq p$) получено из слова W_k вычеркиванием всех вхождений буквы $a_p^{\pm 1}$. По условию в данном случае $C = C_1$. Следовательно, Z_p пусто, а Z_k ($k \neq p$) получено из слова W_k вычеркиванием всех букв $a_p^{\pm 1}$. Слово Y_k получается из слова W_k заменой $a_p \rightarrow (a_t)^{\mp 1} a_p a_t^{\pm 1}$. Следовательно, результат вычеркивания всех букв $a_p^{\pm 1}$ в словах W_k и Y_k ($k \neq p$) совпадают. Таким образом, слово Z_k ($k \neq p$) получено из слова Y_k вычеркиванием всех вхождений буквы $a_p^{\pm 1}$.

Пусть $t = p$, т.е. $B = B_1 \varepsilon_{s,p}^{\pm 1}$. По индуктивному предположению автоморфизм слова C_1 , полученного из слова B_1 вычеркиванием всех $\varepsilon_{p,\alpha}, \varepsilon_{\alpha,p}$ ($\alpha = 1, \dots, n$), имеет вид (35), где V_p пусто, а всякое V_k ($k \neq p$) получено из слова W_k вычеркиванием всех вхождений буквы $a_p^{\pm 1}$. В данном случае $C = C_1$. Следовательно, Z_p пусто, а Z_k ($k \neq p$) получено из слова W_k вычеркиванием всех вхождений буквы $a_p^{\pm 1}$. Слово Y_k ($k \neq p$) получается из слова W_k заменой $a_s \rightarrow (a_p)^{\mp 1} a_s a_p^{\pm 1}$. Следовательно, результаты вычеркивания буквы $a_p^{\pm 1}$ в словах W_k и Y_k ($k \neq p$) совпадают. Таким образом, Z_k ($k \neq p$) получается из слова Y_k вычеркиванием всех вхождений букв $a_p^{\pm 1}$.

Коса A группы кос $\mathfrak{B}_n$ называется гладкой, если выдергивание всякой нити из A переводит ее в косу, равную единице в $\mathfrak{B}_{n-1}$ (см. [9, 6.23]). Легко видеть, что при $n > 2$ гладкая коса принадлежит $\mathfrak{N}_n$.

Пусть $Z_n = \langle t_1, \dots, t_n \rangle$ – свободная абелева группа ранга n со свободным базисом $t_1, \dots, t_n$, JZ_n – групповое кольцо группы Z_n и кольца целых чисел J . Представление Гасснер [10] группы крашенных кос $\mathfrak{N}_n$ в мультипликативную группу $n \times n$ матриц с элементами из JZ_n – это гомоморфизм группы $\mathfrak{N}_n$, определяемый отображением образующих группы $\mathfrak{B}_n$ (см. (7))

$$\sigma_i^{-1} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & (1 - t_{i+1}) & t_i & & & \\ & & 1 & 0 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix},$$

где выделены i -я строка и $(i + 1)$ -я строка.

Магнус и Пелузо [11] доказали, что представление Гасснер для $\mathfrak{N}_3$ точное. Бирман (см. [7, теорема 3.14]) показала, что ядро представления Гасснер группы $\mathfrak{N}_n$ принадлежит $\mathfrak{N}'_n$.

ТЕОРЕМА 3. *Всякий элемент из ядра представления Гасснер группы $\mathfrak{N}_n$ при выдергивании любой нити переходит в некоторый элемент ядра представления Гасснер группы $\mathfrak{N}_{n-1}$. В частности, если представление Гасснер группы $\mathfrak{N}_{n-1}$ точное, то ядро представления Гасснер группы $\mathfrak{N}_n$ содержится в группе гладких кос с n нитями G_n .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что если $K_1(a_1, \dots, a_n) = K_2(a_1, \dots, a_n)$ в свободной группе, то слова $L_1(a_1, \dots, a_{n-1})$ и $L_2(a_1, \dots, a_{n-1})$, полученные соответственно из слов K_1 и K_2 вычеркиванием всех вхождений буквы $a_p^{\pm 1}$ и уменьшением на единицу всех индексов в буквах $a_{p+1}, \dots, a_n$ равны в группе. Таким образом, при этом отображении каждый коммутатор группы F_n переходит в некоторый коммутатор

группы F_{n-1} , а всякий элемент коммутанта группы F_n переходит в некоторый элемент коммутанта группы F_{n-1} . В свою очередь, всякий элемент F_n'' переходит в некоторый элемент F_{n-1}'' .

Таким образом, если $X(a_1, \dots, a_n)$ – элемент F_n'' и $Y(a_1, \dots, a_{n-1})$ – слово, полученное из слова $X(a_1, \dots, a_n)$ вычеркиванием всех вхождений буквы $a_p^{\pm 1}$ и уменьшением на единицу всех индексов в буквах $a_{p+1}, \dots, a_n$, то $Y(a_1, \dots, a_{n-1})$ принадлежит F_{n-1}'' .

Пусть коса A – элемент ядра представления Гасснер группы $\mathfrak{N}_n$. Бирман (см. [7, теорема 3.16]) показала, что автоморфизм $A = a_k \rightarrow X_k^{-1} a_k X_k$ ($k = 1, \dots, n$) группы крашенных кос $\mathfrak{N}_n$ (записанный в нормальной форме) принадлежит ядру представления Гасснер группы $\mathfrak{N}_n$ тогда и только тогда, когда каждое слово X_i принадлежит F_n'' . Выдернем в косе A p -ю нить ($p = 1, \dots, n$). Получим косу B с автоморфизмом $a_k \rightarrow Y_k^{-1} a_k Y_k$ ($k = 1, \dots, n$). По леммам 7, 8 слово Y_p пусто, а каждое слово Y_k ($k \neq p$) получено из слова X_k вычеркиванием всех вхождений буквы $a_p^{\pm 1}$ и уменьшением на единицу всех индексов в буквах $a_{p+1}, \dots, a_n$. По доказанному $Y_k(a_1, \dots, a_{n-1}) \in F_n''$. По теореме Бирман коса B принадлежит ядру представления Гасснер группы $\mathfrak{N}_{n-1}$, т.е. по условию теоремы $B = 1$ в группе $\mathfrak{N}_{n-1}$. Таким образом, выдергивание p -й нити ($p = 1, \dots, n$) переводит косу A в единичную, т.е. $A \in \Gamma_n$.

Пусть $Z = \langle t \rangle$ – бесконечная циклическая группа и JZ – групповое кольцо группы Z и кольца целых чисел J . Представление Бурау (см., например, [7, с. 118]) группы кос $\mathfrak{B}_n$ в мультипликативную группу $n \times n$ матриц с элементами из JZ – это гомоморфизм, определяемый отображением

$$\sigma_i^{-1} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & (1-t) & t & & \\ & & 1 & 0 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix},$$

где выделены i -я строка и $(i+1)$ -я строка.

Магнус и Пелузо [11] доказали, что представление Бурау для $\mathfrak{B}_3$ точное. Бирман (см. [7, теорема 3.14]) показала, что ядро представления Бурау группы кос $\mathfrak{B}_n$ принадлежит $\mathfrak{B}_n' \cap \mathfrak{N}_n$.

ТЕОРЕМА 4. *Ядро представления Бурау группы кос $\mathfrak{B}_n$ принадлежит $\mathfrak{N}_n'$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть H_n – подгруппа свободной группы F_n , состоящая из тех слов в алфавите $a_1^{\pm 1}, \dots, a_n^{\pm 1}$, которые содержат поровну положительных и отрицательных букв. Поскольку H_n – подгруппа груп-